MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA



FRANCIELCK FREIRE

VOL.2

ENSINO MÉDIO TÉCNICO

EDIFAP

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

Abílio Eduardo
(Universidade Katyavala Bwila – AO)
Adriano Fonseca
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Aldo Parra
(Universidad Del Cauca - CO)
Alexandre Pais
(Manchester University - UK)
Armando Aroca
(Universidad del Atlántico - CO)
Eliane Vasquez
(Universidade Federal do Amapá - BR)
Elisângela Melo
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Hilbert Blanco
(Universidad de Nariño - CO)
Ieda Giongo
(Universidade do Vale do Taquari - BR)
Natividad Adamuz
(Universidad de Córdoba - ES)
Nuno Vieira
(Universidade Lusófona - PT)
Sávio Bicho
(Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará - BR)

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL DO IFAP

Titulares

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Luiz Ricardo Fernandes de Farias Aires
José Rodrigo Sousa de Lima Deniur
Nilvan Carvalho Melo
Darley Calderaro Leal Matos
Welber Carlos Andrade da Silva
Diego Armando Silva da Silva
Marialva do Socorro Ramalho de Oliveira de Almeida
Larissa Pinheiro de Melo
Suany Rodrigues da Cunha
Carlos Alexandre Santana Oliveira

Suplentes

Ivan Gomes Pereira
Jéssica de Oliveira Pontes Nóbrega
Cleber Macedo de Oliveira
Joadson Rodrigues da Silva Freitas
Adrielma Nunes Ferreira Bronze
Johnny Gilberto Moraes Coelho
Mábia Nunes Toscano
Victor Hugo Gomes Sales
Themístocles Raphael Gomes Sobrinho
Romaro Antonio Silva

FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Autor

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

EDIFAP

Macapá
2024

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS
CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

Todos os direitos reservados. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e que não seja para venda ou qualquer fim comercial.Os artigos assinados, no que diz respeito tanto à linguagem quanto ao conteúdo, não refletem necessariamente a opinião da Editora do Instituto Federal do Amapá. As opiniões são de responsabilidade exclusiva dos respectivos autores. A revisão textual, formatação e adequação às normas ABNT são de responsabilidade dos autores

EQUIPE TÉCNICA EDITORIAL

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Editora Chefa

Romaro Antonio Silva
Editor adjunto

Luiz Ricardo Fernandes Farias Aires
Editor adjunto

Ivan Gomes Pereira
Diagramador

Suzana Cardoso
Bibliotecária

DIAGRAMAÇÃO, PROJETO GRÁFICO E CAPA
Ivan Gomes Pereira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F866m Freire, Francielck Domingos.
Matemática aplicada às Ciências Agrárias : contextualização, modelagem, tecnologia / Francielck Domingos Freire. – Macapá : Edifap, 2024.
332f. : il. ; v.2.

ISBN 978-65-89513-32-2 (digital)
978-65-89513-31-5 (impresso)
Volume 2: Ensino médio técnico

1. Matemática – ciências agrárias. 2. Modelagem – matemática. 3. Ciências Agrárias - matemática. II. Título.

CDD 510

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária Suzana Cardoso, CRB 1.142, com dados fornecidos pela Editora do IFAP

A meus filhos, Vinícius e Kauã,
e a minha esposa, Ligele Cristine.

AGRADECIMENTOS

Por esse trabalho, gostaria de agradecer imensamente à equipe técnica do Instituto Federal do Amapá - Campus Porto Grande, em particular, aos amigos e colaboradores: Alyne Cristina Sodré Lima, Antônio Francelino de Oliveira Filho, Breno Henrique Pedroso, João Maria do Amaral Junior, Marcelo Batista Teixeira, Osvaldo de Mello Campelo Vasconcelos e, em especial, ao excelente profissional, Cleber Machado de Oliveira, por algumas revisões técnicas e valiosas contribuições.

Agradecimento aos pares, amigos e excelentes professores de matemática que contribuírem com críticas, sugestões e revisões: Carlos Santana, Dejildo Roque, Eduardo Rosário, Helington Franzotti, Hilton Bruno, Paulo Robson e Rudá Magalhães.

Aos colegas da Biblioteca do instituto federal do Amapá do Campus Porto Grande: Ronny Nunes e Tábata Brito, pela paciência durante minhas consultas exaustivas e empréstimos exagerados.

Aos acadêmicos das turmas 2019.1 e 2018.2 de Engenharia agronômica do IFAP- Campus Porto Grande, 2022.1 de Engenharia civil do IFAP - Campus Macapá e aos acadêmicos de licenciatura em Matemática IFAP - Campus Macapá, que trabalharam os textos e contribuíram para sua construção. Singular gratidão aos alunos mais dedicados dessas turmas: João Vitor de Andrade Soares, Lucival Jessé Morais da Silva, Ledegelson Moura de Souza e Josué Silva Galvão.

Por fim, um agradecimento mais que especial ao meu pai (in memoriam), à minha mãe e à minha família: Ligele Cristine (esposa), Vinícius Freire e Kauã Freire (filhos), pela paciência e compreensão pelas minhas ausências enquanto estudava, pesquisava e escrevia.

PREFÁCIO

Esse livro-texto é uma coletânea de partes dos textos de um livro-caderno, objeto de minha dissertação de mestrado (FREIRE, 2014) publicada em 2014 e de pesquisas de aplicação da Matemática às ciências agrárias.

O livro-caderno (FREIRE, 2013) objeto dessa dissertação, foi um dos projetos desenvolvidos na escola estadual Esther da Silva Virgolino no estado do Amapá e é um dos trabalhos pelo qual tenho muito orgulho em ter escrito. Além de ser um material didático gratuito (por isso não foi publicado) em que o aluno não copiava conteúdos em seu caderno, oportunizava também a contextualização de conteúdos matemáticos e o uso de tecnologias em sala de aula.

É nesse sentido de contextualização e do uso de tecnologias, pensando em um livro com viés didático concomitante à modelagem matemática, que escrevi essa coletânea.

Quando comecei a lecionar no Instituto Federal do Amapá - Campus Agrícola Porto Grande, os problemas didáticos encontrados no instituto eram similares aos das escolas estaduais onde lecionava anteriormente: os livros didáticos disponibilizados pelo MEC não eram aplicáveis à realidade profissional de cada curso, seja técnico ou superior.

E além disso, o único livro de Matemática (FERREIRA, 1999) com aplicação às ciências agrárias (inclusive, um excelente livro de bibliografia complementar), não possuía todos os conteúdos exigidos nos componentes dos cursos. Lembro, por exemplo, que muitos professores que ministravam componentes técnicos nos cursos de

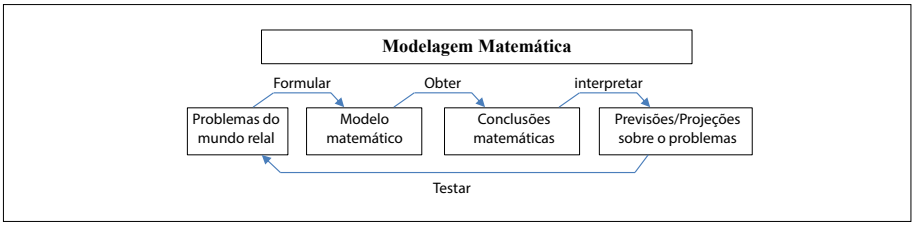
agronegócio, agropecuária ou agroecologia do campus, reclamavam que os alunos, entre outras coisas, não sabiam resolver e nem aplicar regra de três, conteúdo indispensável para o desenvolvimento do componente. Isso me incomodava!

E os alunos em contrapartida, questionavam-me: "Professor! em que situações de minha vida profissional irei aplicar tal conteúdo matemático?". Respostas improvisadas eram dadas e embora razoáveis, não satisfaziam a mim, e talvez, nem à eles. Algo faltava!

Resolvi, então, pesquisar sobre abordagens e aplicações matemáticas na área. A contextualização passou a ser, diante desse cenário, um dos pilares fundamentais da pesquisa. Mas, não queria fazê-la de qualquer forma. Não poderia ser ingênua ou sem sentido, precisava ser técnica, adequada e prática ao curso. Foi aí que surgiu uma parceria com os colegas professores da área técnica do Campus (cujos nomes estão nos agradecimentos), que não só incentivaram a produção desse material, como também sugeriram várias bibliografias, modelos de aplicação, dicas e participação na elaboração de conteúdos e exercícios. A contextualização presumidamente alcançada com essas características, pode ser apreciada em demasia nessa coleção e segue o organograma a seguir.

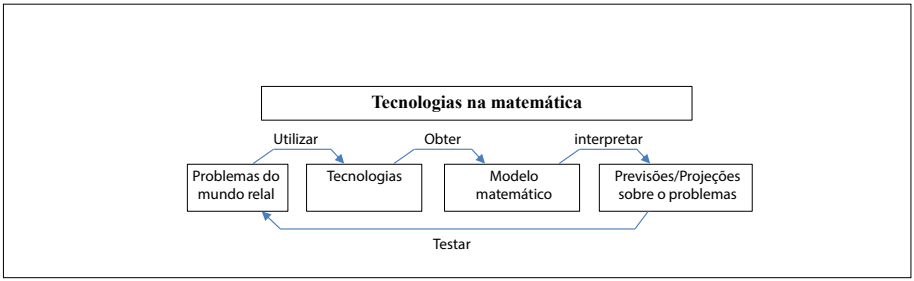
Uma vez contextualizado os conteúdos, era necessário colocar em prática o que havia sido ensinado. Foi então que elaborei um projeto de pesquisa: "uso de modelagem matemática no cultivo de alface", que foi realizado no mesmo instituto e campus, sob minha orientação, com contribuição inestimável do agrônomo Cleber Machado de Oliveira, e desenvolvido pelos alunos: Cleverton França Vaz, João Vitor de Andrade Soares (acadêmicos de engenharia agronômica) e Antônio Sales Maciel (aluno do curso técnico em agronegócio).

Nesse projeto, foi possível acompanhar o desenvolvimento da alface em doses diferentes de nitrogênio, descobrir qual o modelo matemático que se ajusta aos parâmetros de crescimento dessa hortaliça e, a partir desse modelo, resultado da regressão (presente nesse livro), identificar qual dose de nitrogênio seria ideal para a otimização da produção do cultivo (em termos matemáticos: o máximo ou mínimo da função). Ficou evidente, com esse projeto e a partir de diversas pesquisas sobre experimentos agrários (livros, revistas científicas, artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações, etc.), a importância da modelagem matemática para às ciências agrárias. É o que o leitor também irá encontrar nessa coleção segundo o organograma a seguir.



Contudo, embora os alunos desse projeto tenham posto em prática o que aprenderam em sala de aula, como teorias e cálculos (à mão), a tecnologia se fez necessária como ferramenta auxiliar de confirmação de dados e interpretação de resultados. Na verdade, é difícil imaginar algum técnico ou engenheiro da área não utilizando tais ferramentas no exercício de sua profissão. É o que também propõe essa coleção.

Em todos os volumes da coleção, convenientemente, é ensinada, com imagens ilustrativas e passo a passo, a utilização de recursos tecnológicos, como calculadoras científicas, planilhas eletrônicas e softwares gráficos, para que o leitor tenha à sua disposição outras ferramentas auxiliares de conhecimento.

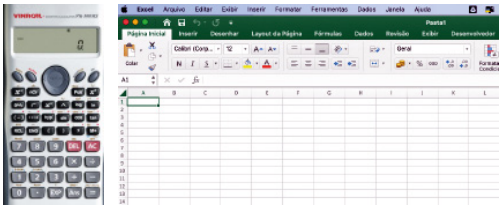


A calculadora científica sugerida na coleção para uso é a Vinacal VN-500MS. No entanto, os comandos utilizados nessa calculadora são praticamente os mesmos utilizados em muitas outras calculadoras, como a Casio FX-82MS, por exemplo.

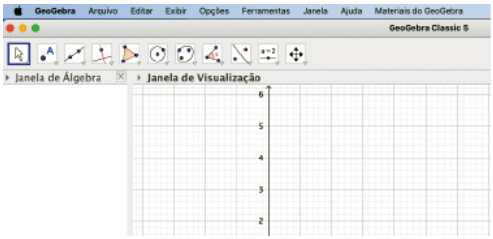
Já a planilha eletrônica utilizada no material é da Microsoft excel para Mac, versão 16.67. Não obstante, os comandos utilizados nesse software são os mesmos para qualquer versão e para qualquer sistema operacional, seja o Windows, MacOs ou Linux.

Quanto ao software gráfico foi utilizado o software geogebra classic versão 5.0. O geogebra é um software gratuito e de código aberto que permite de forma intuitiva a iteração entre diversas frentes matemáticas como geometria, álgebra, além de construção e análise de gráficos, entre outros. O download do software, seja para

computador ou smartphone pode ser feito gratuitamente pelo site geogebra.org. Há opção também de utilizar o software on-line (sem precisa instalar) no mesmo endereço eletrônico.



Calculadora vinacal VN-500MS (à esquerda) e
Planilha excel (à direita)



Geogebraclassic–versão5.0

Em termos de estrutura, a coleção matemática aplicada às ciências agrárias é dividida em quatro volumes. Os volumes 1, 2 e 3 são voltados para o ensino médio técnico em agroecologia, agronegócio, agropecuária ou qualquer nível médio técnico em ciências agrárias. Já o volume 4 é destinado ao nível superior em engenharia agronômica, engenharia agrícola ou qualquer outro nível superior, porém as aplicações são destinadas às ciências agrárias.

Cada volume é dividido em unidades, cada unidade em seções e cada seção em subseções, de forma sequencial. Por exemplo: Unidade 12, seção 12.1 e subseção 12.1.1. Os exercícios são numerados de acordo com a unidade e a ordem do exercício dentro dessa unidade. Por exemplo: exercícios 12.1, exercícios 12.2, etc. Nos volumes 1, 2 e 3 os exercícios de aplicação estão intercalados com os exercícios comuns (de nível médio), enquanto no volume 4, os exercícios de aplicação ficam sempre no final da unidade e são separados dos demais.

Além dos exercícios elaborados pelo autor com base na contextualização, modelagem e tecnologia, há também exercícios selecionados criteriosamente do ENEM, ENADE, outras instituições e vestibulares. Todos são selecionados com base no conteúdo das unidades afins e ordenados em ordem de dificuldade.

Na coleção, também é possível encontrar a matemática pura, com teoremas (inéditos, inclusive) e demonstrações (algumas inéditas, também), sempre discorridas com cuidados técnicos e formalidades que um bom livro de matemática exige.

Por fim, é uma coleção de livros didáticos elaborados com o objetivo de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos da área. Modestamente, é o que espero!

Francielck Domingos Freire

SUMÁRIO

CAP 10
10. GEOMETRIA PLANA 23
10.1. Noções elementares 23
EXERCÍCIOS 10.1 31
10.2. Triângulos retângulos 32
10.2.1. Relações métricas no triângulo retângulo 34
EXERCÍCIOS 10.2 36
10.2.2. Outras relações métricas no triângulo retângulo 40
EXERCÍCIOS 10.3 42
10.2.3. Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo 43
10.2.4. Tabela de ângulos notáveis 46
EXERCÍCIOS 10.4 49
10.3. Triângulos quaisquer 55
10.3.1. Soma dos ângulos internos de um triângulo 55
10.3.2. Relações métricas (leis dos senos e dos cossenos) 58
EXERCÍCIOS 10.5 62
10.3.3. Área de um triângulo qualquer 65
EXERCÍCIOS 10.6 68
10.3.4. Semelhança de triângulos e Teorema de Tales 71
EXERCÍCIOS 10.7 76
10.4. Área de quadriláteros notáveis 79
EXERCÍCIOS 10.8 81
10.5. Polígonos 84
EXERCÍCIOS 10.9 90
10.5.1. Área de um hexágono regular 93
10.5.2. Área de um octógono regular 94
10.6. Circunferência 95
10.6.1. Área de um setor circular 98
10.6.2. Área da coroa circular 98
EXERCÍCIOS 10.10 101
CAP 11
11. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 109
11.1. Elementos iniciais 109
11.2. Unidades de medidas de arcos 109
EXERCÍCIOS 11.1 111
11.3. Ciclo trigonométrico 113
11.3.1. Arcos côngruos 114
EXERCÍCIOS 11.2 116

11.4. Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico 117
11.4.1. Ângulos notáveis no ciclo trigonométrico 119
11.5. Redução ao 1º quadrante 119
11.5.1. Redução do 2º para o 1º quadrante 120
11.5.2. Redução do 3º para o 1º quadrante 121
11.5.3. Redução do 4º para o 1º quadrante. 121
EXERCÍCIOS 11.3 124
11.6. Funções circulares 126
11.6.1. Função seno 126
11.6.2. Função Cosseno 127
11.6.3. Variações da função seno e função cosseno 128
11.6.4. Função tangente 133
EXERCÍCIOS 11.4 134
11.7. Gráficos de funções trigonométricas no geogebra 139
11.8. Transformações e identidades trigonométricas 140
11.8.1. Arco complementar 141
11.8.2. Arco da soma e da diferença 141
11.8.3. Arco duplo 145
11.8.4. Arco da metade 146
11.8.5. Transformação em produto 147
EXERCÍCIOS 11.5 149
11.8.6. Outras relações trigonométricas 151
11.8.7. Identidades trigonométricas 154
EXERCÍCIOS 11.6 155
11.9. Arcos trigonométricos na calculadora científica 156
CAP 12
12. GEOMETRIA ESPACIAL 160
12.1. Poliedros 160
12.1.1. Relação de Euler 163
EXERCÍCIOS 12.1 167
12.1.2. Poliedros regulares 169
12.2. Prismas 171
12.2.1. Classificação dos prismas 171
12.2.2. Área da superfície de um prisma 173
12.2.3. Volume de um prisma 174
EXERCÍCIOS 12.2 177
12.3. Pirâmide 181
12.3.1. Classificação de pirâmides 181
12.3.2. Área de superfície de pirâmides 182
12.3.3. Volume de uma pirâmide 183
EXERCÍCIOS 12.3 188
12.4. Cilindro 191
12.4.1. Classificação 191
12.4.2. Área da superfície de um cilindro 191
12.4.3. Volume de um cilindro 192
EXERCÍCIOS 12.4 194

12.5. Cone 197
12.5.1. Classificação 197
12.5.2. Área da superfície de um cone 198
12.5.3. Volume de um cone 198
EXERCÍCIOS 12.5 202
12.6. Esfera 205
12.6.1. Volume de uma esfera 205
12.6.2. Área da superfície de uma esfera 207
EXERCÍCIOS 12.6 208
CAP 13
13. GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA 213
13.1. Distância entre dois pontos 213
13.2. Ponto médio 215
EXERCÍCIOS 13.1 215
13.3. Vetores no plano 217
EXERCÍCIOS 13.2 223
13.3.1. Operações com vetores 225
EXERCÍCIOS 13.3 229
13.3.2. Produto escalar ou produto interno 230
EXERCÍCIOS 13.4 233
13.3.3. Aplicações vetoriais 234
13.3.4. A área de um paralelogramo 236
13.3.5. A área de um triângulo 237
13.3.6. A área de um polígono convexo qualquer 239
13.3.7. Teorema de Pick 241
13.3.8. Pontos colineares 243
13.3.9. Baricentro de um triângulo 244
EXERCÍCIOS 13.5 245
13.4. Retas no plano 247
13.4.1. Coeficiente angular de uma reta 249
13.4.2. Posição relativa de retas 250
EXERCÍCIOS 13.6 254
13.4.3. Interseção de duas retas 255
13.4.4. Equação da reta que passa por um ponto 256
EXERCÍCIOS 13.7 257
13.4.5. Ângulo entre retas 258
13.4.6. Distância de um ponto a uma reta 260
EXERCÍCIOS 13.8 262
13.5. Circunferência 263
13.5.1. Reconhecimento de equação de circunferência 264
13.5.2. Posição relativa de ponto e circunferência 265
13.5.3. Posição relativa de reta e circunferência 267
13.5.4. Posição relativa entre duas circunferências 269
EXERCÍCIOS 13.9 273
13.6. Cônicas 274
13.6.1. Elipse 275
EXERCÍCIOS 13.10 280

13.6.2. Hipérbole 283
EXERCÍCIOS 13.11 286
13.6.3. Parábola 287
13.6.4. A parábola e a função quadrática 289
EXERCÍCIOS 13.12 293
13.7. Geometria no geogebra 294
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 301
TABELAS 307
GABARITOS E SOLUÇÕES 311
SOBRE O AUTOR 329

CAPÍTULO

10

GEOMETRIA PLANA

GEOMETRIA PLANA

10. GEOMETRIA PLANA

Não há dúvidas da importância da geometria plana para todas as ciências, inclusive as ciências agrárias. Seja na hora de fazer um canteiro ou um curral, dividir um terreno, calcular área para o plantio de um cultivo, adubação ou germinação, etc. Nesta unidade, abordaremos a geometria plana pura, conforme é ensinada no ensino médio, porém de forma mais contextualizada e com viés à topografia.

10.1. Noções elementares

As definições e as proposições primitivas (ou postulados) que veremos a seguir, são decorrentes da experiência e observação, determinados intuitivamente e aceitos na geometria plana sem demonstração.

Ponto: Conforme Euclides (265-325 a.c) o definiu, é "aquilo que não tem parte", ou seja, o ponto não tem dimensão (é adimensional).

O simples toque da ponta da caneta sobre o papel, por exemplo, acompanhado por letra maiúscula (do nosso alfabeto) A, B, C, ... representa um ponto.

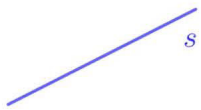
Exemplo: um ponto A.



Reta: É um conjunto infinito de pontos alinhados.

Se fosse possível com uma régua e uma caneta, fazer um traço infinito (sem começo e sem fim) no papel, teríamos a imagem completa de uma reta. Por não ser possível, sua representação fica restrita a um simples traço (mas subentendido sua infinita extensão) acompanhado de letra minúscula do nosso alfabeto: a, b, c, d, ...

Exemplo: reta s.

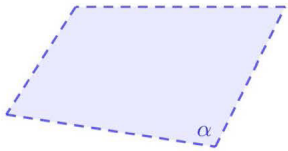


Plano: É um conjunto infinito de retas dispostas lado a lado, formando um objeto em duas dimensões. Representa-se com letras gregas minúsculas: $\alpha, \beta, \theta, \ldots$

Podemos imaginar um plano como sendo uma folha de papel, um quadro, o chão, a parte superior de uma mesa, etc., entretanto, não esquecendo que suas

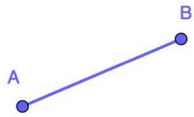
duas dimensões são infinitas.

Exemplo: Plano α.



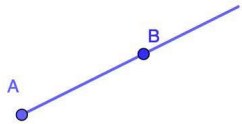
Segmento de reta: A região de uma reta determinada (ou limitada) por dois pontos.

Exemplo:



Simbolizamos esse seguimento por $\overline{AB}$.

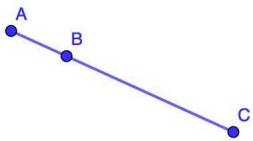
Semirreta: Inicia-se em um ponto e passa por outro (sem fim).



Simbolizamos essa semirreta por $\overrightarrow{AB}$.

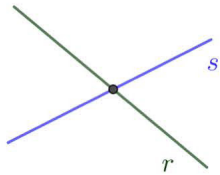
Pontos colineares: são pontos que pertencem a uma mesma reta.

Exemplo: Os pontos A, B e C, na figura a seguir, são colineares.



Retas concorrentes: Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um ponto em comum.

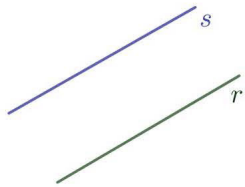
Exemplo: Simbolizado por $r \times s$, dizemos que r e s são concorrentes.



Retas paralelas: Duas retas coplanares[1] são paralelas se, e somente se, elas não têm um ponto em comum.

[1] Significa que pertencem a um mesmo plano.

Exemplo: Simbolizado por r // s, dizemos que r é paralela a s.



Congruência: A congruência é uma propriedade atribuída à figuras ou objetos que possuem mesma forma e tamanho[2]. Utilizamos o símbolo: $\equiv$ para dizer que dois objetos são congruentes.

Exemplo: Sejam dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ ambos de 10cm. Dizemos que $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ (Lê-se: o segmento $\overline{AB}$ é congruente à $\overline{BC}$).

Postulados: A partir das noções elementares anteriores, podemos anunciar os postulados que concretizam o relacionamento entre o ponto, a reta e o plano.

i. Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.
ii. Num plano há infinitos pontos.
iii. Dados dois pontos, ou ambos é um só (coincidentes) ou são distintos.
iv. Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
v. Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então a reta está contida neste plano.
vi. Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

SAIBA MAIS!

Por que as cadeiras, mesas e outros móveis com quatro pernas, às vezes, não ficam firmes no chão, enquanto que, em um móvel de três pernas (um tripé, por exemplo) isso não acontece? A explicação está no último postulado (vi) que nos garante que três pontos são sempre coplanares (pertencem a um mesmo plano).

Definição 10.1.1: Chama-se **ângulo** a medida da abertura de duas semirretas (ou segmentos) não coincidentes de mesma origem (figura 10.1.1).

Unidade de medida: A medida de um ângulo que iremos trabalhar inicialmente é o grau, cujo símbolo é °(pequeno círculo sobrescrito). Entretanto, há outras unidades de medida, como os radianos (utilizado no sistema internacional que veremos na próxima unidade), o gradiano, etc.

Por convenção, o ângulo de 1° (um grau) é o comprimento de uma circunferência dividido por 360 (figura 10.1.2).

O ângulo interno é o menor entre os ângulos e o ângulo externo é o maior entre eles. A soma do ângulo interno com o externo é 360°. Ver figura 10.1.3.

[2] Embora na linguagem corrente seja comum dizer que duas coisas são iguais quando possuem a mesma forma e tamanho, na geometria, um objeto só é igual a si próprio, então não é indicado afirmar que dois objetos geométricos são iguais, e sim, que são congruentes.

Na figura 10.1.2 vemos que o ângulo interno entre os dois segmentos é 1º e o ângulo externo é 359º.

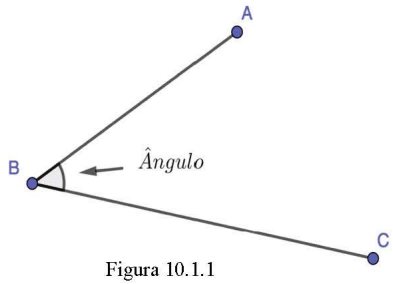


Figura 10.1.1

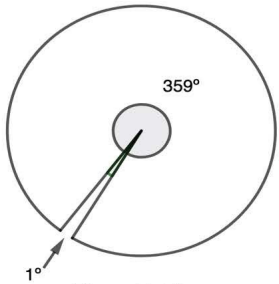


Figura 10.1.2

Um dos instrumentos mais usados para medir ângulos é uma régua em formato circular ou semicircular denominado **transferidor**.

Para usá-lo, siga passos (figura 10.1.4):

1-O centro do transferidor deve ser colocado sobre o vértice do ângulo.

2-A linha horizontal que passa pelo centro deve coincidir com um dos segmentos do ângulo.

3-Verificamos a medida da escala em que passa o outro segmento. Veja na figura 10.1.4, um exemplo, em que o ângulo encontrado está entre 69º e 70º.

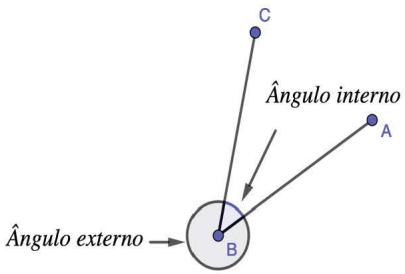


Figura 10.1.3

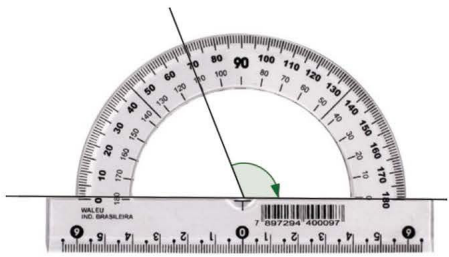


Figura 10.1.4

Definição 10.1.2: Denominamos de **bissetriz de um ângulo** a semirreta interna ou um segmento interno, que parte do mesmo ponto em comum e que divide o ângulo em duas partes congruentes. Na figura 10.1.5, o ângulo $A\widehat{B}H \equiv H\widehat{B}C$ ($\overline{\mathrm{BH}}$ é a bissetriz).

Utilizamos a expressão $A\widehat{B}H$ para dizer que o ângulo em questão é formado pelos segmentos $\overline{\mathrm{AB}}$ e $\overline{\mathrm{BH}}$ no ponto B.

Definição 10.1.3: Alguns ângulos possui denominação conforme o seu valor.

- **Ângulo reto**: É um ângulo igual a 90º (figura 10.1.6).
- **Ângulo agudo:** É um ângulo menor que 90º(figura 10.1.7).
- **Ângulo obtuso:** É um ângulo maior que 90º (figura 10.1.8).

◆ **Ângulo nulo (0º):** Lados coincidentes (sem abertura).

◆ **Ângulo raso (180º):** Os lados são semirretas opostas. As semirretas pertencem a mesma reta ou segmento. É a metade de 360º.

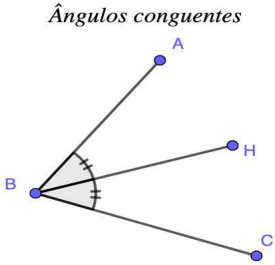


Figura 10.1.5



Figura 10.1.6

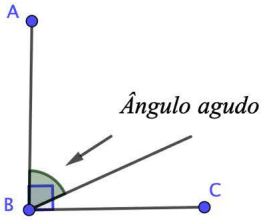


Figura 10.1.7

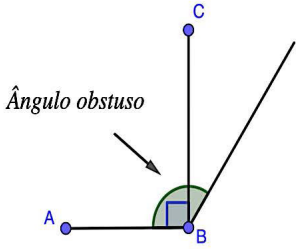


Figura 10.1.8

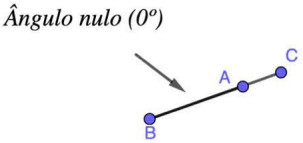


Figura 10.1.9

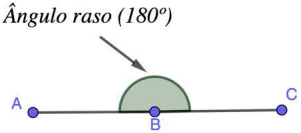


Figura 10.1.10

Definição 10.1.4 - Subdivisões do grau: Quando a medida de um ângulo não é exata utilizamos as subdivisões do grau denominado de **sexagesimais**. São eles:

◆ **Minuto** (′): é um 1º (um grau) dividido por 60;

◆ **Segundo** (″): é um 1′ (um minuto) divido por 60.

Em outras palavras, um grau equivale a 60 minutos e um minuto equivale a 60 segundos.

Para transformar partes de 1 grau em minutos e em segundos, há dois métodos:

1. Multiplicar a parte decimal do grau por 60 para obter os minutos e, em seguida, multiplicar a parte decimal dos minutos por 60 para obter os segundos.

2. Utilizar uma regra de três simples como no exemplo a seguir.

Exemplo: Representar 17,48º em ângulos sexagesimais.

Solução: Calculando os minutos:

$$\begin{matrix} 1^{\circ} & \rightarrow & 60' \\ 0{,}48^{\circ} & \rightarrow & x \end{matrix} \Rightarrow x = 60.0{,}48 \Rightarrow \boxed{x = 28{,}8'}.$$

Calculando os segundos:

$$\begin{matrix} 1' & \rightarrow & 60'' \\ 0{,}8' & \rightarrow & x \end{matrix} \Rightarrow x = 60.0{,}8 \Rightarrow \boxed{x = 48''}.$$

Assim: 17,48° equivale a 17°28'48''.

Outra solução dita anteriormente é multiplicar a parte decimal do grau para obter os minutos: $60.0{,}48 = 28{,}8'$. Em seguida, multiplicar a parte decimal do minuto para obter os segundos: $60.0{,}8 = 48''$. Assim: 17,48° equivale a 17°28'48''.

De forma contrária, para transformar um ângulo em decimais em ângulos sexagesimais, deve-se primeiro: dividir o valor em segundos por 60 e somar esse resultado aos minutos. Segundo: dividir o valor em minutos por 60 e somar esse resultado ao grau.

Outra forma é usar uma regra de três, como o exemplo a seguir.

2º exemplo: Representar 60º45'19'' em ângulos decimais.

Solução: Para calcular o inverso, podemos utilizar também uma regra de 3.

$$\begin{matrix} 1' & \rightarrow & 60'' \\ x & \rightarrow & 19'' \end{matrix} \Rightarrow 60x = 19 \Rightarrow x = \frac{19}{60} \Rightarrow \boxed{x = 0{,}316667'}.$$

Calculando os graus de $45' + 0{,}316667' = 45{,}316667'$:

$$\begin{matrix} 1^{\circ} & \rightarrow & 60' \\ x & \rightarrow & 45{,}316667' \end{matrix}$$

$$60x = 45{,}316667 \Rightarrow x = \frac{45{,}316667}{60} \Rightarrow \boxed{x \cong 0{,}7552^{\circ}}.$$

Observe que ao final das contas, a regra de três simples ocasiona a divisão por 60.

Assim: 60°45'19'' equivale a 60,7552º.

3º exemplo: Sendo $\alpha = 32^{\circ}44'15''$ e $\beta = 62^{\circ}24'50''$. Calcular:

a) $\alpha + \beta$

Solução: Poderíamos transformar ambos os ângulos em graus decimais, somá-los e transformá-los em ângulos sexagesimais novamente. Porém, é muito trabalhoso. A estratégia a seguir consiste em somar segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus, adequando os valores sexagesimais. Do seguinte modo:

$$\begin{array}{r} 32^{\circ}44'15'' \\ +\ 62^{\circ}24'50'' \\ \hline 94^{\circ}68'65'' \Rightarrow 95^{\circ}09'05'' \end{array}$$

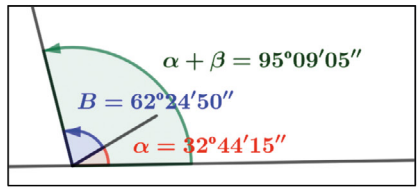


Figura 10.1.11

5”+60” = 65” =1’05” (soma 1 minuto aos minutos)
44’+24’+1’ = 69’ = 1°9’ (soma 1 grau aos graus)
Resposta: 32°+62°+1°=95°9’05” (ver figura 10.1.11).

b) $\beta - \alpha$

Solução:

$$\begin{array}{r} 62^\circ 24' 50'' \\ -\ 32^\circ 44' 15'' \\ \hline \end{array}$$

29°80’35” ⇒ 30°20’35” ⇒ Errado! Pois, 30°20’35”+32°44’15” ≠ 62°24’50”.

Para subtrair dois ângulos sexagesimais, o ângulo na parte superior (a ser subtraído) deve ter os graus, minutos e segundos maiores que o ângulo da parte inferior. Dessa forma, é preciso adequar desmembrando 60’ minutos do grau e/ou 60” do minuto, para que isso aconteça. Veja:

$$\begin{array}{r} 61^\circ 84' 50'' \Leftarrow \text{ foi tirado 1º e acrescido 60'} \\ -\ 32^\circ 44' 15'' \\ \hline \end{array}$$

29°40’35” (ver figura 10.1.12).

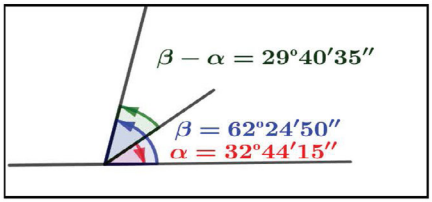


Figura 10.1.12

c) $\alpha - \beta$

Solução:

$$\begin{array}{r} 32^\circ 44' 15'' \\ -\ 62^\circ 24' 50'' \\ \hline \end{array}$$

− 30°19’55” ⇒ Errado! Ângulo maior precisa estar na parte superior e o ângulo não pode ser negativo geometricamente.

Nesses casos é preciso acrescentar mais 360° (uma volta completa) ao ângulo a ser subtraído: 360°+32°44’15” = 392°44’15”, o que equivale a 392°43’75”.

$$\begin{array}{r} 392^\circ 43' 75'' \\ -\ 62^\circ 24' 50'' \\ \hline \end{array}$$

330°19’25” (ver figura 10.1.13).

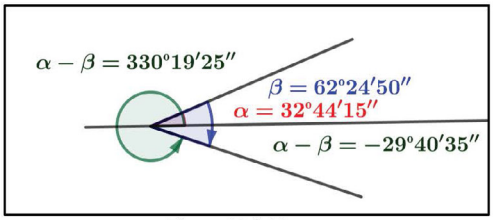


Figura 10.1.13

Outra solução seria subtrair de 360° o ângulo calculado no item b:

$$\begin{array}{r} 360^\circ 00' 00'' \\ -\ 29^\circ 40' 35'' \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 359^\circ 59' 60'' \\ -\ 29^\circ 40' 35'' \\ \hline 330^\circ 19' 25'' \end{array}$$

Pois, $\alpha - \beta = 360° - (\beta - \alpha) \Rightarrow$ (ver figura 10.1.13).

Definição 10.1.5 - Ângulos opostos pelo vértice: Dois ângulos são opostos pelo vértice, quando os lados de um deles são as respectivas semirretas (ou segmentos ou retas) opostas aos lados do outro. O ponto em comum é denominado de vértice.

Teorema 10.1.1: Dois ângulos opostos pelo vértices são congruentes.

Ver figura 10.1.14.

Demonstração: De acordo com a figura 10.1.15, x e y formam um ângulo raso, ou seja, $x + y = 180°$. Por outro lado, x e z, também formam um ângulo raso, $y + z = 180°$. Desse modo

$$\begin{cases} x + y = 180° \\ y + z = 180° \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = z}.$$

Da mesma forma, $z + w = 180° \Rightarrow \boxed{y = w}$.

Provando que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

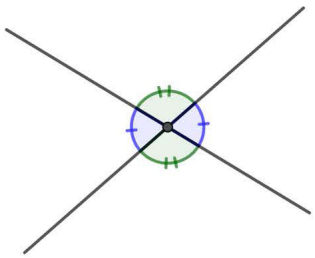


Figura 10.1.14

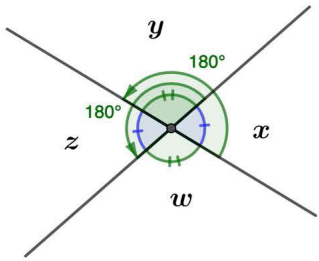


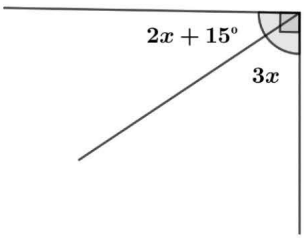
Figura 10.1.15

Definição 10.1.6 - Ângulos complementares: Dois ângulos são ditos complementares quando a soma de suas medidas é igual a 90°. Nesse caso, cada um é o complemento do outro. Exemplo: 30º e 60º são complementares.

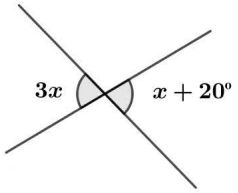
Definição 10.1.7- Ângulos suplementares: Dois ângulos são suplementares, quando a soma de suas medidas é igual a 180°. Nesse caso, cada um é o suplemento do outro. Exemplo: 178º e 2º são suplementares.

Exemplos: Vamos calcular as incógnitas nos seguintes casos

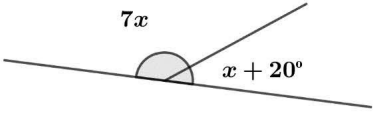
a)



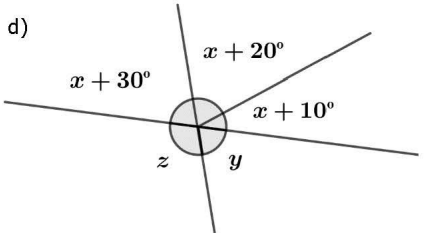
b)



c)



d)



Solução:

a) A soma dos ângulos $2x + 15°$ e $3x$ equivale a $90°$ (são complementares), então

$$2x + 15 + 3x = 90 \Rightarrow 5x = 90 - 15 \Rightarrow$$

$$5x = 75 \Rightarrow x = \frac{75}{5} \Rightarrow \boxed{x = 15°}.$$

b) Os dois ângulos assinalados são opostos pelo vértice e, desse modo, congruentes. Assim,

$$3x = x + 20 \Rightarrow 3x - x = 20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{x = 10°}.$$

c) A soma dos ângulos $7x$ com $x + 20°$ destacados é igual a $180°$ (são suplementares). Desse modo,

$$7x + x + 20 = 180 \Rightarrow 8x = 180 - 20 \Rightarrow$$

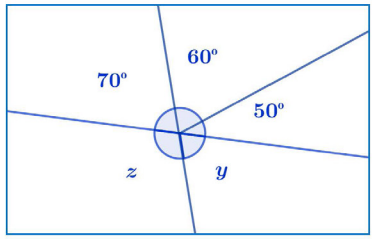
$$8x = 160 \Rightarrow x = \frac{160}{3} \Rightarrow \boxed{x = 20°}.$$

d) A soma dos três ângulos $x + 10°$, $x + 20°$ e $x + 30°$ dá $180°$, o que implica em

$$x + 10 + x + 20 + x + 30 = 180 \Rightarrow 3x + 60 = 180 \Rightarrow$$

$$3x = 180 - 60 \Rightarrow x = \frac{120}{3} = \boxed{x = 40°}.$$

Substituindo o valor $x = 40°$ na figura, teremos os ângulos a seguir.



Dessa maneira: $y = 70°$ e $z = 60° + 50° = 110°$.

EXERCÍCIOS 10.1

1)Converta os ângulos decimais em ângulos sexagesimais:

a) 14,2º
b) 36,65º
c) 128,425º
d) 0,2222...º

2)Converta os ângulos sexagesimais em ângulos decimais:

a) 3º25′
b) 15º40′5″
c) 135º25′25″
d) 180º0′15″

3)Efetue as operações com os seguintes ângulos sexagesimais:

a) $52^{o}34'18'' + 12^{o}24'12''$

b) $122^{o}24'38'' + 332^{o}19'26''$

c) $17^{o}34'28'' - 13^{o}54'26''$

d) $147^{o}24'22'' - 120^{o}14'31''$

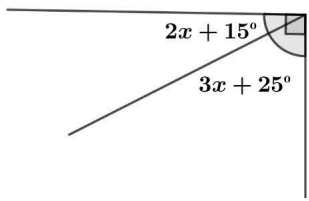
e) $1^{o}12'25'' - 15^{o}17'44''$

f) $30^{o}59'58'' - 31^{o}59'59''$

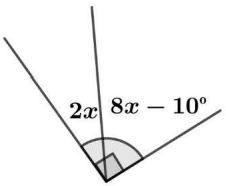
g) $102^{o}34'18'' + 98^{o}36'22'' - 45^{o}36'22'' - 155^{o}34'18''$

4)Calcule o valor das incógnitas nos seguintes casos:

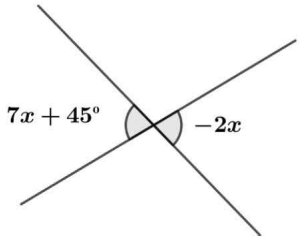
a)



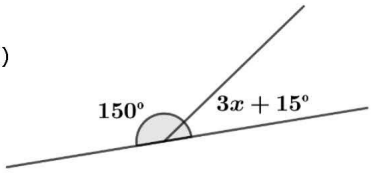
b)



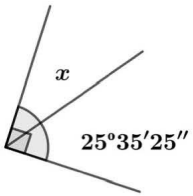
c)



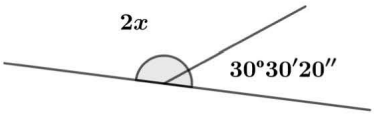
d)



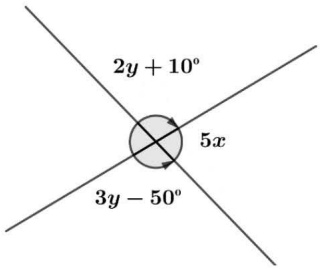
e)



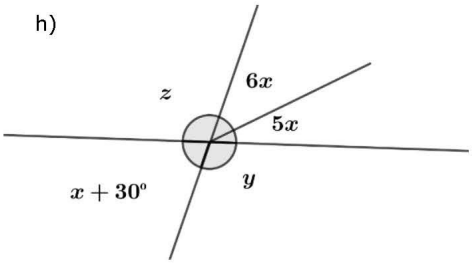
f)



g)



h)



10.2. Triângulos retângulos

Nesta seção, daremos início aos nossos estudos sobre triângulos, começando pela sua definição matemática e pelas definições de alguns dos seus elementos mais significativos. Posteriormente, abordaremos as relações métricas de um triângulo retângulo.

Definição 10.2.1: Triângulo é um polígono[3] que possui três ângulos internos (daí seu nome) ou três lados (pode ser chamado também de trilátero) – figura 10.2.1.

Além de três ângulos internos e três lados, um triângulo possui três vértices, três alturas e três medianas.

Definição 10.2.2: Vértices são os pontos de encontro dos lados de um triângulo. Ver figura 10.2.2.

Definição 10.2.3: Altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular à um lado do triângulo (ou ao seu prolongamento), traçado pelo vértice oposto. Conforme figura 10.2.3.

Definição 10.2.4: Mediana de um triângulo é um segmento de reta que divide o lado oposto em duas partes iguais. Ver figura 10.2.4.

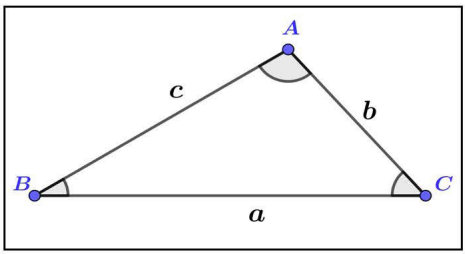


Figura 10.2.1

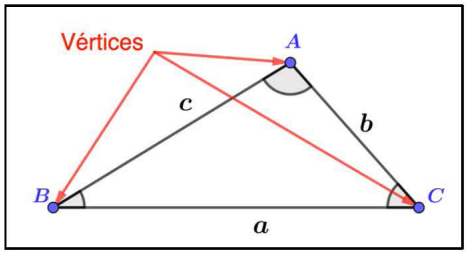


Figura 10.2.2

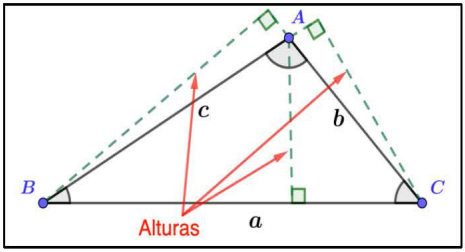


Figura 10.2.3

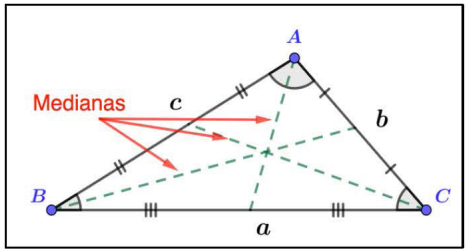


Figura 10.2.4

Estudaremos todos os tipos e classificações de triângulos, quanto ao lado e quanto ao ângulo, iniciando agora pelo triângulo retângulo.

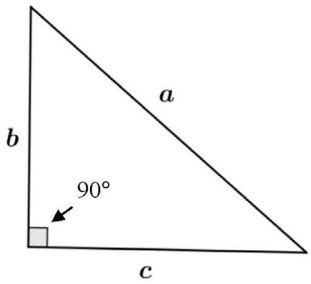
[3] Ver a definição 10.5.1 de polígono nesta unidade.

10.2.1. Relações métricas no triângulo retângulo

Definição 10.2.1.1: Um triângulo é dito retângulo quando possui um ângulo interno de 90º (ângulo reto).

Em todo triângulo retângulo vale o teorema de Pitágoras.

Teorema 10.2.1.1 (Teorema de Pitágoras): O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde:

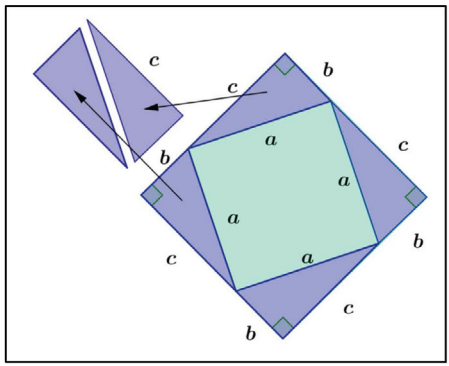
- a é a hipotenusa (fica à frente do ângulo de 90º).
- b e c são os catetos (demais lados).

Demonstração:

Na figura ao lado, temos dois quadrados, um inscrito no outro. O quadrado maior possui dimensões $b + c$ e o quadrado menor a.

Unindo os triângulos dois a dois da figura, formamos dois retângulos de área $b.c$.

A área do quadrado maior é $(b + c)^2$, que é igual a soma dos dois retângulos de área $b.c$ (formado com a união dos triângulos) mais o quadrado menor de área a^2. Portanto,



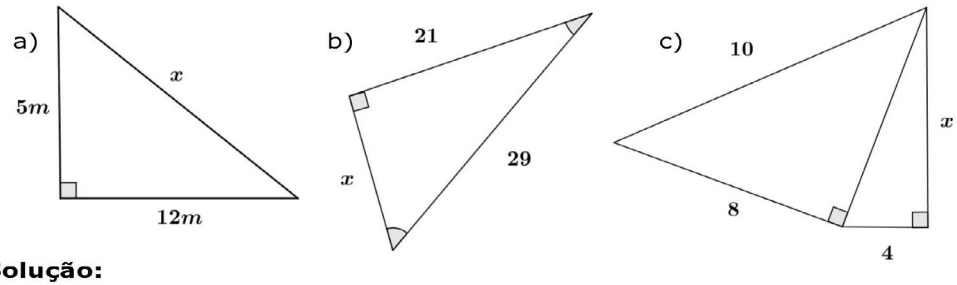
$$(b+c)^2 = b.c + b.c + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Importante observar que a recíproca do teorema também é verdadeira: Se o quadrado de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, então esse triângulo é retângulo. A demonstração desse fato está nas relações métricas de um triângulo qualquer – subseção 10.3.2.

SAIBA MAIS!

O teorema leva esse nome, mas não foi descoberto por Pitágoras (570 a.c - 495 a.c). Registros históricos revelam que os babilônios, egípcios e indianos já utilizavam essa expressão. Pesquise!

1º exemplo: Calcule o valor de x nos triângulos retângulo a seguir.



Solução:

a) De acordo com o triângulo, a hipotenusa é o lado de medida x (que está à frente do ângulo de 90°). Usando o teorema de Pitágoras, obtemos

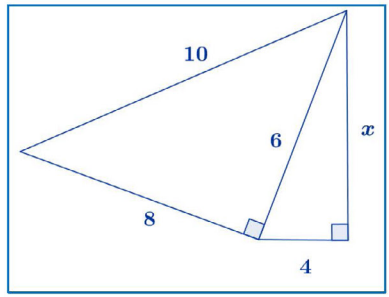
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 25 + 144 \Rightarrow x = \sqrt{169} \Rightarrow \boxed{x = 13\ cm}.$$

b) De acordo com o triângulo, a hipotenusa é o lado de medida 29 (está à frente do ângulo de 90°). Usando o teorema de Pitágoras, encontramos

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 29^2 = x^2 + 21^2 \Rightarrow 841 = x^2 + 441 \Rightarrow$$
$$-x^2 = 441 - 841 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \sqrt{169} \Rightarrow \boxed{x = 13\ u.c}.$$

c) Nomeando como y o lado do cateto que está ausente no triângulo superior esquerdo, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = 8^2 + y^2 \Rightarrow$$
$$y^2 = 100 - 64 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow$$
$$y = \sqrt{36} \Rightarrow \boxed{y = 6\ u.c}.$$



Colocando a informação da medida 6 no triângulo e aplicando novamente o teorema de Pitágoras, agora no triângulo inferior direito, dispomos de

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 6^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow$$
$$x^2 = 36 - 16 \Rightarrow x^2 = 20 \Rightarrow$$
$$x = \sqrt{20} \Rightarrow x = \sqrt{4.5} \Rightarrow$$
$$x = \sqrt{4}.\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{x = 2\sqrt{5}\ u.c}.$$

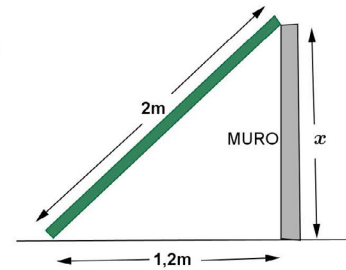
Utilizamos a expressão "u.c" para abreviar "unidades de comprimento". Essa terminologia é utilizada quando não está mencionada a unidade de medida (cm, m, km, etc.).

2º exemplo: Uma escada de 2 metros é encostada em um muro de forma que a distância do pé da escada ao muro é 1,20 m, conforme a figura. Qual a altura do muro?

Solução: Considerando como x o lado do cateto que está ausente no triângulo, temos

$$a^2 = b^2 + x^2 \Rightarrow 2^2 = 1{,}2^2 + x^2 \Rightarrow$$
$$4 = 1{,}44 + x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - 1{,}44 \Rightarrow$$
$$x^2 = 2{,}56 \Rightarrow x = \sqrt{2{,}56} \Rightarrow \boxed{x = 1{,}6m}.$$

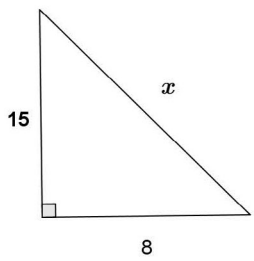
Resposta: A altura do muro é de 1,6 m.



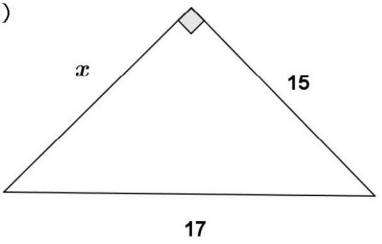
EXERCÍCIOS 10.2

1)Calcule o valor de x nos triângulos:

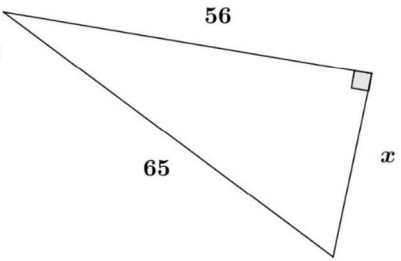
a)



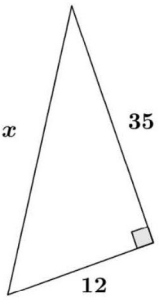
b)



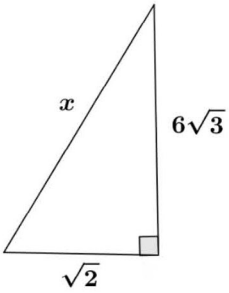
c)



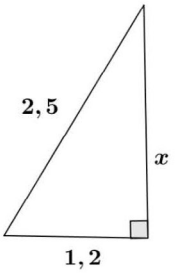
d)



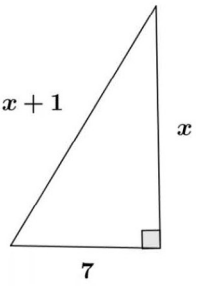
e)



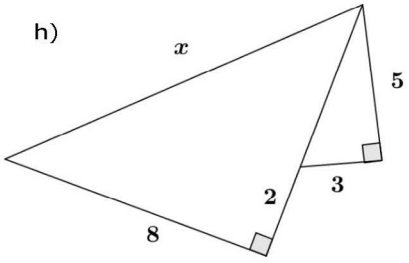
f)



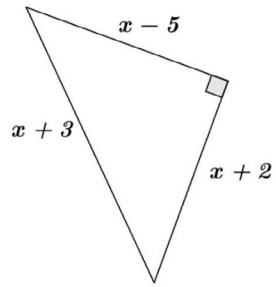
g)



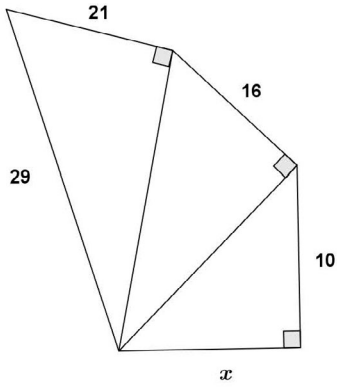
h)



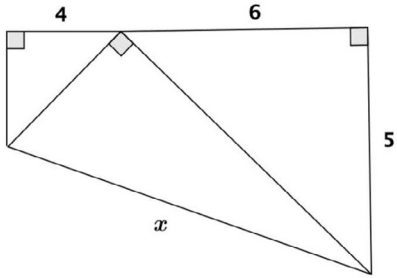
i)



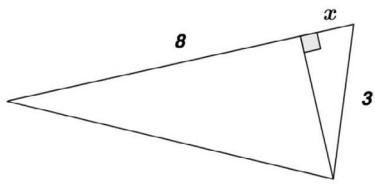
j)



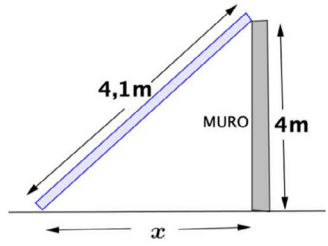
k)



l)



2)Uma escada de 4,1 metros de comprimento está apoiada na parte superior de um muro de 4,0 metros de altura. A que distância x do muro essa escada encontra-se apoiada?



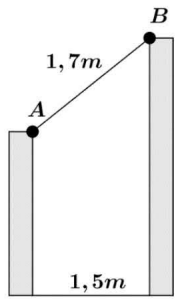
3)Um terreno retangular medindo 225m por 140m deverá ser dividido igualmente entre dois irmãos. Por algum motivo, decidiram dividir o terreno em sua diagonal. Se a cerca a ser utilizada deverá ter quatro fios de arame, quantos metros de arame no mínimo, serão necessários para cercar a diagonal desse terreno?

4)Um engenheiro agrônomo pretende construir um canteiro retangular para o plantio de hortaliças. O canteiro precisa ter 42 metros de comprimento e 40 metros de largura. Que estratégia o engenheiro deve adotar usando apenas uma trena (instrumento de medida de distância), para que o canteiro "esteja no esquadro", ou seja, para que cada canto tenha 90º?

5)(VUNESP) Duas estacas de madeira, perpendiculares ao solo e de alturas diferentes, estão distantes uma da outra 1,5 m. Será colocada entre elas uma outra estaca de 1,7 m de comprimento que ficará apoiada nos pontos A e B, conforme mostra a figura.

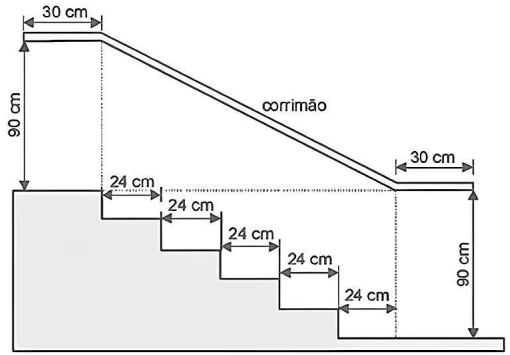
A diferença entre a altura da maior estaca e a altura da menor estaca, nessa ordem, em cm, é:

a) 95 b) 75 c) 85 d) 80 e) 90



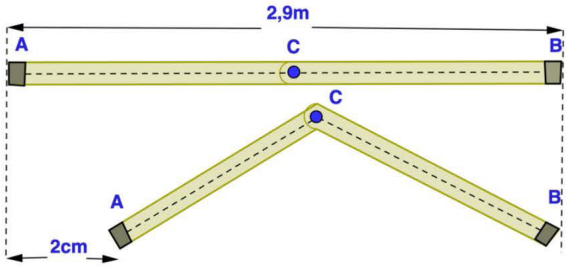
6)(ENEM) A figura representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão e igual a:

a) 1,8 m.
b) 1,9 m.
c) 2,0 m.
d) 2,1 m.
e) 2,2 m.



7)(OBMEP) Uma escada com 2,9 metros de comprimento e uma articulação central C possui a extremidade B fixa no chão e a extremidade A móvel, conforme a figura. A escada, inicialmente estendida no chão, foi dobrada de tal forma que a extremidade A deslizou 2 centímetros. A quantos centímetros do chão ficou a articulação C.

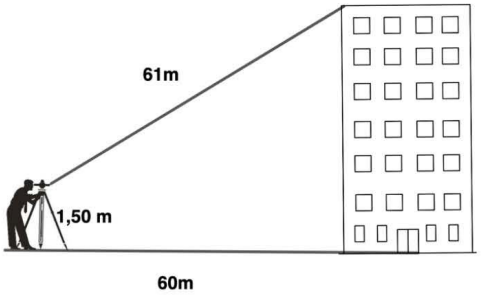
a)2
b)4
c)8
d)11
e)17



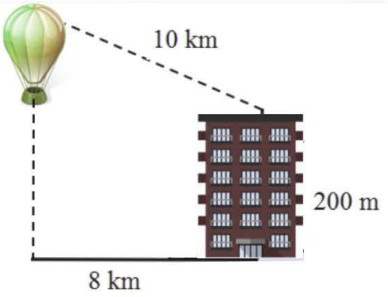
8)(ENEM) Diariamente, uma residência consome 20.160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome. Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

a) Retirar 16 células.
b) Retirar 40 células.
c) Acrescentar 5 células.
d) Acrescentar 20 células.
e) Acrescentar 40 células.

9) Um topógrafo pretende calcular a altura de um prédio. Para isso, posicionou uma estação total (equipamento que mede distâncias) a 1,50m do chão e a 60m do prédio. Em seguida, posicionou a luneta do equipamento em direção ao topo do prédio. Se o equipamento indicou uma distância de 61m (ver figura), qual a altura do prédio?

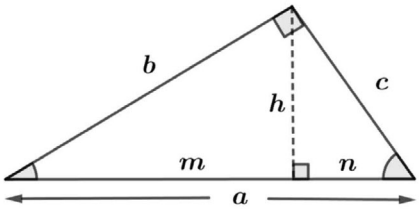


10)(UFLAVRAS) Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10 km?



10.2.2. Outras relações métricas no triângulo retângulo

Nesta subseção, estudaremos em detalhes as relações métricas de um triângulo retângulo utilizando a altura relativa à sua hipotenusa.



- a é a hipotenusa (fica à frente do ângulo de 90°).
- b e c são os catetos.
- h é a altura do triângulo (relativa à hipotenusa).
- n e m são as projeções. Em que n é a projeção do cateto c e m é a projeção do cateto b.

De imediato, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo de "fora" e nos dois triângulos menores, à esquerda e à direita, respectivamente:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2} \qquad \boxed{b^2 = h^2 + m^2} \qquad \boxed{c^2 = h^2 + n^2}$$

As demais fórmulas são:

$$\boxed{a = m + n} \qquad \boxed{b^2 = a.m} \qquad \boxed{c^2 = a.n} \qquad \boxed{h^2 = m.n} \qquad \boxed{a.h = b.c}$$

Demonstração:

Substituindo $b^2 = h^2 + m^2$, $c^2 = h^2 + n^2$ e $a = m + n$ em $a^2 = b^2 + c^2$, temos

$(m+n)^2 = h^2 + m^2 + h^2 + n^2$

$m^2 + 2.m.n + n^2 = 2h^2 + m^2 + n^2 \Rightarrow \boxed{h^2 = m.n}$.

A altura ao quadrado é igual ao produto das projeções.

Substituindo $h^2 = m.n$ em $b^2 = h^2 + m^2$, obtemos

$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow b^2 = m.n + m^2 \Rightarrow b^2 = \underbrace{(n+m)}_{a}.m \Rightarrow \boxed{b^2 = a.m}$.

Substituindo $h^2 = m.n$ em $c^2 = h^2 + n^2$, encontramos

$c^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow c^2 = m.n + n^2 \Rightarrow c^2 = \underbrace{(n+m)}_{a}.n \Rightarrow \boxed{c^2 = a.n}$.

O cateto ao quadrado é igual ao produto da hipotenusa por sua projeção.

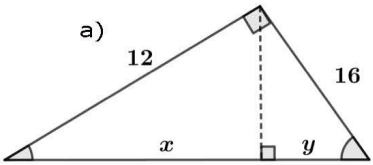
Por fim, se $b^2 = a.m \Rightarrow \boxed{m = \frac{b^2}{a}}$ e se, $c^2 = a.n \Rightarrow \boxed{n = \frac{c^2}{a}}$. Entretanto, $h^2 = m.n$, o que nos dá

$$h^2 = \frac{b^2}{a}.\frac{c^2}{a} \Rightarrow a^2.h^2 = b^2.c^2 \Rightarrow \boxed{a.h = b.c}.$$

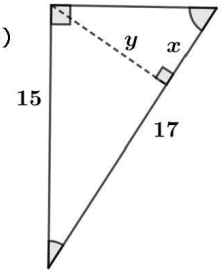
O produto da hipotenusa pela altura é igual ao produto dos catetos.

Exemplo: Calcular o valor de x e y nos triângulos a seguir.

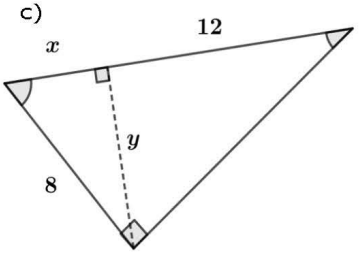
a)



b)



c)



Solução:

a)

$a^2 = 12^2 + 16^2$

$a^2 = 144 + 256$

$a^2 = 400$

$a = \sqrt{400} \Rightarrow \boxed{a = 20}$.

$b^2 = a.m$

$12^2 = 20.x$

$144 = 20x$

$20x = 144$

$x = \frac{144}{20} \Rightarrow \boxed{x = 7{,}2}$.

$c^2 = a.n$

$16^2 = 20.y$

$256 = 20y$

$20y = 256$

$y = \frac{256}{20} \Rightarrow \boxed{y = 12{,}8}$.

---

b)

$$17^2 = c^2 + 15^2 \Rightarrow c^2 = 289 - 225 \Rightarrow c^2 = 64 \Rightarrow c = \Rightarrow \boxed{c = 8}.$$

$$c^2 = a.n \Rightarrow 8^2 = 17.x \Rightarrow 64 = 17x \Rightarrow 17x = 64 \Rightarrow \boxed{x = \frac{64}{17}}.$$

$$c^2 = h^2 + n^2 \Rightarrow 8^2 = y^2 + \left(\frac{64}{17}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 64 - \frac{4096}{289} \Rightarrow$$

$$y^2 = 64 - \frac{4096}{289} \Rightarrow y^2 = 64 - \frac{4096}{289} \Rightarrow y^2 = \frac{14400}{289} \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{\frac{14400}{289}} \Rightarrow \boxed{y = \frac{120}{17}}.$$

Descubra outra forma de calcular y.

---

c)

$$h^2 = m.n \Rightarrow y^2 = x.12 \Rightarrow \boxed{y^2 = 12x} \ (1).$$

Usando o teorema de Pitágoras no triângulo da esquerda, podemos escrever

$$b^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow \boxed{8^2 = y^2 + x^2} \ (2).$$

Substituindo (1) em (2), encontramos

$$8^2 = 12x + x^2 \Rightarrow 64 = 12x + x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + 12x - 64 = 0} \Rightarrow (a = 1, b = 12 \ e \ c = -64).$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 12^2 - 4.1.(-64) = 144 + 256 \Rightarrow \boxed{\Delta = 400}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-12 \pm \sqrt{400}}{2.1} = \frac{-12 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{-12 + 20}{2} \Rightarrow \boxed{x = 4} \\ x'' = \frac{-12 - 20}{2} = -16 \ (não \ serve) \end{cases}$$

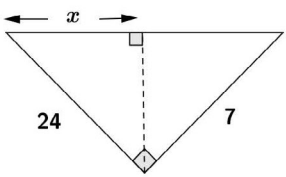
Substituindo $x = 4$ em (1), finalizamos com

$$y^2 = 12x \Rightarrow y^2 = 12.4 \Rightarrow y = \sqrt{48} \Rightarrow \boxed{y = 4\sqrt{3}}.$$

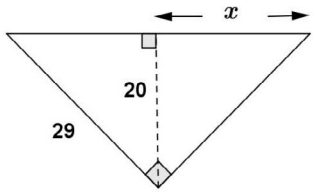
EXERCÍCIOS 10.3

1)Calcule o valor de x nos triângulos:

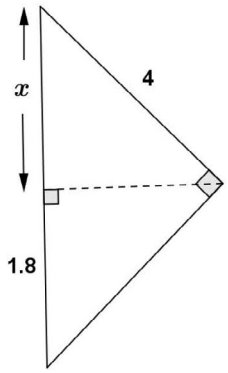
a)



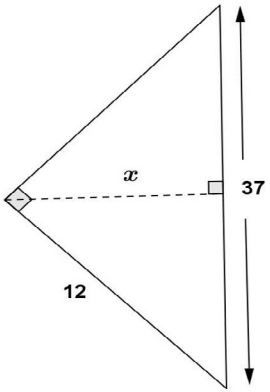
b)



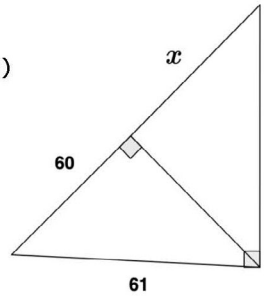
c)



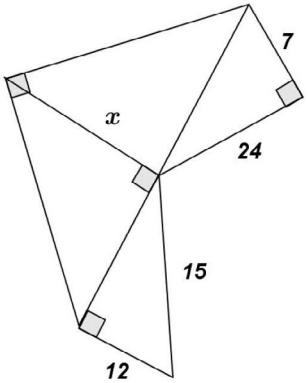
d)



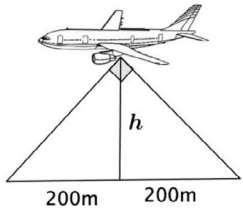
e)



f)

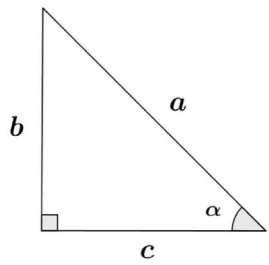


2)Um avião emite um sinal sob um ângulo de 90° para a torre de controle. De acordo com a altitude do avião o raio de abrangência aumenta ou diminui. Qual a altura h do avião quando o raio de abrangência for de 200 metros?



10.2.3. Seno, cosseno e tangente no triângulo retângulo

Definição 10.2.3.1: Seja um ângulo interno **α** de um triângulo retângulo de medidas a, b e c. Denominamos de $sen\alpha$ (lê-se: "seno de alfa"), $cos\alpha$ (lê-se: "cosseno de alfa") e $tg\alpha$ (lê-se: "tangente de alfa"), as seguintes relações:



$$sen\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$cos\alpha = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$tg\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{Cateto\ adjacente} = \frac{b}{c}$$

Onde o **cateto oposto** é o cateto que está à frente do ângulo em análise (α) e o **cateto adjacente** está ao lado do ângulo em análise (α).

A partir dessas definições, podemos demonstrar os seguintes teoremas.

Teorema 10.2.3.1: Em todo triângulo retângulo com um ângulo interno α, vale a seguinte relação para tangente desse ângulo:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Teorema 10.2.3.2 – Teorema fundamental da trigonometria: Em todo triângulo retângulo com um ângulo interno α, vale a seguinte relação entre o seno e cosseno desse ângulo:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

Demonstrações:

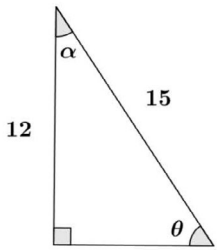
– Dividindo $tg\alpha = \frac{b}{c}$ por a, obtemos: $tg\alpha = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \boxed{\frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$.

– Dividindo o teorema de Pitágoras $a^2 = b^2 + c^2$ por a^2, encontramos

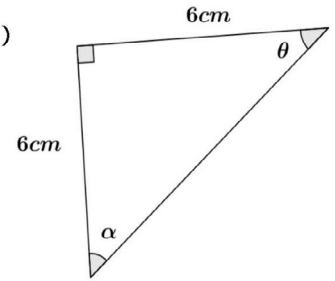
$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\overbrace{\frac{b}{a}}^{sen\alpha}\right)^2 + \left(\overbrace{\frac{c}{a}}^{cos\alpha}\right)^2 \Rightarrow \boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}.$$

Exemplo: Calcular o seno, cosseno e tangente dos ângulos α e θ que estão nas figuras:

a)



b)



Solução:

a)Para calcular seno, cosseno e tangente de algum dos ângulos, precisamos da outra medida (o outro cateto) do triângulo que está ausente. Para isso, vamos utilizar o teorema de Pitágoras.

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 15^2 = 12^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 225 - 144 \Rightarrow y^2 = 81 \Rightarrow$$

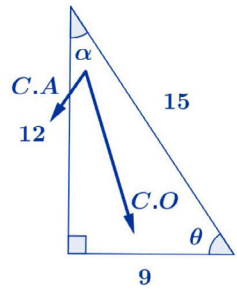
$$y = \sqrt{81} \Rightarrow \boxed{y = 9\,u.c}.$$

De acordo com α, o lado 9 é o cateto oposto (C.O), pois está à frente do ângulo. O lado 12 é o cateto adjacente (C.A), uma vez que está ao lado do ângulo. E o lado 15 é a hipotenusa, visto que está à frente do ângulo de 90°. Desse modo,

$$sen\alpha = \frac{C.O}{hip.} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

$$cos\alpha = \frac{C.A}{hip.} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$tg\alpha = \frac{C.O}{C.A} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$



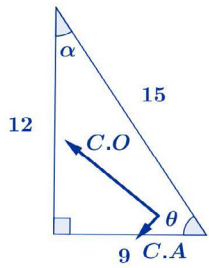
A tangente também pode ser calcula da seguinte forma,

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5}.\frac{5}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Veja também que vale o teorema fundamental da trigonometria:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow 0{,}6^2 + 0{,}8^2 = 0{,}36 + 0{,}64 = 1.$$

De acordo com θ, o lado 12 é o cateto oposto (C.O), pois está à frente do ângulo. O lado 9 é o cateto adjacente (C.A), uma vez que está ao lado do ângulo. E a hipotenusa é a mesma. Sendo assim,



$$sen\theta = \frac{C.O}{hip.} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

$$cos\theta = \frac{C.A}{hip.} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 06.$$

$$tg\theta = \frac{C.O}{C.A} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

É imediato observar que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do outro ângulo, e vice-versa. Isso se aplica a qualquer triângulo retângulo.

b) Nesse triângulo falta a medida da hipotenusa. Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 6^2 + 6^2 \Rightarrow a^2 = 36 + 36 \Rightarrow$$

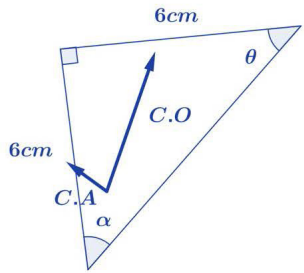
$$a^2 = 72 \Rightarrow a = \sqrt{72} \Rightarrow a = \sqrt{36.2} = \sqrt{36}.\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{a = 6\sqrt{2}\ cm}.$$

De acordo com α, um lado 6 é o cateto oposto (C.O), pois está à frente do ângulo, enquanto o outro lado 6 é o cateto adjacente (visto que está ao lado do ângulo). Assim,

$$sen\alpha = \frac{C.0}{hip.} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$cos\alpha = \frac{C.A}{hip.} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$tg\theta = \frac{C.O}{C.A} = \frac{6}{6} = 1.$$



O ângulo θ tem os mesmo valores de seno, cosseno e tangente, pois os catetos são iguais.

2º exemplo: Sabendo que o seno de um ângulo é $\frac{5}{13}$, calcule o cosseno e tangente.

Solução: O teorema fundamental da trigonometria nos dá a relação entre seno e cosseno de qualquer ângulo. Assim,

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \Rightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow$$

$$cos^2\alpha = \frac{169 - 25}{169} \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow cos\alpha = \sqrt{\frac{144}{169}} \Rightarrow \boxed{cos\alpha = \frac{12}{13}}.$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{13}.\frac{13}{12} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = \frac{5}{12} \cong 0{,}42}.$$

Consultando a tabela 2 – tabela trigonométrica – disponibilizada no final desse volume, esse ângulo é de aproximadamente 23° (confirme!).

Não há uma maneira prática de encontrar o valor de um ângulo, a partir do seno, cosseno ou tangente, sem a consulta de uma tabela ou recurso tecnológico. Porém, existem três ângulos: 30º, 45º e 60º que apresentam valores notáveis, e portanto, fáceis de identificar. Veja a tabela na subseção seguinte.

10.2.4. Tabela de ângulos notáveis

Ângulo:	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Demonstração:

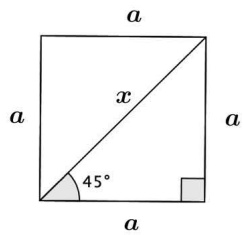
Um quadrado de lado a ao ser dividido ao meio por uma de suas diagonais, forma um ângulo de 45° entre essa diagonal e o lado (uma vez que é a bissetriz), conforme a figura a seguir.

Nesse contexto e de acordo com o teorema de Pitágoras, x é a hipotenusa e vale: $x^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow x = \sqrt{2a^2} \Rightarrow \boxed{x = a\sqrt{2}}$. Desse modo,

$$sen\ 45° = \frac{C.O}{hip.} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$cos\ 45° = \frac{C.A}{hip.} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$tg\ 45° = \frac{C.O}{C.A} = \frac{a}{a} \Rightarrow \boxed{tg\ 45° = 1}.$$

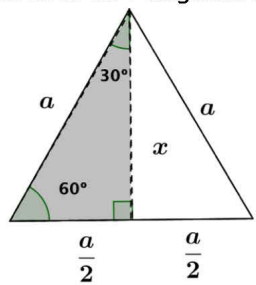


Vamos demonstrar agora, seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60° utilizando um triângulo equilátero de lado a. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo em destaque a seguir, dispomos de

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$x^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{4a^2 - 3a^2}{4} \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$



Portanto,

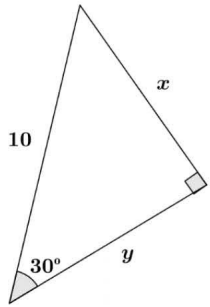
$$sen60° = \frac{x}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad cos60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad tg60° = \frac{x}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$$sen30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \boxed{\frac{1}{2}} \qquad cos60° = \frac{x}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad tg60° = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

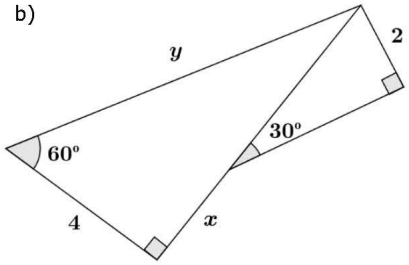
A partir das informações dessa tabela é possível resolver diversos problemas de geometria. Ao calcular o seno, cosseno e a tangente de um ângulo, por exemplo, e esse valor estiver na tabela, imediatamente saberemos de qual ângulo se trata. Se contrariamente, houver algum ângulo de 30º, 45º e 60º em algum problema geométrico, a partir dos valores de seno, cosseno e tangente da tabela, podemos resolvê-lo facilmente.

Exemplo: Calcular o valor de x e y nos triângulos a seguir.

a)



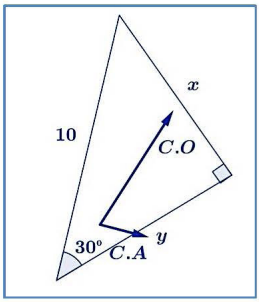
b)



Solução:

a) $sen30° = \frac{C.O}{hip.} = \frac{x}{10}$. Porém, $sen30° = \frac{1}{2}$ (ver tabela). Assim,

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow \boxed{x = 5\ u.c}.$$



Veja que $cos30° = \frac{C.A}{hip.} = \frac{y}{10}$. Mas, de acordo com a tabela, $cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, o que nos dá

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow \boxed{y = 5\sqrt{3}\ u.c}.$$

Podemos também calcular y usando o valor da $tg30°$. Veja a seguir.

$tg30° = \frac{C.O}{C.A} = \frac{x}{y}$. Todavia $tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (ver tabela) e $x = 5$. Logo,

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{y} \Rightarrow \sqrt{3}.y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{15}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{15\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{y = 5\sqrt{3}}.$$

De sorte, é possível calcular a tangente também utilizando o teorema de Pitágoras,

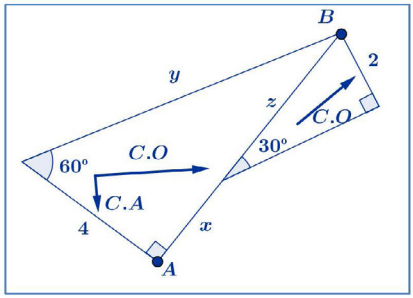
$$10^2 = 5^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 75 \Rightarrow y = \sqrt{25}.\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{y = 5\sqrt{3}}.$$

b) Para encontrar y, que é a hipotenusa, é preciso utilizar o cosseno. Pois, o cosseno relaciona o cateto adjacente 4 e com a hipotenusa que desejamos.

$$cos60° = \frac{C.A}{hip.} = \frac{4}{y}$$

Substituindo $cos60° = \frac{1}{2}$ da tabela, obtemos

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow \boxed{y = 8\,u.c}.$$



Denominando de z a medida que falta no segmento $\overline{AB}$, veja a figura ao lado, podemos escrever

$$sen30° = \frac{C.O}{hip.} = \frac{2}{z}$$

Substituindo $sen30° = \frac{1}{2}$ da tabela, encontramos

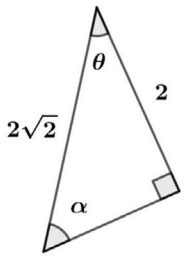
$$\frac{1}{2} = \frac{2}{z} \Rightarrow \boxed{z = 4}.$$

Por último, no triângulo maior, $tg60° = \frac{C.O}{C.A.} = \frac{x+z}{4}$. Como $tg60° = \sqrt{3}$ (ver tabela) e $z = 4$, finalizamos com

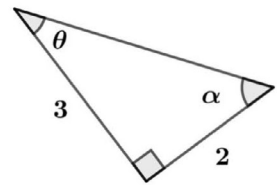
$$\sqrt{3} = \frac{x+4}{4} \Rightarrow 4\sqrt{3} = x + 4 \Rightarrow \boxed{x = 4(\sqrt{3} - 1)\,u.c}.$$

Exemplo: Calcular o valor de α e θ nos triângulos abaixo:

a)



b)



Solução:

a)

$sen\alpha = \frac{C.O}{hip.} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De acordo com a tabela de ângulos notáveis, $\boxed{\alpha = 45°}$.

$cos\theta = \frac{C.A}{hip.} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

De acordo com a tabela de ângulos notáveis, $\boxed{\theta = 45°}$.

b)

$tg\alpha = \frac{C.O}{C.A} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

Consultando a tabela trigonométrica no final do livro, encontramos $\boxed{\alpha \cong 56°}$.

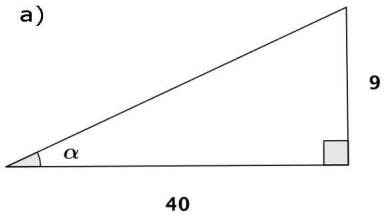
$tg\theta = \frac{C.O}{C.A} = \frac{2}{3} \cong 0{,}67$.

De acordo com a tabela trigonométrica no final do livro, vemos que: $\boxed{\theta \cong 34°}$.

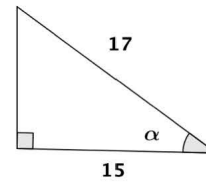
EXERCÍCIOS 10.4

1)Calcule o seno, cosseno e tangente do ângulo α e em seguida sua medida em graus. Consulte a tabela no final desse livro caso não seja um ângulo notável.

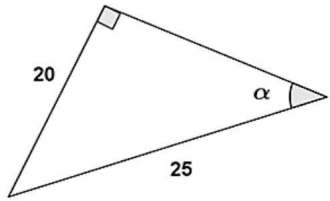
a)



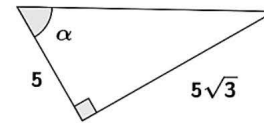
b)



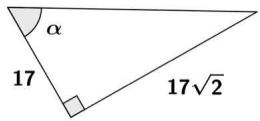
c)



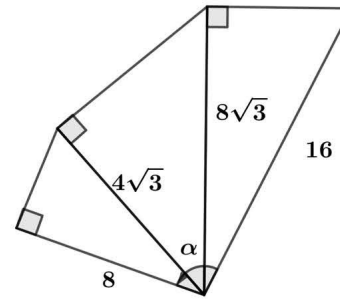
d)



e)

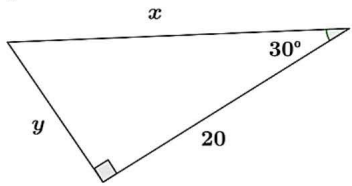


f)

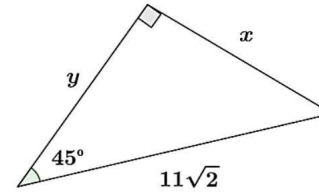


2) Calcular o valor de x e y nos triângulos abaixo:

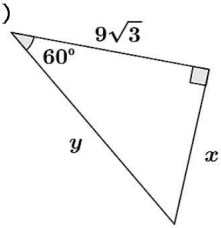
a)



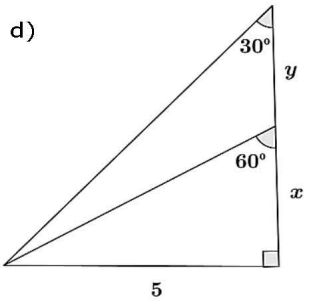
b)



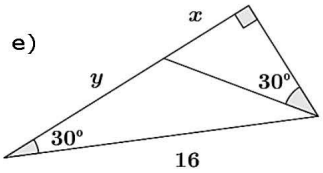
c)



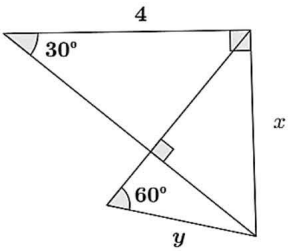
d)



e)

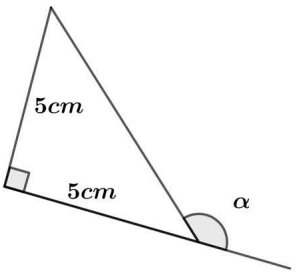


f)

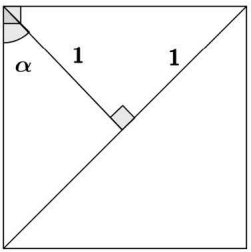


3)Calcule o ângulo α em cada caso.

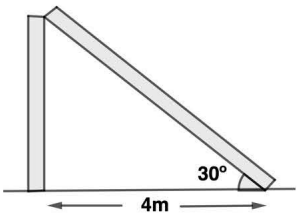
a)



b)



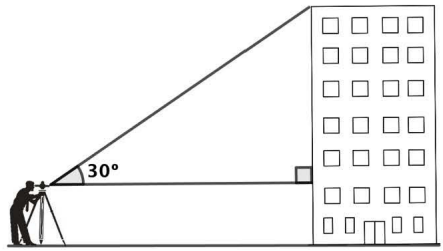
4)Um tronco de uma árvore sem a copa quebrou e caiu no solo a uma distância de 4 metros do seu pé, formando um ângulo de 30º (ver figura). Qual a altura desse tronco antes da queda?



5)(UFJF) Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento ótico para medir ângulos) a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, pode-se concluir que, dentre os valores adiante, o que MELHOR aproxima a altura do edifício, em metros, é (use os valores: sen30° = 0,5 cos30° = 0,866 tg30° = 0,577):

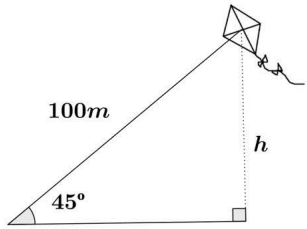
a) 112.
b) 115.
c) 117.
d) 120.
e) 124.

.



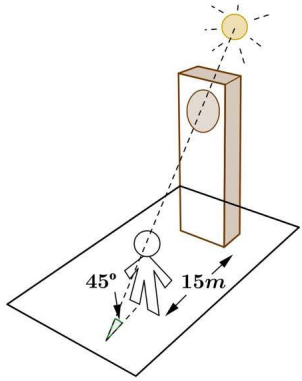
6)Uma pipa é presa de forma que a linha esticada forma um ângulo de 45º com o solo. O comprimento da linha é de 100m.

Qual a altura h da pipa?



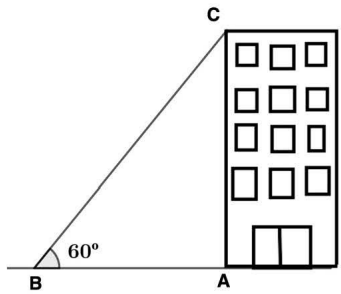
7)Numa tarde ensolarada e no dia em que o fenômeno do equinócio acontece em Macapá, um visitante com 2 metros de altura, vê o sol completamente no interior do círculo do monumento a uma distância de 15 metros, sob um ângulo de 45º com a horizontal, conforme a figura. A que altura aproximadamente, encontra-se o círculo do monumento do chão?

a) 13m b) 10m c) 17m d) 25m e) 30m



8) (PUCCAMP) Uma pessoa encontra-se num ponto A, localizado na base de um prédio, conforme mostra a figura adiante. Se ela caminhar 90 metros em linha reta, chegará a um ponto B, de onde poderá ver o topo C do prédio, sob um ângulo de 60°. Quantos metros ela deverá se afastar do ponto A, andando em linha reta no sentido de A para B, para que possa enxergar o topo do prédio sob um ângulo de 30°?

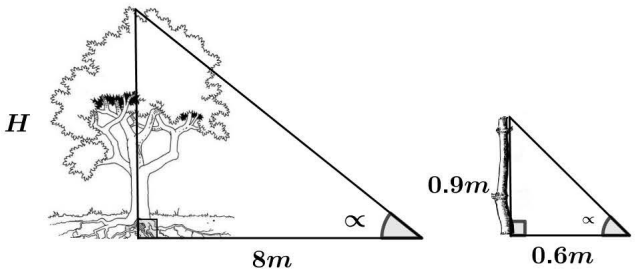
a) 150 b) 180 c) 270 d)300 e) 310



9) Em Dendrometria (um ramo das ciências florestais) alguns métodos dão bons resultados na medição de altura de árvores.

Fonte: (SILVA e NETO, 1979)

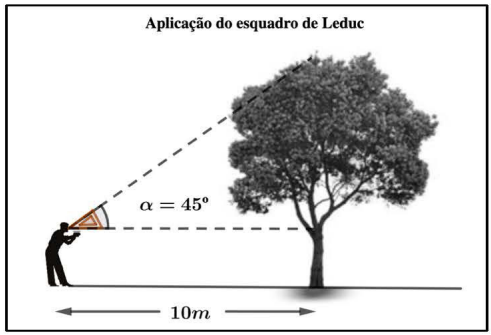
a) **Método das sombras:** O observador coloca perto da árvore, uma vara fixa ao chão em posição vertical. As sombras da árvore e da vara formam com o solo um mesmo ângulo (os raios solares são praticamente paralelos), dessa forma é possível calcular a altura aproximada da árvore.



Qual o valor da altura H da árvore na figura?

b) **Método do esquadro de Leduc:** O observador segurando o esquadro colocando-o junto à sua vista, procura visar o topo da árvore com uma linha divisada tirada pelo lado superior do esquadro.

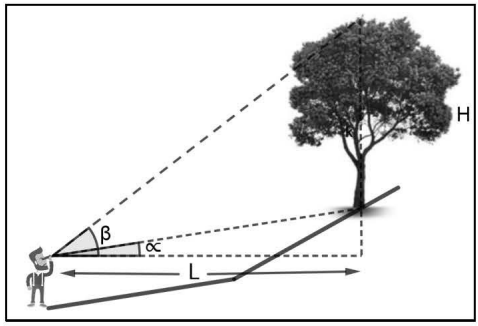
Um observador que tem 1,72 metros de altura, está a 10 metros de um árvore. Ele enxerga o topo dessa árvore, usando o esquadro, sob um ângulo de 45º. Qual é a altura dessa árvore?



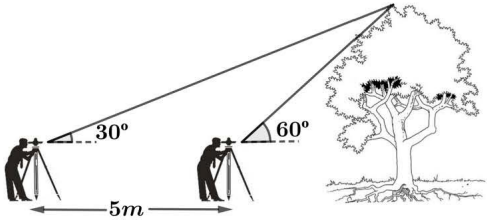
c) O **hipsômetro** é um instrumento usado para determinar a altura de árvores por triangulação, exemplos: hipsômetro de Merrit, de Christen, de Klausner, Faustmann, entre outros. Em todos esses hipsômetros há precisão em se medir a distância na horizontal, do observador até a árvore. Porém, há casos em que existe declividade no terreno (ver figura).

Sendo L a distância do observador até a árvore, mostre que a altura da árvore é dada por $H = L(tg\beta - tg\alpha)$.

Nesse contexto, qual a altura de uma árvore em que o observador está a uma distância de 10m e os ângulos β e α, são respectivamente, 60º e 30º?



10)Um topógrafo utiliza um teodolito de 1,60 m de altura para medir a altura de uma árvore. Inicialmente ele visualiza uma ângulo de 30º e em seguida anda 5 metros em direção a árvore, nesse ponto visualiza um novo ângulo de 60º (conforme a figura). Qual a altura da árvore?



11)Um topógrafo precisou medir a distância do ponto A ao ponto B onde havia um muro entre eles (ver figura 1). Para evitar erros de medição de comprimento, utilizou uma vara vertical de altura 12 m no ponto B e mediu a distância L do topo da vara ao ponto A usando a trena, conforme a figura 2.

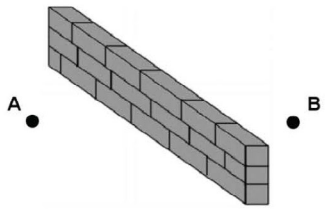


Figura 1

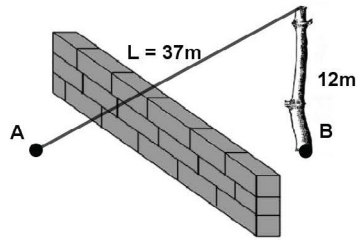


Figura 2

a) Qual a distância de A à B?

b) Sabendo que o muro é equidistante aos pontos A e B e a trena encosta na parte superior do muro, qual a altura do muro? Desconsidere a sua espessura.

12)(UNIRIO) O teodolito é um instrumento ótico usado principalmente por engenheiros civis e agrônomos para realizar medidas indiretas de grandes distâncias e alturas. Uma luneta, apoiada em um tripé, permite que um observador O mire em um referencial P e o teodolito indica o ângulo agudo θ que o segmento OP faz com o plano horizontal.

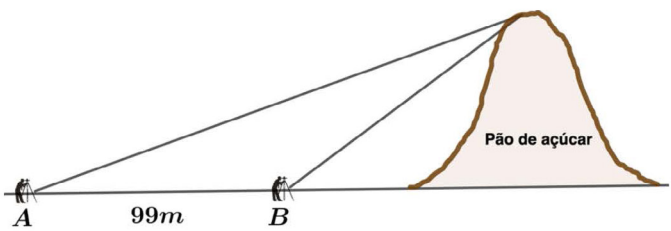
Um engenheiro usou o teodolito para medir a altura do Pão de Açúcar do seguinte modo:

a) Em um ponto A, o teodolito indicou um ângulo de 45º.

b) Em seguida o engenheiro foi em direção ao Pão de Açúcar até um ponto **B**, distante 99 metros de **A** e o teodolito indicou um ângulo cujo seno é 0,8.

Para calcular a altura do Pão de Açúcar, o engenheiro desprezou a distância da luneta do teodolito ao solo. A altura calculada foi:

a)384 metros.
b)388 metros.
c)392 metros.
d)396 metros.
e)400 metros.



10.3. Triângulos quaisquer

Nesta seção, abordaremos teoremas e informações importantes que se aplicam a qualquer triângulo.

10.3.1. Soma dos ângulos internos de um triângulo

Para demonstrarmos o valor da soma dos ângulos de um triângulo qualquer, precisamos da condição de paralelismo entre duas retas, conforme a definição e a proposição a seguir.

Definição 10.3.1.1: Considere duas retas distintas r e s são paralelas ($r \,//\, s$) e uma terceira reta t, chamada transversal, que intersecta r e s. Denominamos de:

- Ângulos alternos internos: Os ângulos que estão na figura 10.3.1.1;
- Ângulos alternos externos: Os ângulos que estão na figura 10.3.1.2.

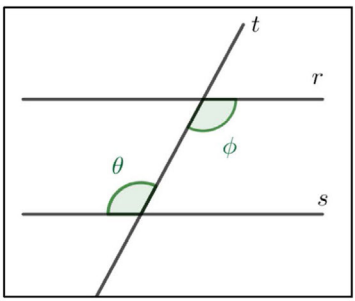


Figura 10.3.1.1 – Ângulos alternos internos

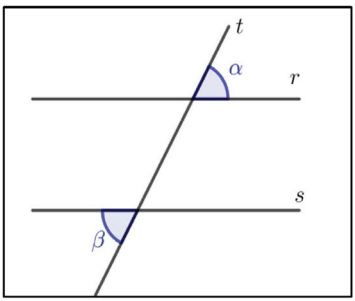


Figura 10.3.1.2 – Ângulos alternos externos

A expressão "alternos" denota que os ângulos ocupam posições alternadas em relação à reta transversal. A designação "internos" é atribuída aos ângulos situados entre as retas paralelas, enquanto "externos" refere-se àqueles que não se encontram entre as retas paralelas.

Proposição 10.3.1.1: Duas retas distintas r e s são paralelas ($r \,//\, s$) se, e somente se, uma terceira reta t, transversal, que intersecta r e s, determina ângulos alternos internos e externos congruentes.

Demonstração: Na figura 10.3.1.3, os ângulos β e β' são opostos pelo vértice, portanto, são congruentes. Nessa perspectiva, se o ângulo β' for menor (ou maior) que o ângulo α, teremos, inevitavelmente, um ponto de interseção entre as retas r e s, e assim, deixariam de ser paralelas por definição (ver figura 10.3.1.3). Imediatamente, as retas são paralelas quando tais ângulos são congruentes. Assim, $\alpha = \beta' = \beta$. Como consequência, se os ângulos são opostos pelo vértice, então todos os ângulos alternos (internos ou externos) correspondentes são congruentes (figura 10.3.1.4).

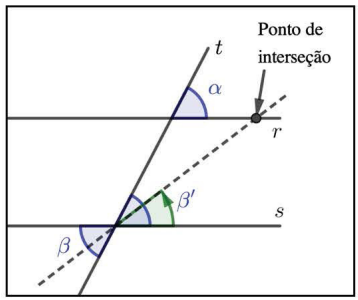


Figura 10.3.1.3

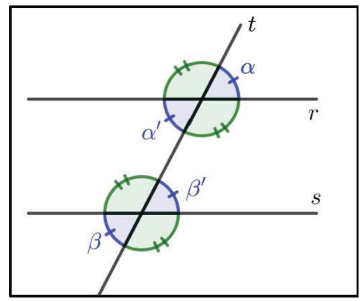
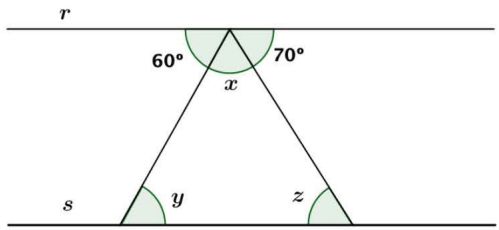


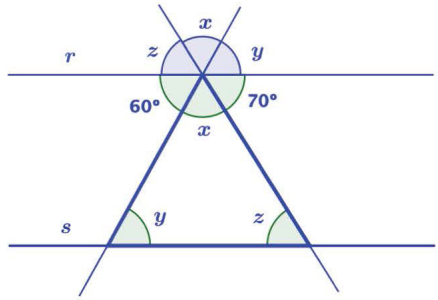
Figura 10.3.1.4

Exemplo: Sabendo que r // s, calcule x, y e z.



Solução: Prolongando os dois lados do triângulo conforme a figura a seguir, vemos que y e 60° são opostos pelo vértice, portanto, congruentes. Os ângulos z e 70° também são opostos pelo vértice, e também são congruentes. E os ângulos 60°, x e 70° formam juntos um ângulo de 180° (ângulo raso), o que nos dá $x = 50°$.

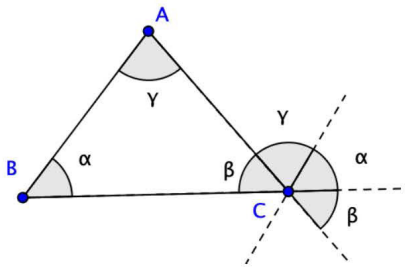
Resposta: $\boxed{z = 70°, y = 60° \; e \; x = 50°}$



Diante da proposição 10.3.1.1, podemos demonstrar o seguinte teorema.

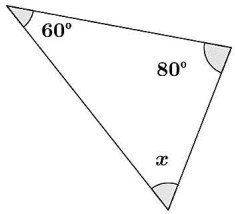
Teorema 10.3.1.1: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.

Demonstração: Na figura a seguir, foi traçada uma paralela de AB em C. Pela condição de paralelismo, o ângulo formado entre essa paralela e o prolongamento de BC é congruente a α. O ângulo entre a paralela e AC é γ e β é o ângulo oposto pelo vértice em C. Assim pela figura, a soma dos ângulos internos de um triângulo é $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, pois formam um ângulo raso.

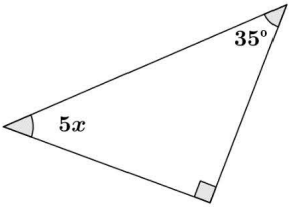


Exemplo: Determine o valor de x nos casos a seguir.

a)



b)



Solução:

a)

$60 + 80 + x = 180$

$140 + x = 180$

$x = 180 - 140$

$\boxed{x = 40°}$.

b)

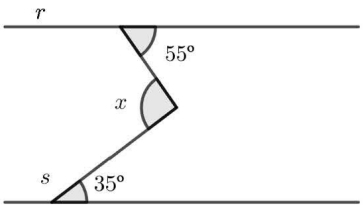
$90 + 35 + 5x = 180$

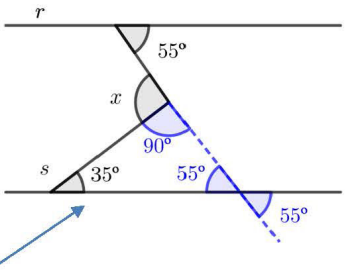
$125 + 5x = 180$

$5x = 180 - 125$

$x = \frac{55}{5} \Rightarrow \boxed{x = 11°}$.

2º exemplo: Sabendo que r // s, calcule x.





Solução:

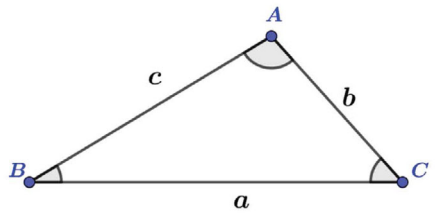
Prolongando um dos segmentos do ângulo x até a reta s, encontramos 55° como ângulo alterno externo e formamos um triângulo. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes, então um ângulo desse triângulo é 55°. O outro ângulo é 35° e o terceiro adjacente ao ângulo x mede 90°, uma vez que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°. O ângulo x e o ângulo de 90° formam um ângulo raso (180°), o que nos leva a concluir que x mede 90°.

10.3.2. Relações métricas (leis dos senos e dos cossenos)

Teorema 10.3.2.1: Em um triângulo qualquer conforme a figura a seguir, vale as seguintes relações (leis):

- **LEI DOS SENOS:**

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$



- **LEI DOS COSSENOS:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos\hat{A}$$

ou

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos\hat{B}$$

ou

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\hat{C}$$

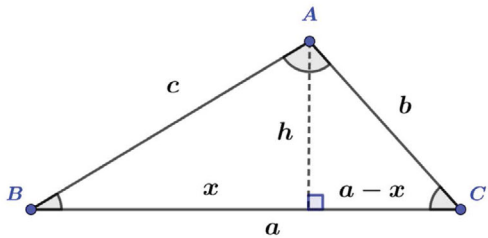
Notação: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, os ângulos nos vértices A, B e C.

Demonstrações:

Conforme o triângulo a seguir de altura h, dispomos de

$$sen\hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = sen\hat{B}.c \ (1).$$

$$sen\hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = sen\hat{C}.b \ (2).$$



De (1) e (2), constatamos que

$$\frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}.$$

De modo análogo, usando a outra altura relativa ao vértice B, encontramos

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{C}}.$$

O que nos dá, igualando as duas equações $\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}}$.

No mesmo triângulo, dispomos de

$$c^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow \boxed{h^2 = c^2 - x^2} \ (3).$$

$$b^2 = h^2 + (a-x)^2 \Rightarrow \boxed{h^2 = b^2 - (a-x)^2} \ (4).$$

De (3) e (4), inferimos que

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2 \Rightarrow c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{c^2 = b^2 - a^2 + 2ax} \ (5).$$

O triângulo retângulo da direita, nos dá

$$cos\widehat{C} = \frac{a-x}{b} \Rightarrow \boxed{x = a - b.cos\widehat{C}}\ (6).$$

Ao substituir o valor de x em (5) na expressão (6), concluímos que

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2a(a - b.cos\widehat{C}) \Rightarrow$$

$$c^2 = b^2 - a^2 + 2a^2 - 2ab.cos\widehat{C} \Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos\widehat{C}}.$$

De forma análoga, usando as alturas dos outros vértices, demonstram-se as demais fórmulas para os demais lados.

Informações importantes:

– O seno de um ângulo no triângulo retângulo é um caso particular da lei dos senos. Pois, como $sen90° = 1$, pela lei dos senos, temos

$$\frac{a}{sen90°} = \frac{c}{sen\widehat{C}} \Rightarrow sen\widehat{C} = \frac{c}{a}$$ (fórmula já conhecida no triângulo retângulo).

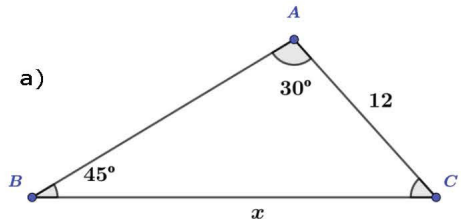
– No mesmo entendimento, podemos demonstrar de imediato o teorema de Pitágoras utilizando a lei dos cossenos, basta substituir $cos90° = 0$. Veja:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\underbrace{cos90°}_{0} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Isso prova também a recíproca do teorema de Pitágoras.

Exemplo: Calcular x nos itens a seguir.

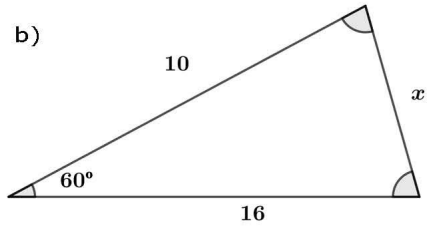
a)



Solução: Aplicando lei dos senos

$$\begin{matrix} Lado \rightarrow \\ Ângulo\ posto \rightarrow \end{matrix} \frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} \Rightarrow \frac{12}{sen45°} = \frac{x}{sen30°} \Rightarrow \frac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = 6\sqrt{2}}.$$

b)



Solução: Aplicando lei dos cossenos

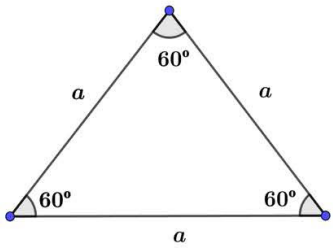
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosA \Rightarrow x^2 = 10^2 + 16^2 - 2.10.16.cos60° \Rightarrow$$

$$x^2 = 100 + 256 - 320.\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 356 - 160 \Rightarrow x^2 = 196 \Rightarrow x = \pm\sqrt{196} \Rightarrow \boxed{x = 14}.$$

Uma excelente aplicação dessas leis, está na demonstração das propriedades de um triângulo classificado quanto ao lado.

Um triângulo, quanto ao lado, pode ser classificado em:

◆ **Equilátero:** Quando possui os três lados congruentes e os três ângulos internos congruentes (e iguais a 60°).



Triângulo equilátero

Com efeito, se os lados três lados são congruentes, pela lei dos senos os três ângulos são congruentes, pois

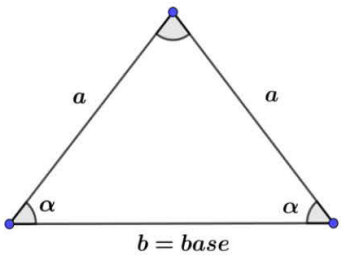
$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{a}{sen\hat{B}} = \frac{a}{sen\hat{C}} \Rightarrow sen\hat{A} = sen\hat{B} = sen\hat{C} \Rightarrow \boxed{\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}}$$

Reciprocamente, se os três ângulos são congruentes, pela lei dos senos, os três lados também são congruentes.

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{A}} = \frac{c}{sen\hat{A}} \Rightarrow \boxed{a = b = c}.$$

E é claro que, se a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° e esses ângulos são congruentes, então cada um mede 60°.

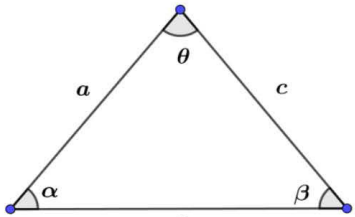
◆ **Isósceles**: Quando possui pelo menos dois lados congruentes e dois ângulos internos opostos a esses lados, também congruentes.



Triângulo isósceles

Denominamos o lado não congruente de base.

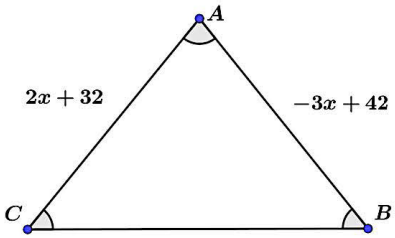
◆ **Escaleno**: Quando todos os lados não são congruentes e todos os ângulos internos não são congruentes.



Triângulo escaleno

Use o mesmo entendimento aplicado ao triângulo equilátero, para demonstrar as propriedades dos triângulos isósceles e escaleno.

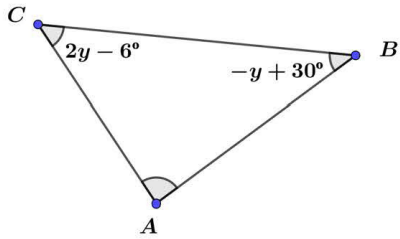
Exemplo: Calcule o valor de x no triângulo abaixo, sabendo que ele é isósceles de base $\overline{BC}$.



Solução: Como o triângulo é isósceles, os lados diferentes da base $\overline{BC}$ são congruentes. Assim,

$$2x + 32 = -3x + 42 \Rightarrow 2x + 3x = -32 + 42 \Rightarrow x = \frac{10}{5} \Rightarrow \boxed{x = 2}.$$

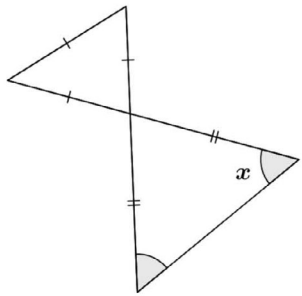
2º exemplo: Calcule o valor de y no triângulo abaixo, sabendo que ele é isósceles de base $\overline{BC}$.



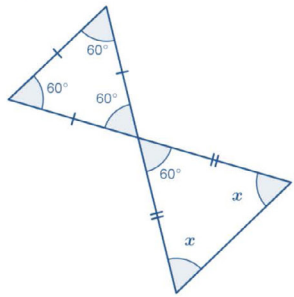
Solução: Já que o triângulo é isósceles, os ângulos opostos aos lados congruentes são também congruentes. Essa constatação nos dá,

$$-y + 30 = 2y - 6 \Rightarrow -3y = -6 - 30 \Rightarrow y = \frac{36}{3} \Rightarrow \boxed{y = 12°}.$$

3º exemplo: Calcule o valor de x na figura a seguir, sabendo que os segmentos com marcas iguais são congruentes.



Solução: Como as medidas com marcas iguais são congruentes, o primeiro triângulo é equilátero e cada ângulo mede 60°. Se os ângulos no ponto de encontro dos dois triângulos são opostos pelo vértice, então eles são também congruentes. Assim, um dos ângulos do segundo triângulo é 60°.



Todavia, os outros dois ângulos são também congruentes , já que o triângulo é isósceles. Denominando-os de x, temos

$$x + x + 60 = 180 \Rightarrow 2x = 180 - 60 \Rightarrow$$

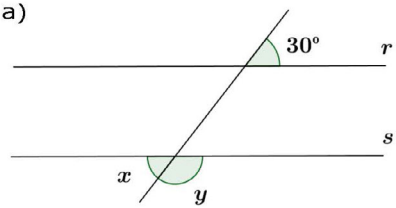
$$x = \frac{120}{2} \Rightarrow \boxed{x = 60°}.$$

O segundo triângulo também é equilátero.

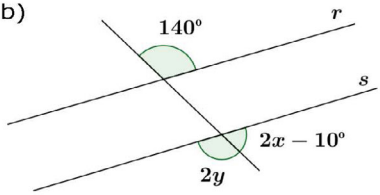
EXERCÍCIOS 10.5

1)Sendo r //s, calcule o valor de x e y nos casos:

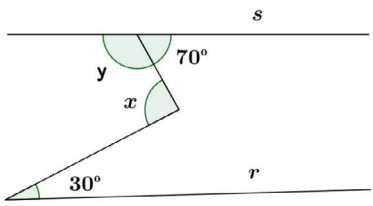
a)



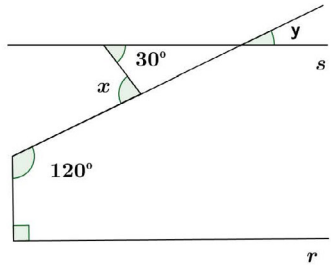
b)



c)

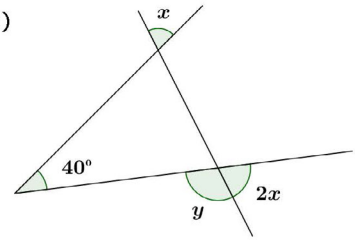


d)

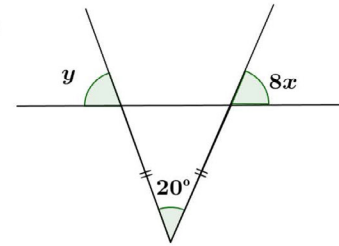


2)Calcule o valor de x e y, sabendo que segmentos com marcas iguais são congruentes:

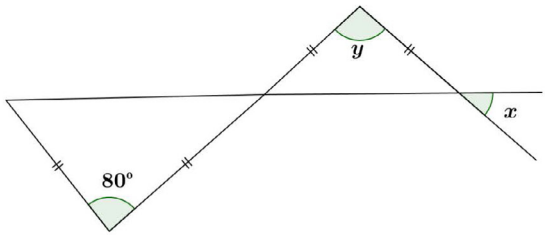
a)



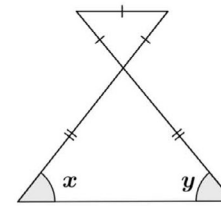
b)



c)

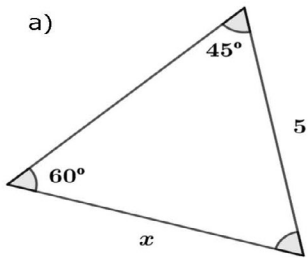


d)

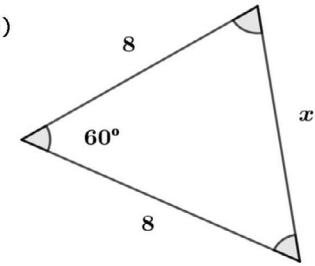


3) Calcular x nos casos:

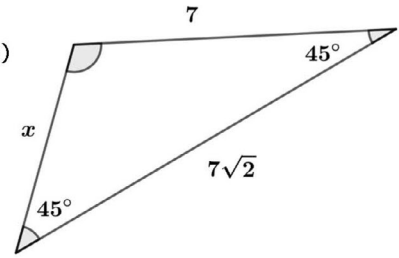
a)



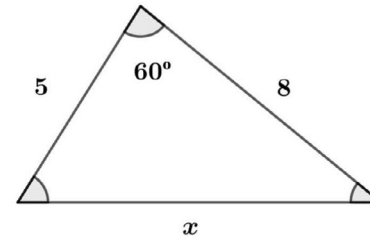
b)



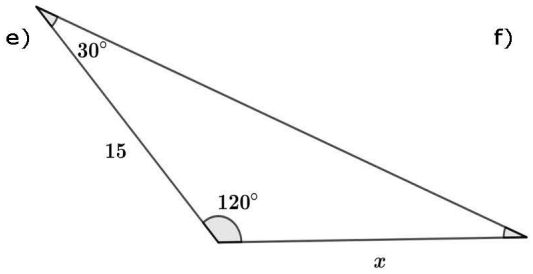
c)



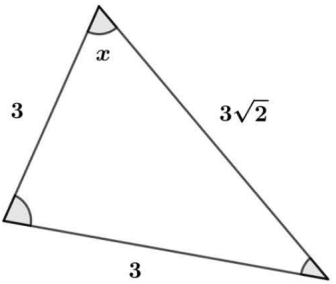
d)



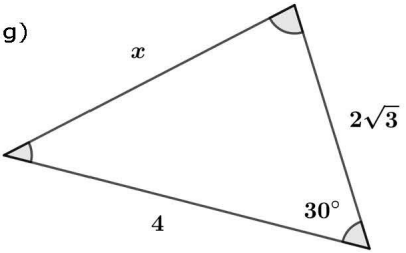
e)



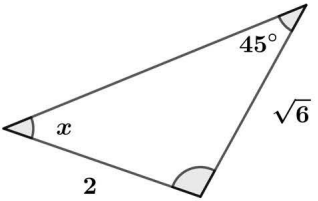
f)



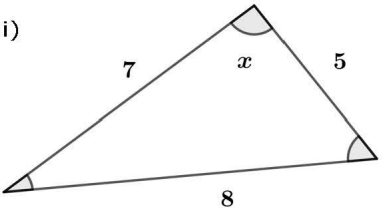
g)



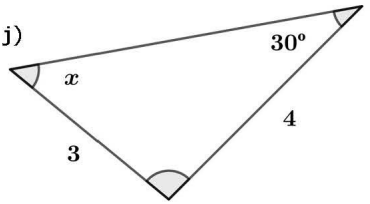
h)



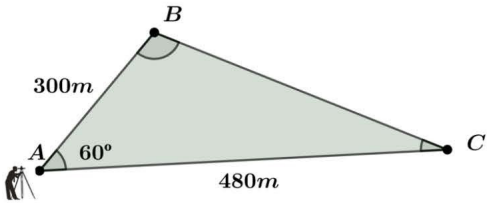
i)



j)



4)Um topógrafo posicionou uma estação total (instrumento que mede ângulos e distâncias), no ponto A de um terreno triangular. O equipamento acusou um ângulo de 60º e distâncias de 300m e 480m do ponto A, respectivamente, ao ponto B e ao ponto C, conforme a figura. Se a intensão é cercar esse terreno com rolos de arame farpado de 500m, quantos rolos no mínimo são necessários para 4 voltas?



10.3.3. Área de um triângulo qualquer

O conceito de área é definido na matemática como a quantidade de quadradinhos unitários que cambem dentro da figura de acordo com a unidade de medida adotada.

A figura mais simples é um retângulo. É elementar (pelo princípio multiplicativo) que a quantidade de quadradinhos que cabem em um retângulo que mede h de altura e base b, seja dado pelo produto entre eles: $b.h$. Como exemplo, veja no retângulo da figura 10.3.3.1, em que $b = 6cm$ e $h = 3cm$, que na figura cabem $6 \times 3 = 18cm^2$ (18 quadradinhos de $1cm^2$).

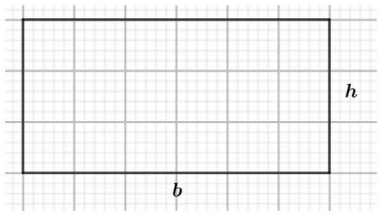


Figura 10.3.3.1

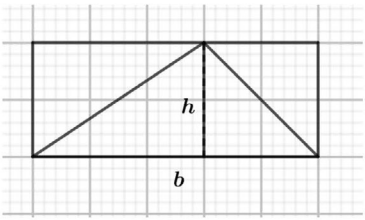


Figura 10.3.3.2

A área de um triângulo qualquer é a metade da área de um retângulo que possui mesma base e mesma altura.

Com efeito, traçando uma diagonal em qualquer retângulo ou duas diagonais, conforme a figura 10.3.3.2, a área do triângulo formado é a metade da área do retângulo.

Em consequência dessa constatação, podemos anunciar as fórmulas para cálculo de área de triângulo.

Seja um triângulo qualquer conforme a figura 10.3.3.3, sua área pode ser calculada a partir das medidas da base e altura:

$$A = \frac{a \,.\, h}{2}$$

Base vezes a altura dividido por 2.

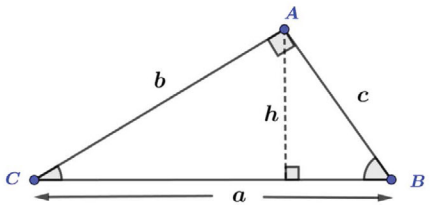


Figura 10.3.3.3

Usando dois lados e um ângulo entre eles:

$$A = \frac{b.c.sen\widehat{A}}{2} \qquad A = \frac{a.c.sen\widehat{C}}{2} \qquad A = \frac{b.a.sen\widehat{B}}{2}$$

Usando somente os lados com a fórmula de Héron (10 d.c 70 d.c):

$$p = \frac{a+b+c}{2} \Longrightarrow A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Demonstrações: Pela figura 10.3.3.3, temos que $sen\widehat{B} = \frac{h}{c}$. Assim,

$$A = \frac{a.h}{2} = \frac{a.(c.sen\widehat{B})}{2} = \boxed{\frac{a.c.sen\widehat{B}}{2}}.$$

A área de um triângulo é igual a metade do produto de dois lados pelo seno do ângulo entre eles.

De forma análoga, demonstra-se as demais fórmulas com as demais alturas.

Quanto a fórmula de Héron, temos que

$$A = \frac{a.c.Sen\widehat{B}}{2} \Rightarrow \boxed{sen\widehat{B} = \frac{2A}{a.c}} \ (1).$$

E de acordo com a lei dos cossenos,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.cos\widehat{B} \Rightarrow \boxed{cos\widehat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2.a.c}} (2).$$

Entretanto, o teorema fundamental da trigonometria, diz que

$$\boxed{sen^2\widehat{B} + cos^2\widehat{B} = 1} \ (3).$$

Ao substituir (1) e (2) em (3), obtemos

$$\left(\frac{2A}{a.c}\right)^2 + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2.a.c}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{4A^2}{a^2.c^2} + \frac{(c^2 + a^2 - b^2)^2}{4.a^2.c^2} = 1 \Rightarrow \frac{16A^2 + (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4.a^2.c^2} = 1$$

$$16A^2 = 4.a^2.c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 \Rightarrow$$

$$16A^2 = (2.a.c + (c^2 + a^2 - b^2)).(2.a.c - (c^2 + a^2 - b^2))$$

$$16A^2 = (2.a.c + c^2 + a^2 - b^2).(2.a.c - c^2 - a^2 + b^2)$$

$$16A^2 = ((a + c)^2 - b^2).(b^2 - (a - c)^2)$$

$$16A^2 = (b + a + c)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)$$

$$A^2 = \frac{(c + a + b)(a + c - b)(b + a - c)(c - a + b)}{16}$$

$$A^2 = \frac{(c + a + b)}{2}.\frac{(a + c - b)}{2}.\frac{(b + a - c)}{2}.\frac{(b + c - a)}{2}$$

$$A^2 = \frac{(a + b + c)}{2}.\frac{(a + b + c - 2c)}{2}.\frac{(a + b + c - 2b)}{2}.\frac{(a + b + c - 2a)}{2}$$

$$A^2 = \frac{(a + b + c)}{2}.\left(\frac{(a + b + c)}{2} - \frac{2c}{2}\right).\left(\frac{(a + b + c)}{2} - \frac{2b}{2}\right).\left(\frac{(a + b + c)}{2} - \frac{2a}{2}\right)$$

$$A^2 = \frac{(a + b + c)}{2}.\left(\frac{(a + b + c)}{2} - c\right).\left(\frac{(a + b + c)}{2} - b\right).\left(\frac{(a + b + c)}{2} - a\right)$$

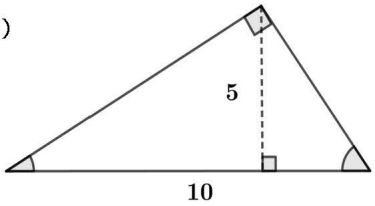
Como:

$$p = \frac{a + b + c}{2} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}.$$

A expressão $\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}}$ é denominada de semiperímetro.

Exemplo: Calcular a área dos triângulos a seguir.

a)

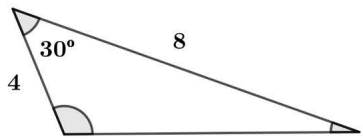


Solução:

$$A = \frac{a.h}{2} = \frac{5.10}{2} \Rightarrow \boxed{A = 25\ u.a}.$$

Utilizamos a expressão "u.a" para abreviar "unidades de área". Essa terminologia é adotada quando não está mencionada a unidade de medida (cm, m, km, etc.).

b)

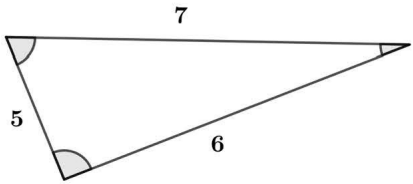


Solução: O triângulo possui dois lados e um ângulo entre eles. Logo, devemos usar:

$$A = \frac{b.c.sen\hat{A}}{2}.$$

$$A = \frac{4.8.sen30°}{2} = \frac{32}{2}.\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A = 8\ u.a}$$

c)



Solução: Há três medidas e não há ângulo, usaremos então a fórmula de Heron:

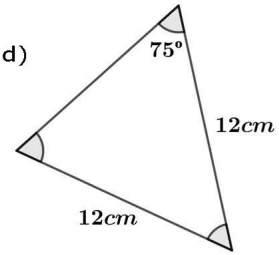
$$p = \frac{7+5+6}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$A = \sqrt{9(9-7)(9-5)(9-6)}$$

$$A = \sqrt{9.2.4.3} \Rightarrow \boxed{A = 6\sqrt{6}\ u.a}.$$

d)

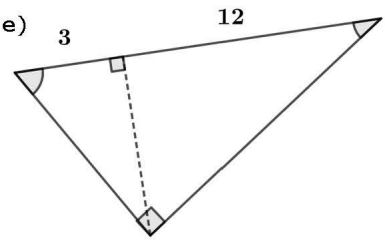


Solução: Precisamos de duas medidas e um ângulo entre essas medidas. Como o triângulo é isósceles (dois lados congruentes), o ângulo $\hat{C} = \hat{A} = 75°$ e o ângulo $\hat{B}$ é 30° (pois, a soma deve ser 180°). Então, a área do triângulo é

$$A = \frac{12.12.sen\hat{B}}{2} = \frac{12.12.sen30°}{2} = \frac{144}{2}.\frac{1}{2} = \frac{144}{4} \Rightarrow$$

$$A = \boxed{36cm^2}.$$

e)



Solução: Os valores 3 e 12 são projeções (o triângulo é retângulo), assim sua altura é

$$h^2 = m.n = \sqrt{3.12} \Rightarrow \boxed{h = 6\ u.c}$$

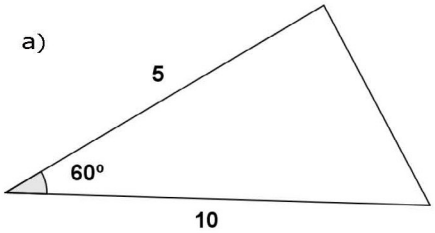
E a área é

$$A = \frac{a.h}{2} = \frac{15.6}{2} \Rightarrow \boxed{A = 45\ u.a}.$$

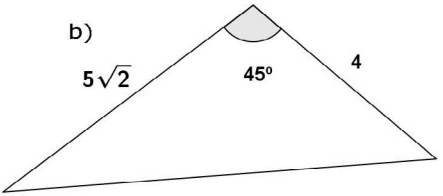
EXERCÍCIOS 10.6

1) Calcular a área dos triângulos a seguir.

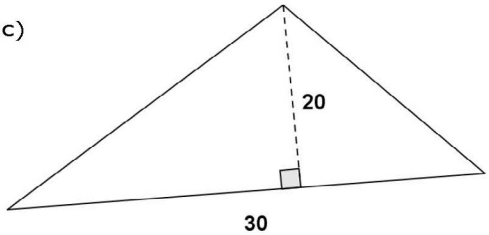
a)



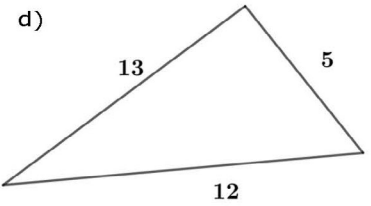
b)



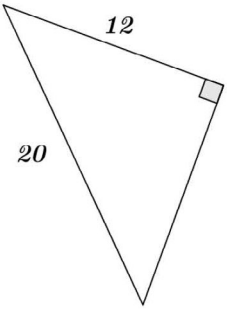
c)



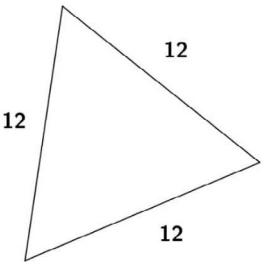
d)



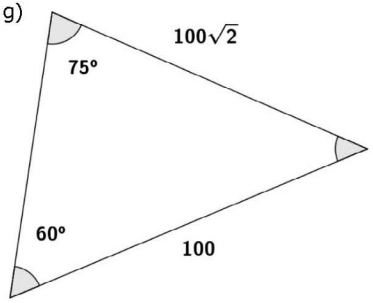
e)



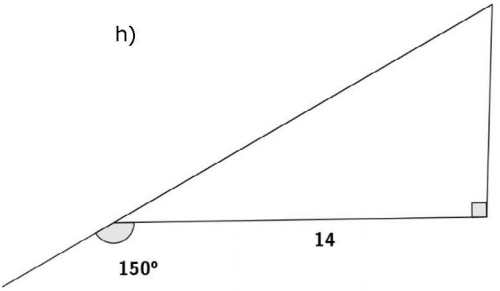
f)



g)

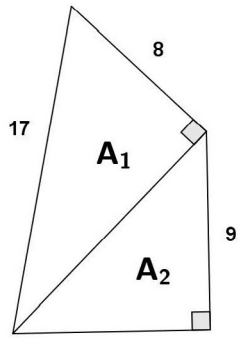


h)

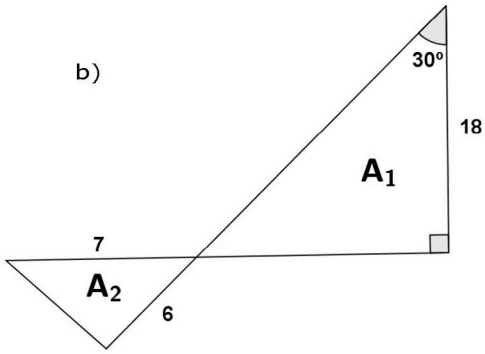


2)Calcule a soma das áreas $A_1 + A_2$, nas figuras a seguir.

a)

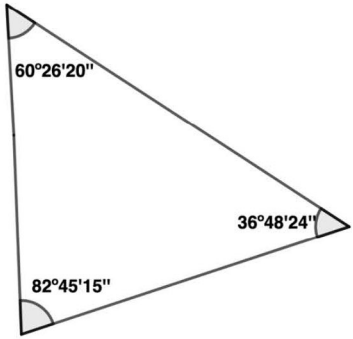


b)



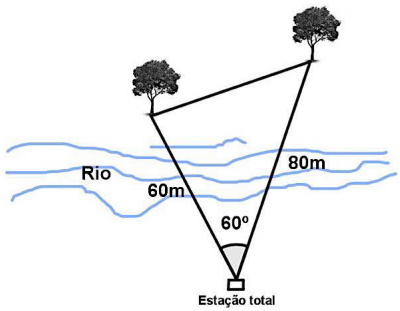
3) A estação total ou taqueômetro é um equipamento eletrônico concebido pela junção de dois instrumentos topográficos: o teodolito (que mede ângulos) e o distanciômetro (que mede distâncias). Alguns equipamentos de estação total mais modernos utilizam também GPS.

a) Um topógrafo ao fazer um levantamento de um terreno triangular obteve junto a esse equipamento os ângulos internos que estão na figura a seguir. Calcule o erro entre a medida real dos ângulos e o apresentado no equipamento.

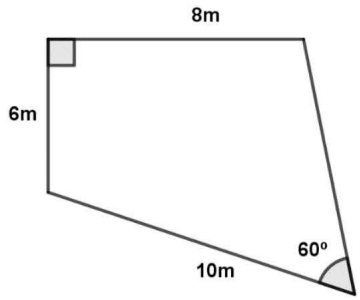


b) Utilizando esse equipamento em outro terreno triangular obteve as seguintes medidas de lado: 130m, 140m e 150m. Calcule a área desse terreno.

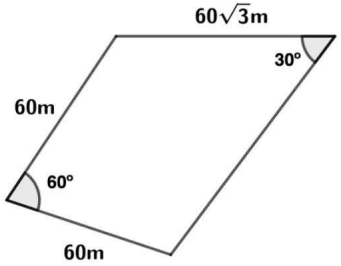
c) Um topógrafo usando a estação total (sem o prisma), deseja saber a distância entre duas árvores que estão no outro lado do rio, de difícil acesso. O equipamento forneceu as informações que estão na figura a seguir. Qual a distância entre as árvores?



d) Usando esse equipamento, um engenheiro obteve as dimensões e os ângulos internos de um terreno que está na figura. Qual a área do terreno?



e) Ainda com o mesmo equipamento, outro engenheiro agrônomo mediu uma propriedade poligonal e obteve as dimensões e os ângulos internos que estão na figura. Qual a área dessa propriedade?



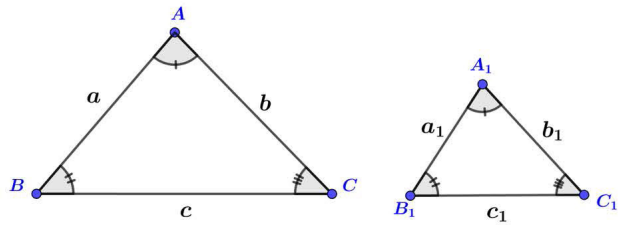
4)Um agricultor possui apenas duas ferramentas: uma trena (que mede distâncias) e uma calculadora que possui apenas as quatros operações e a raiz quadrada. Ele precisa calcular a área do seu terreno para o cálculo de adubo e sementes. Se o terreno é um quadrilátero qualquer (ou seja, não é quadrado, não é retângulo, etc.) que estratégia ele deve adotar para o cálculo dessa área, utilizando apenas essas duas ferramentas? Exemplifique.

10.3.4. Semelhança de triângulos e Teorema de Tales

Definição 10.3.4.1: Dois triângulos são ditos semelhantes quando possuem os ângulos internos ordenadamente congruentes ou lados ordenadamente proporcionais.

Matematicamente:

- $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$, $\hat{C} \equiv \hat{C}_1$
- $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$



Usamos a notação: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, para dizer que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A_1B_1C_1$.

Vamos demonstrar que uma afirmação implica na outra, isto é:

- Se um triângulo possui ângulos ordenadamente congruentes, então possui lados ordenadamente proporcionais.

Com efeito, pela lei dos senos nos dois triângulos, temos

$$\boxed{\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}}\ (1) \quad e \quad \boxed{\frac{a_1}{sen\hat{A}_1} = \frac{b_1}{sen\hat{B}_1} = \frac{c_1}{sen\hat{C}_1}}\ (2).$$

Como $\hat{A}_1 \equiv \hat{A}$, $\hat{B} \equiv \hat{B}_1$ e $\hat{C} \equiv \hat{C}_1$, obtemos em (2):

$$\boxed{\frac{a_1}{sen\hat{A}} = \frac{b_1}{sen\hat{B}} = \frac{c_1}{sen\hat{C}}}\ (3)$$

Agora, dividindo (1) por (3), concluímos que $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

- Se um triângulo possui lados ordenadamente proporcionais, então possui ângulos ordenadamente congruentes.

De fato, se

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k \Rightarrow \boxed{\frac{a^2}{a_1{}^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2} = k^2}\ (4).$$

Usando a lei dos cossenos no triângulo $\Delta A_1B_1C_1$, temos

$$\boxed{a_1{}^2 = b_1{}^2 + c_1{}^2 - 2.b_1.c_1.cos\hat{C}_1}\ (5).$$

Multiplicando tudo por k^2, constatamos que

$$\underbrace{k^2.a_1{}^2}_{a^2} = \underbrace{k^2.b_1{}^2}_{b^2} + \underbrace{k^2.c_1{}^2}_{c^2} - 2.\underbrace{k.b_1}_{b}.\underbrace{k.c_1}_{c}.cos\hat{C}_1$$

Essa é a lei dos cossenos aplicada ao triângulo ΔABC: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosC$. O que implica em $cos\hat{C}_1 = cosC$ e $\hat{C}_1 = C$ (já que $0° < \hat{C}_1 = C < 180°$).

De forma análoga demonstra-se a igualdade para os demais lados e ângulos.

A mesma proporção k existente entre os lados dos triângulos semelhantes se

mantém para quaisquer outros segmentos internos, como as medianas, as mediatrizes e as alturas dos triângulos, ordenadamente.

Vamos demonstrar essa proporção para as alturas dos vértices A e A_1 (da figura anterior) e as demais alturas, medianas e mediatrizes, ficam como exercício para o leitor.

Aplicando a lei senos nos triângulos, temos

$$\Delta ABC \Rightarrow \boxed{\frac{a}{sen90°} = \frac{h}{senB}}(1) \; e \; \boxed{\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{a_1}{sen90°} = \frac{h_1}{sen\widehat{B}_1}}(2)$$

Dividindo (1) por (2) e substituindo: sen90º = 1, $sen\widehat{B}_1 = senB$ e $\frac{a}{a_1} = k$, encontramos

$$\frac{a}{a_1} = \frac{h}{h_1} = k.$$

Outra relação importante entre os triângulos semelhantes está na relação entre as suas áreas. Veja o teorema a seguir.

Teorema 10.3.4.1: A razão entre os lados (ou quaisquer medidas) correspondentes de dois triângulos semelhantes é k se, e somente se, a razão entre as suas áreas é k^2.

Demonstração: Calculando a área dos dois triângulos da figura anterior, encontramos

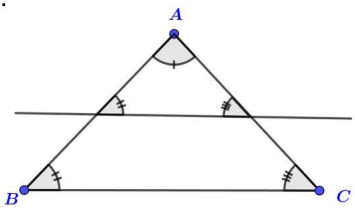
$$\boxed{A_{maior} = \frac{c.h}{2}} e \boxed{A_{menor} = \frac{c_1.h_1}{2}}.$$

Dividindo um valor pelo outro, obtemos

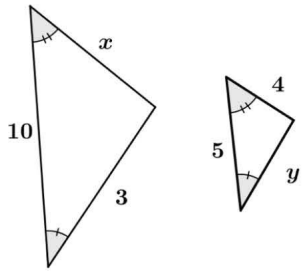
$$\frac{A_{maior}}{A_{menor}} = \frac{c.h}{c_1.h_1} \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{c}{c_1}\right)}_{k}\underbrace{\left(\frac{h}{h_1}\right)}_{k} = k^2.$$

Teorema 10.3.4.2: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intersecta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Demonstração: Na figura a seguir, de acordo com o proposição 10.3.1.1 (condição de paralelismo entre retas), os ângulos formados pela reta paralela à base BC são congruentes aos ângulos da base. Portanto, os ângulos internos dos dois triângulos são ordenadamente congruentes e pela definição anterior, os dois triângulos são semelhantes.



1º exemplo: Os ângulos com marcas iguais são congruentes, determine o valor de x e y.



Solução: Os ângulos correspondentes são congruentes, portanto, os triângulos são semelhantes. Como os lados correspondentes são proporcionais, temos

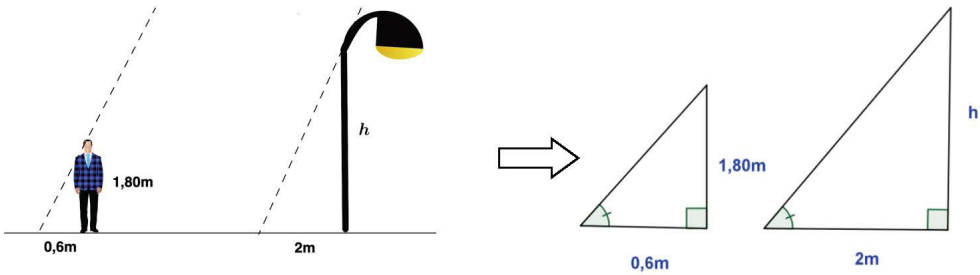
$$\frac{10}{5}=\frac{x}{4}\Rightarrow 5x=40 \Rightarrow x=\frac{40}{5}\Rightarrow \boxed{x=8}.$$

$$\frac{10}{5}=\frac{3}{y}\Rightarrow 10y=15 \Rightarrow y=\frac{15}{10}\Rightarrow \boxed{y=1{,}5}.$$

2º exemplo: (ENEM) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50 cm, a sombra da pessoa passou a medir:

a) 30 cm. b) 45 cm. c) 50 cm. d) 80 cm. e) 90 cm.

Solução: Devido a grande distância do sol para a terra, os raios solares são praticamente paralelos. Portanto, o triângulo formado pelo raio solar, a sombra da pessoa e sua altura, é semelhante ao triângulo formado pelo raio solar, a sombra do poste e sua altura.

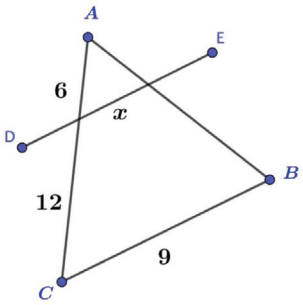


$$\frac{\overset{\text{o triângulo menor}}{\overbrace{1{,}8}}}{\underbrace{h}_{\text{o triângulo maior}}}=\frac{\overset{\text{o triângulo menor}}{\overbrace{0{,}6}}}{\underbrace{2}_{\text{o triângulo maior}}}\Rightarrow 0{,}6h=3{,}6 \Rightarrow h=\frac{3{,}6}{0{,}6}\Rightarrow \boxed{h=6m}.$$

Mais tarde a sombra do poste diminuiu 50cm, ou seja, passou a ser de 1,5m. Então

$$\frac{1{,}8}{6}=\frac{x}{1{,}5}\Rightarrow 6x=2{,}7 \Rightarrow x=\frac{2{,}7}{6}\Rightarrow \boxed{x=0{,}45m}\Rightarrow \boxed{x=45cm}\Rightarrow \textit{letra b}.$$

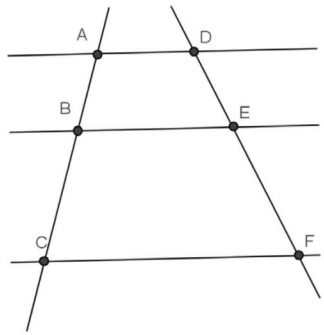
3º exemplo: Calcule x sabendo que o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$.



Solução: Os ângulos correspondentes são congruentes, portanto, os triângulos são semelhantes. Como os lados correspondentes são proporcionais, temos

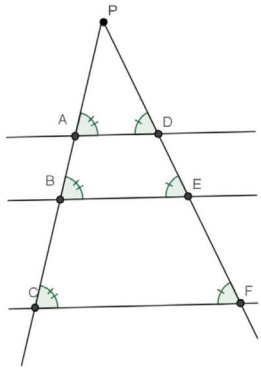
$$\frac{\overbrace{6}^{\text{O lado do triângulo menor}}}{\underbrace{12+6}_{\text{O lado do triângulo maior}}} = \frac{\overbrace{x}^{\text{O lado do triângulo menor}}}{\underbrace{9}_{\text{O lado do triângulo maior}}} \Rightarrow 18x = 54 \Rightarrow x = \frac{54}{18} \Rightarrow \boxed{x = 3}.$$

Teorema 10.3.4.3 (teorema de Tales[4]): Feixes de retas paralelas intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$$

Demonstração: Os segmentos transversais foram prolongados até se encontrarem no ponto P formando os triângulos semelhantes: ΔPAD ~ ΔPBE~ ΔPCF, conforme a figura a seguir.



Nesse contexto, usando a proporção na semelhança dos triângulos, temos

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PE}}} (1).$$

Que ainda,

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} - 1 = \frac{\overline{PF}}{\overline{PE}} - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\overbrace{\overline{PC} - \overline{PB}}^{\overline{BC}}}{\overline{PB}} = \frac{\overbrace{\overline{PF} - \overline{PE}}^{\overline{EF}}}{\overline{PE}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{PB}}{\overline{PE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}} (2).$$

[4] Tales de mileto (623 – 546 a.c)

Comparando com (1) e (2), obtemos $\boxed{\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}}$ (3). E além disso,

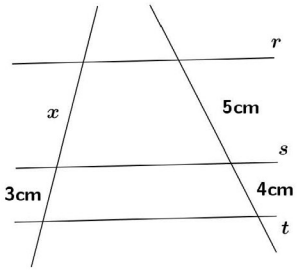
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}} \Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} - 1 = \frac{\overline{PE}}{\overline{PD}} - 1 \Rightarrow \frac{\overbrace{\overline{PB} - \overline{PA}}^{\overline{AB}}}{\overline{PA}} = \frac{\overbrace{\overline{PE} - \overline{PD}}^{\overline{DE}}}{\overline{PD}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}} \quad (4)$$

Comparando (3) e (4), inferimos que $\boxed{\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}} \Rightarrow \boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}}$.

Como $\Delta PAD \sim \Delta PCF \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PF}} \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PF}}$. E comparando essa expressão com (4), concluímos finalmente que $\boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}}$.

Observação: A demonstração e a ilustração acima feita com apenas 3 feixes é análoga pra 4 ou mais, ou seja, independentemente da quantidade de retas paralelas, as retas transversais formam segmentos correspondentes proporcionais.

1º exemplo: Calcule x sabendo que r//s//t.

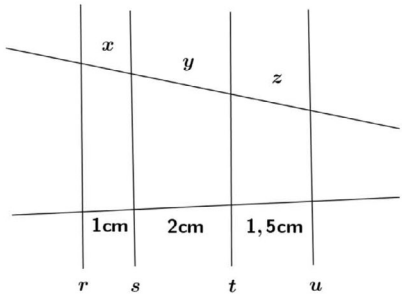


Solução: Como r//s//t, vale o teorema de Tales:

$$\frac{x}{3} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{4} \Rightarrow \boxed{x = 3{,}75cm}$$

Outra forma: $\frac{x+3}{5+4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{x = 3{,}75cm}$.

2º exemplo: Na figura abaixo $r//s//t//u$ e $x + y + z = 9$cm, calcule x, y e z.



Solução: Como r//s//t//u, vale o teorema de Tales, isto é,

$$\frac{x+y+z}{1+2+1{,}5} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1{,}5}$$

Como $x + y + z = 9$, temos

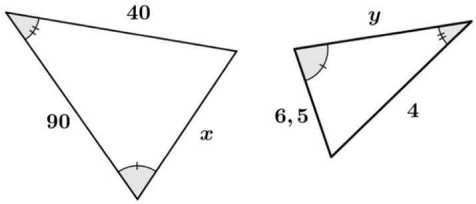
$$\frac{9}{4{,}5} = \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1{,}5}$$

- $2 = \frac{x}{1} \Rightarrow \boxed{x = 2cm}$.
- $2 = \frac{y}{2} \Rightarrow \boxed{y = 4cm}$.
- $2 = \frac{z}{1{,}5} \Rightarrow \boxed{z = 3cm}$.

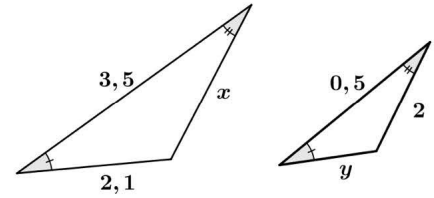
EXERCÍCIOS 10.7

1) Calcule o valor de x e y nos triângulos a seguir.

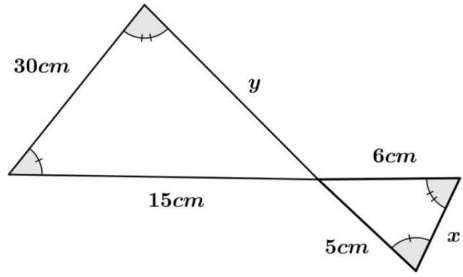
a)



b)



c)

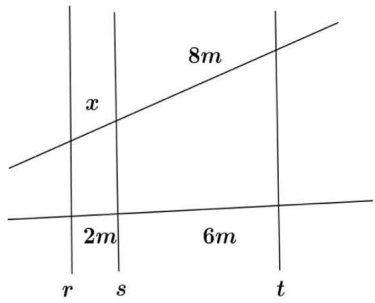


2)(ENEM) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metros. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

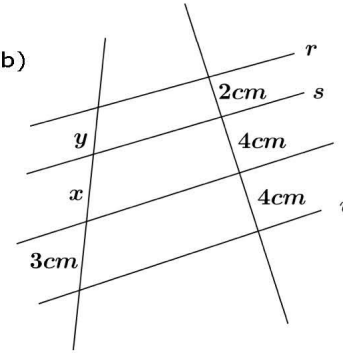
a) 1,16 metros. b) 3,0 metros. c) 5,4 metros. d) 5,6 metros. e) 7,04 metros.

3)Calcule as incógnitas sabendo $r//s//t//u$.

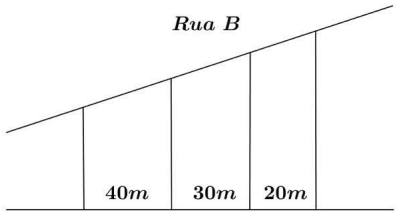
a)



b)

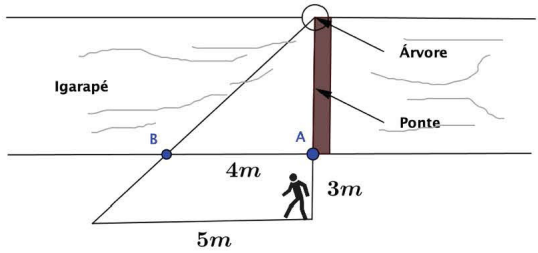


4)(FUVEST–SP) Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote, sabendo que a frente total para essa rua tem 180m?

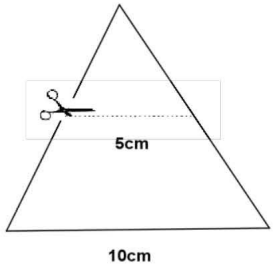


5)Um engenheiro pretende construir uma ponte sobre um Igarapé (riacho que nasce na mata e deságua em rio). Todavia, não é possível atravessar o igarapé para fazer a medição da sua largura. Ele está a 3 metros do ponto A, onde pretende construir a ponte, e avista uma árvore que está à sua frente e exatamente na outra margem. Caminha então, 5 metros em linha reta paralelamente à margem do igarapé e visualiza novamente a mesma árvore sobre uma reta imaginária e marca o ponto B sobre a margem (ver figura). Após medir a distância do ponto A ao ponto B e encontrar o valor de 4 metros, ele concluiu que o tamanho da ponte precisa ser de aproximadamente:

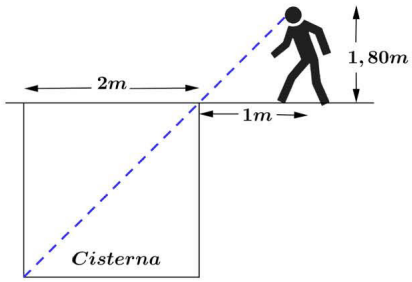
a) 15 m
b) 2,4 m
c) 12 m
d) 10 m
e) 14 m



6)Um aluno fez um corte reto em um triângulo de 12 cm², paralelo a um dos lados que mede 10 cm. Sabendo que o tamanho do corte foi de 5cm, qual a área do novo triângulo formado?

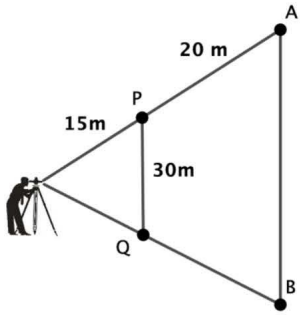


7)Visando estimar a profundidade de uma cisterna com 2 m de largura, uma pessoa com 1,80 m de altura, se posiciona a 0,50 m de sua borda. Nesse momento ver que a borda da cisterna esconde exatamente seu fundo, como mostra a figura. Calcule a profundidade dessa cisterna.

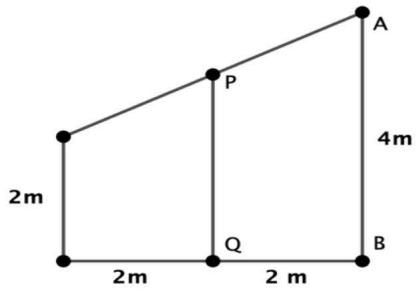


8) Um topógrafo deseja obter a distância entre os pontos A e B. O equipamento forneceu as medidas que estão na figura.

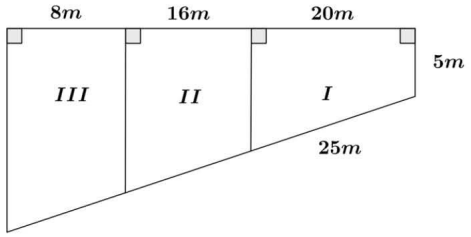
Se PQ//AB, qual a distância de A e B?



9) Um canteiro de flores de madeira foi construído conforme a figura. Um floricultor pretende dividir o canteiro com uma tábua para separar dois tipos de flores diferentes. Se exatamente a tábua deve estar nos pontos P e Q paralelos aos lados do canteiro, qual deve ser o seu tamanho?



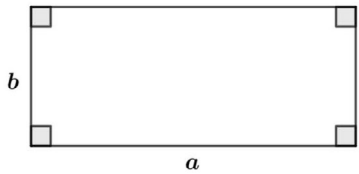
10) Três irmãos receberam de herança um terreno e dividiram entre si conforme a figura. Calcule o perímetro e a área de cada terreno.



10.4. Área de quadriláteros notáveis

Os quadriláteros são polígonos (ver definição 10.5.1) que possuem quatro lados. Os principais quadriláteros que denominamos de notáveis são: os retângulos, os quadrados, os paralelogramos, os trapézios e os losangos.

Retângulo: Possui lados opostos paralelos e ângulos internos retos.

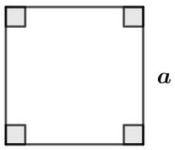


$$A = a.b$$

A área é igual a base vezes a altura.

Observação: fórmula já averiguada na seção 10.3.3.

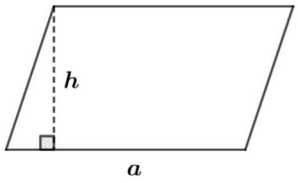
Quadrado: Possui lados opostos paralelos e todos congruentes. Os ângulos internos são retos (caso particular de um retângulo).



$$A = a^2$$

A área é igual ao quadrado de um lado.

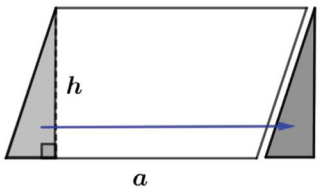
Paralelogramo: Possui lados opostos paralelos.



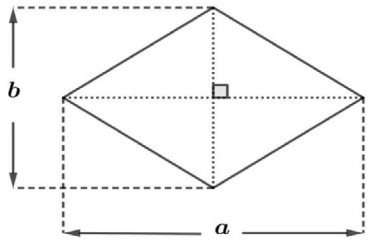
$$A = a.h$$

A área é igual a base vezes a altura.

Demonstração: Basta transportar o triângulo retângulo do lado esquerdo e encaixar no lado direito, formando um retângulo de área $a.h$.



Losango: Possui **todos os lados congruentes** e suas diagonais são perpendiculares.

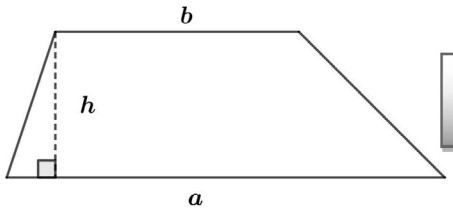


$$A = \frac{a.b}{2}$$

A área é igual a metade do produto das diagonais.

Demonstração: Cada triângulo retângulo tem área $\frac{\frac{a}{2}.\frac{b}{2}}{2}$. E ao multiplicar por 4, obtém-se: $A = \frac{a.b}{2}$.

Trapézio: Possui dois lados opostos paralelos.



$$A = \frac{(b + a).h}{2}$$

A área é igual a metade da soma das duas bases vezes a altura.

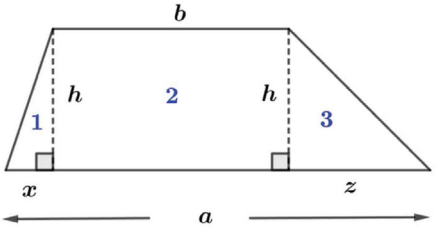
Demonstração: Vamos dividir o trapézio na figura a seguir em três partes:

área1 $= \frac{h.x}{2}$, área2 $= h.b$ e área3 $= \frac{h.z}{2}$.

Somando as três áreas, obtemos

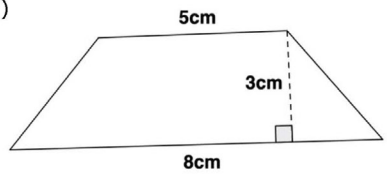
$$A = \frac{h.x}{2} + h.b + \frac{h.z}{2} = \frac{h\,(x + 2b + z)}{2} \Rightarrow$$

$$A = \frac{h.(x + b + z + b)}{2} = \boxed{\frac{h.(b + a)}{2}}.$$



Exemplo: Vamos calcular a área das figuras a seguir.

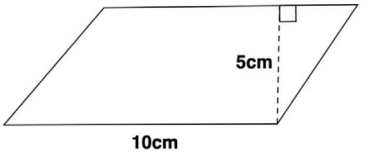
a)



Solução: Trapézio.

$$A = \frac{(5 + 8).3}{2} = \frac{13.3}{2} = \frac{39}{2} = \boxed{19{,}5cm^2}.$$

b)



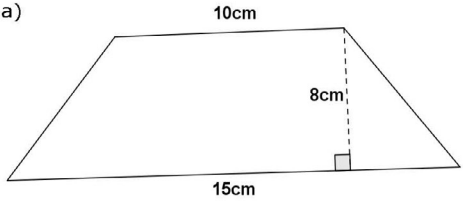
Solução: Paralelogramo.

$$A = 10.5 = \boxed{50cm^2}.$$

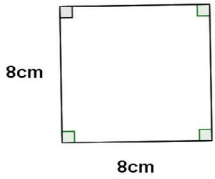
EXERCÍCIOS 10.8

1) Calcule a área dos quadriláteros a seguir:

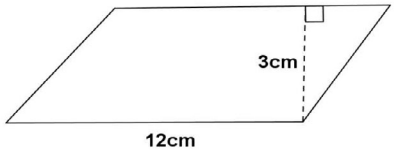
a)



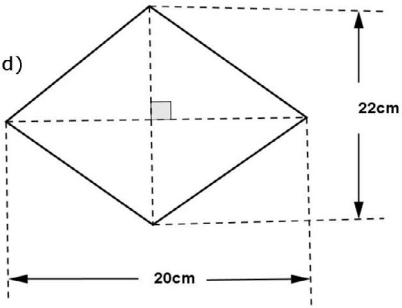
b)



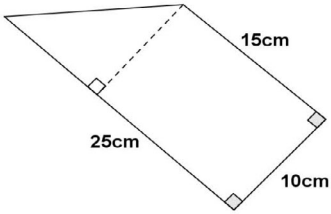
c)



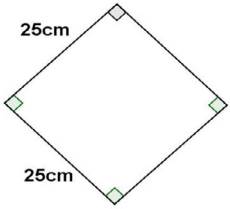
d)



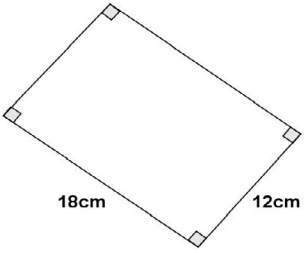
e)



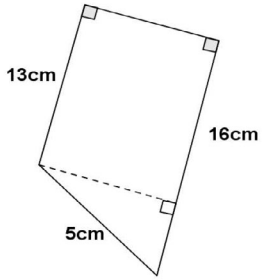
f)



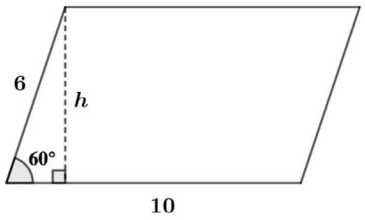
g)



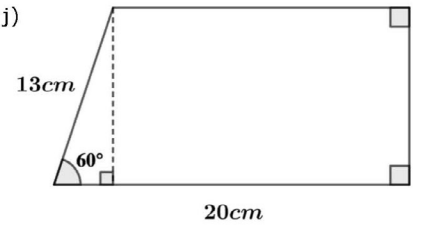
h)



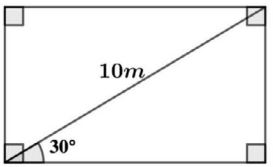
i)



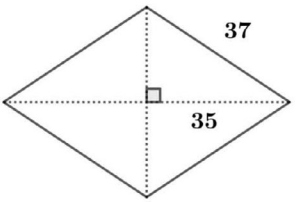
j)



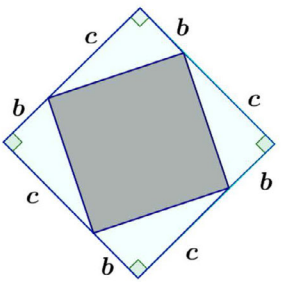
k)



l)



2) Mostre que o quadrilátero interno destacado é um quadrado e calcule a sua área em função de b e c.



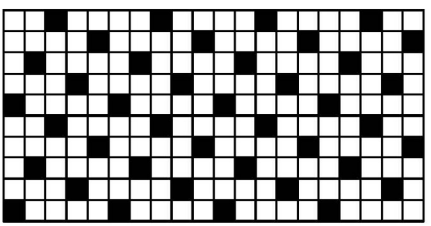
3) Marque a alternativa incorreta.

a) Todo quadrado é um retângulo;
b) Todo retângulo é um paralelogramo;
c) Todo quadrado é um losango;
d) Todo quadrado é um paralelogramo;
e) Todo losango é um quadrado.

4)(ENEM) Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado ao lado, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio.

As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será de

a) R$ 8,20. b) R$ 8,40. c) R$ 8,60.
d) R$ 8,80. e) R$ 9,00.



5)(ENEM) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, da largura e do comprimento sejam iguais, respectivamente, a

a) 7,5 e 14,5.
b) 9,0 e 16,0.
c) 9,3 e 16,3.
d) 10,0 e 17,0.
e) 13,5 e 20,5.

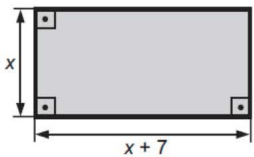


Figura A

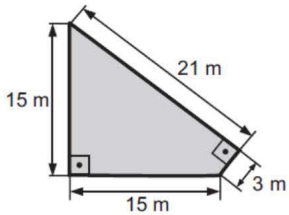


Figura B

6)(ENEM) Um fabricante recomenda que, para cada m² do ambiente a ser climatizado, são necessários 800 BTUh, desde que haja até duas pessoas no ambiente. A esse número devem ser acrescentados 600 BTUh para cada pessoa a mais, e também para cada aparelho eletrônico emissor de calor no ambiente. A seguir encontram-se as cinco opções de aparelhos desse fabricante e suas respectivas capacidades térmicas:

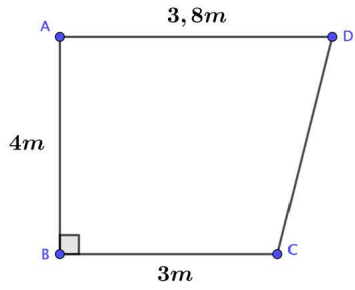
Tipo I: 10 500 BTUh
Tipo II: 11 000 BTUh
Tipo III: 11 500 BTUh
Tipo IV: 12 000 BTUh
Tipo V: 12 500 BTUh

O supervisor de um laboratório precisa comprar um aparelho para climatizar o ambiente. Nele, ficarão duas pessoas mais uma centrífuga que emite calor. O laboratório tem a forma de trapézio retângulo, com as medidas apresentadas na figura.

Para economizar energia, o supervisor deverá escolher o aparelho de menor capacidade térmica que atenda às necessidades do laboratório e às recomendações do fabricante.

A escolha do supervisor recairá sobre o aparelho do tipo

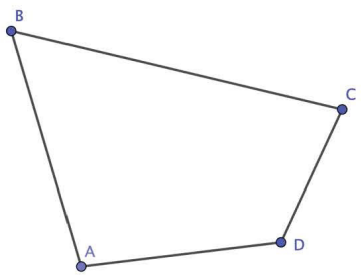
a)I. b) II. c)III. d)IV. e)V.

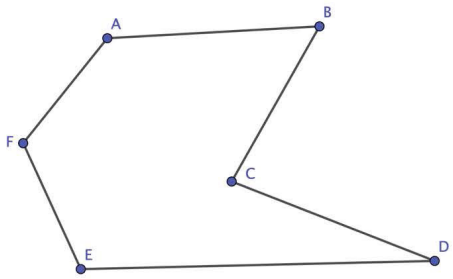


10.5. Polígonos

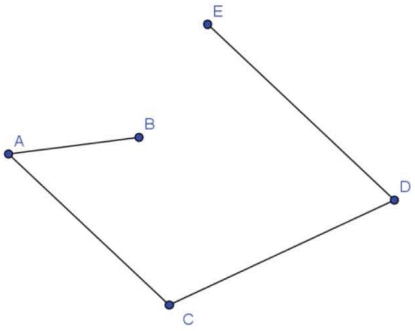
Definição 10.5.1 (simplificada): Polígono é uma figura plana limitada (fechada) por segmentos de reta denominado de lados, em que cada extremo desses lados são chamados de vértices, e cada vértice é encontro de dois e somente dois desses lados.

Exemplos de polígonos:

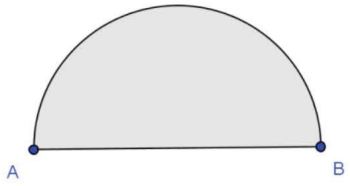




Exemplos de figuras que não são polígonos:



Motivo: Figura não limitada (aberta)



Motivo: Figura não limitada por retas (possui curvas)

Elementos: Vértices, lados, ângulos internos, ângulos externos e diagonais.

Os **lados** são todos os segmentos de reta que formam o polígono.

Os **vértices** são os pontos de encontro dos lados.

Os **ângulos internos** são os ângulos formados por dois lados consecutivos do polígono internamente. Enquanto os ângulos externos são formados por um lado da figura e o prolongamento de um lado adjacente.

A **diagonal** de um polígono é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos (não adjacentes).

Veja esses elementos representados na figura 10.5.1 a seguir.

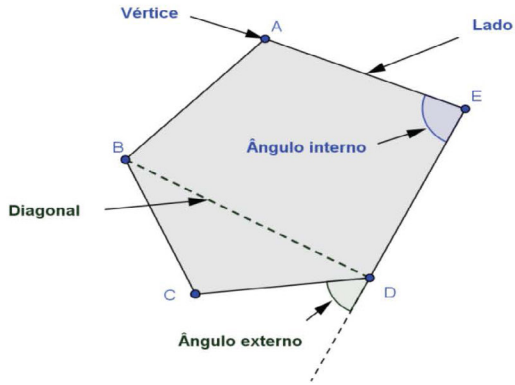


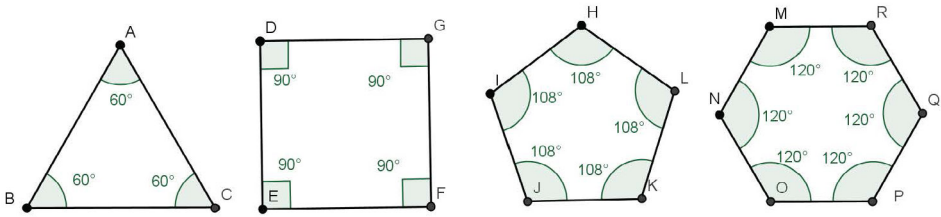
Figura 10.5.1

Um polígono que possui todos lados congruentes é denominado de equilátero. Se possuir os ângulos internos congruentes, é equiângulo.

Definição 10.5.2: Denominamos um polígono equilátero e equiângulo de **polígono regular**.

Quando um polígono é regular, acrescentamos a palavra regular ao seu nome. As exceções são os triângulos que são denominados de equiláteros e os retângulos regulares que são denominado de quadrados.

Alguns polígonos regulares e seus respectivos ângulos internos estão a seguir.



Definição 10.5.3: Um polígono pode ser convexo ou côncavo (ou não convexo).

◆ **Convexo:** Se todos os ângulos internos forem inferiores a 180° (figura 10.5.2) ou todas as diagonais são internas ao polígono (figura 10.5.3).

◆ **Não convexo:** Se existir um ângulo interno qualquer maior que 180° (figura 10.5.4) ou alguma diagonal externa ao polígono (figura 10.5.5).

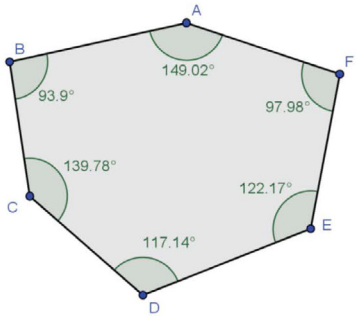


Figura 10.5.2

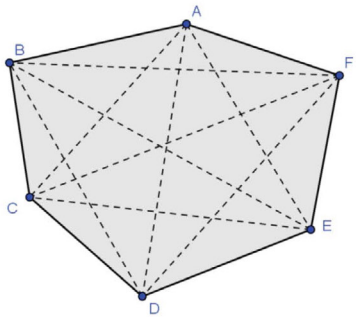


Figura 10.5.3

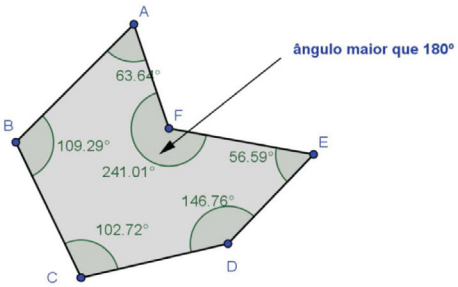


Figura 10.5.4

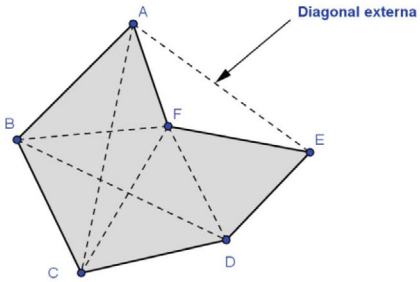


Figura 10.5.5

Nome dos polígonos:

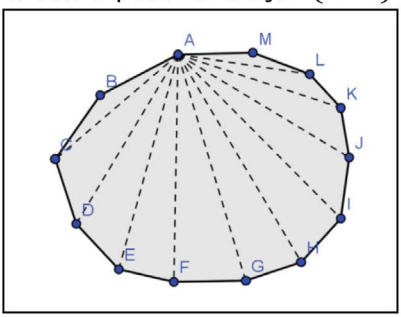
De acordo com o número n de lados, os polígonos recebem nomes especiais. Os mais utilizados são:

Nº de lados	Nome do Polígono	Nº de lados	Nome do Polígono
3	Triângulo ou trilátero	9	Eneágono
4	Quadrângulo ou quadrilátero	10	Decágono
5	Pentágono	11	Undecágono
6	Hexágono	12	Dodecágono
7	Heptágono	15	Pentadecágono
8	Octógono	20	Icoságono

Teorema 10.5.1: O número de diagonais (d) de um polígono de n lados é dado por:

$$d = \frac{n.(n-3)}{2}$$

Demonstração: Supondo que o polígono na figura a seguir possua n lados. Partindo do vértice A é possível traçar $(n-3)$ diagonais, pois são n vértices menos os vértices B e M (que não são diagonais) e o próprio A. O mesmo acontece com os demais vértices, sempre é possível traçar $(n-3)$ diagonais (verifique!). Como um polígono de n vértices possui n lados e cada vértice é possível traçar $(n-3)$ diagonais, então, o total de diagonais é $n.(n-3)$.



Entretanto, a diagonal $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\overline{AD} = \overline{DA}$, $\overline{AE} = \overline{EA}$, ..., o que implica que a diagonal que contamos em cada vértice, foi contada também em outro vértice, em duplicidade. Desse modo, é preciso dividir $n.(n-3)$ por 2, demonstrando a fórmula.

Exemplo: Qual o número de diagonais de um pentadecágono?

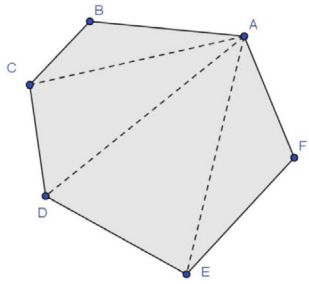
Solução: Como o pentadecágono possui 15 lados então, ele possui

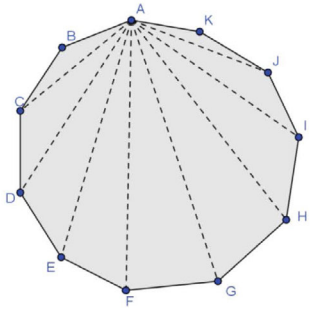
$$d = \frac{15.(15-3)}{2} = \frac{15.12}{2} = 15.6 \Rightarrow \boxed{d = 90\ diagonais}.$$

Teorema 10.5.2: A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dado por:

$$S_i = (n-2).180°$$

Demonstração: Considere um polígono convexo de n lados, cujos vértices são A, B, C, etc. Podemos traçar do vértice A, sempre $n-3$ diagonais, dividindo o polígono em $n-3+1 = n-2$ triângulos. Veja dois exemplos:





Assim um quadrilátero pode ser dividido em 2 triângulos, um pentágono em 3 triângulos, um hexágono em 4 triângulos, e qualquer polígono convexo de n lados em $n-2$ triângulos. Como todos os triângulos são adjacentes, a soma dos ângulos

internos do polígono é a soma dos ângulos internos de cada triângulo, ou seja, $(n-2).180^o$. Demonstrando o teorema.

Exemplo: Qual a soma dos ângulos internos de um octógono regular?

Solução:

Um octógono possui 8 lados e a soma dos seus ângulos internos é

$$S_i = (8-2).180° = 6.180° = 1080°.$$

Teorema 10.5.3: A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°.

$$\boxed{S_e = 360°}$$

Demonstração: Denotando como E_b, E_c, etc., os ângulos externos do polígono a seguir e I_b, I_c, etc., como os ângulos internos, temos

$E_b + I_b + E_c + I_c + E_d + I_d + \ldots$

$\ldots + E_n + I_n = n.180^o \Rightarrow$

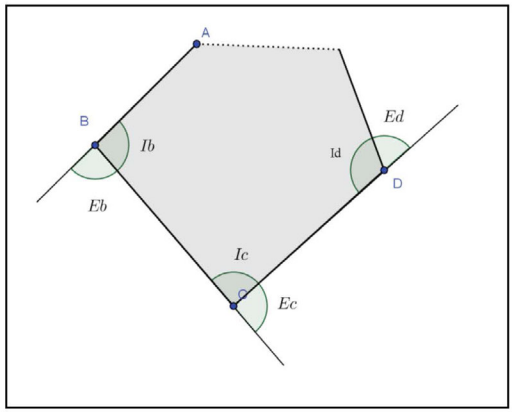
$$S_e + S_i = n.180^o$$

Como $S_i = (n-2).180^o$, obtemos

$S_e + (n-2).180^o = n.180^o$

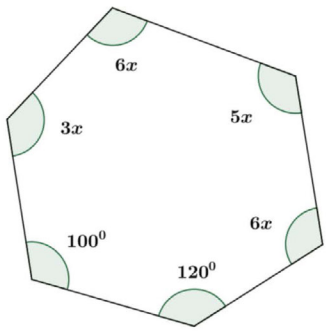
$S_e + n.180^o - 2.180^o = n.180^o \Rightarrow$

$$\boxed{S_e = 360°}.$$



Exemplo: Calcule:

a) O valor de x abaixo.



Solução: O polígono é um hexágono (possui 6 lados), assim, a soma dos seus ângulos internos é

$$S = (6-2).180° = 4.180° = 720°.$$

Somando os todos os ângulos, encontramos

$6x + 5x + 6x + 120 + 100 + 3x = 720$

$20x + 220 = 720$

$20x = 720 - 220$

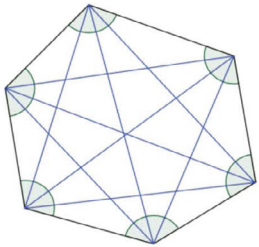
$$20x = 500 \Rightarrow x = \frac{500}{20} \Rightarrow \boxed{x = 25°}.$$

b) O número de diagonais do polígono acima.

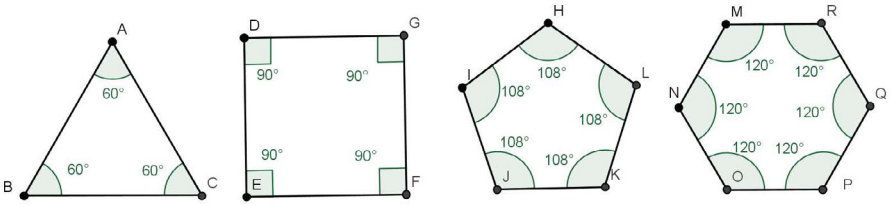
Solução: Como o polígono possui 6 lados, basta utilizar $n = 6$ na fórmula do cálculo do número de diagonais,

$$d = \frac{n.(n-3)}{2} = \frac{6.(6-3)}{2} = \frac{6.3}{2} = \frac{18}{2} \Rightarrow \boxed{d = 9}.$$

Resposta: 9 diagonais (confira na figura ao lado).



2º exemplo: Confirme o valor do ângulo interno de cada **polígono regular** abaixo:



Solução: Como polígonos regulares possuem todos os ângulos internos congruentes (é equiângulo), então dividiremos a soma dos ângulos internos pela quantidade de vértices (que é o mesmo que o número de lados). Da seguinte forma:

- Para o **triângulo equilátero**, temos $n = 3$. Assim,

$$S = (3 - 2).180° = 1.180° = 180°.$$

Dividindo essa soma por 3, obtemos: 60°.

- Para o **quadrado**, temos $n = 4$. E assim,

$$S = (4 - 2).180° = 2.180° = 360°.$$

Ao dividir a soma por 4, obtemos: 90°.

- Para o **pentágono regular**, temos $n = 5$. O que nos leva a,

$$S = (5 - 2).180° = 3.180° = 540°.$$

Ao dividir por 5, dá: 108°.

- Por fim, para o **hexágono regular**, temos $n = 6$ e dessa maneira,

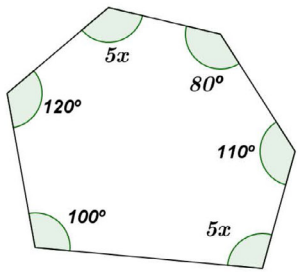
$$S = (6 - 2).180° = 4.180° = 720°.$$

Dividido por 6, encontramos 120°.

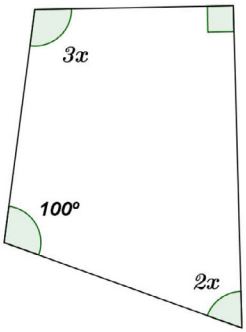
EXERCÍCIOS 10.9

1)Determine o valor de x nos casos:

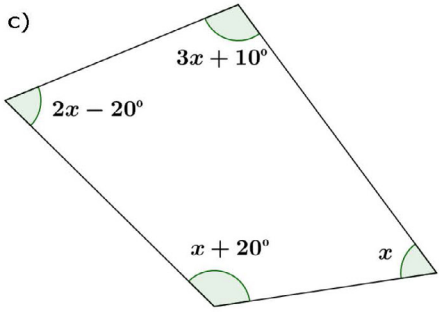
a)



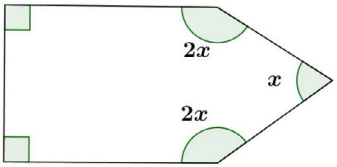
b)



c)

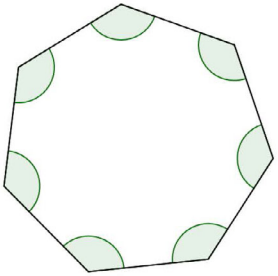


d)

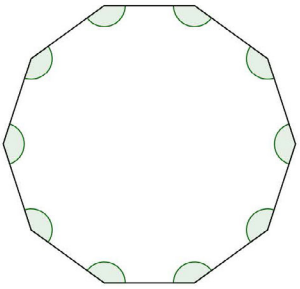


2)Calcule o valor do ângulo interno de cada polígono regular a seguir:

a)



b)



3)Calcule a soma dos ângulos internos de um:

a) Octógono convexo

b) Icoságono convexo

4)Qual o polígono convexo cuja soma dos ângulos interno vale 900º?

5)Qual o número de diagonais de um undecágono?

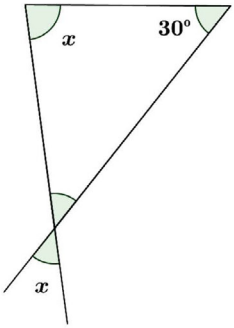
6)Calcule a medida de um ângulo interno de um:

a) Icoságono regular

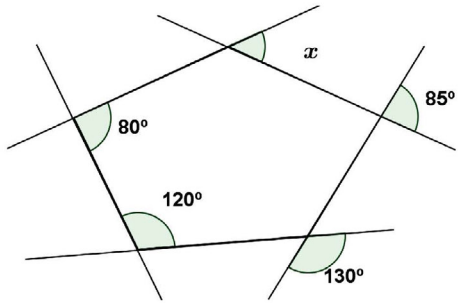
b) Polígono regular de 30 lados.

7)Determine x, nos casos.

a)

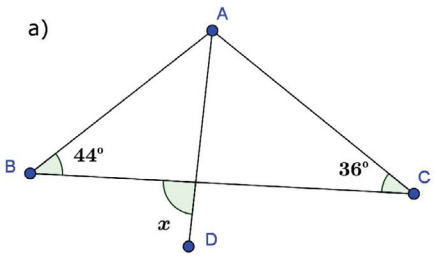


b)

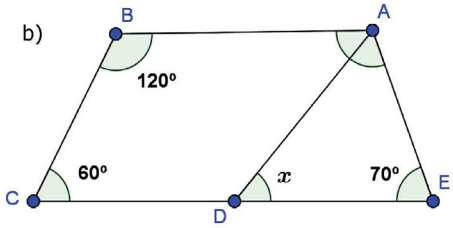


8) Sabendo que o segmento $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo Â, calcule x:

a)



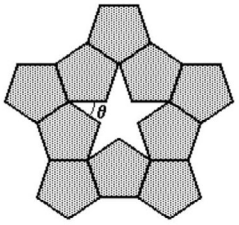
b)



9) (UNIFESP) Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura:

Nestas condições, o ângulo θ mede

a) 108°. b) 72°. c) 54°. d) 36°. e) 18°.



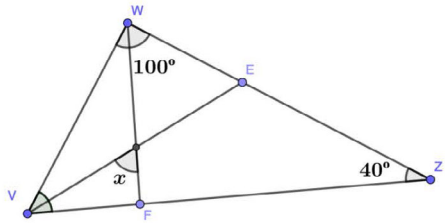
10)(FAAP) A medida mais próxima de cada ângulo externo do heptágono regular da moeda de R$ 0,25 é:

a) 60° b) 45° c) 36° d) 83° e) 51°

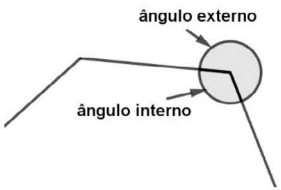


bcb.gov.br

11)No triângulo WZV da figura, o ângulo W é 100° e o ângulo C, 40°. VE é bissetriz e WF é altura. Calcule valor de x.

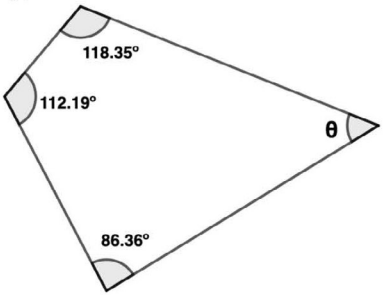


12) Em topografia a definição de ângulo externo de em um polígono é diferente da definição de ângulo externo na geometria. Na topografia, o ângulo externo somado ao ângulo interno mede 360°, conforme a figura. Mostre que a soma dos ângulos externos de um polígono na topografia é dado por $S = (n+2).180°$, onde n é quantidade de lados do polígono.

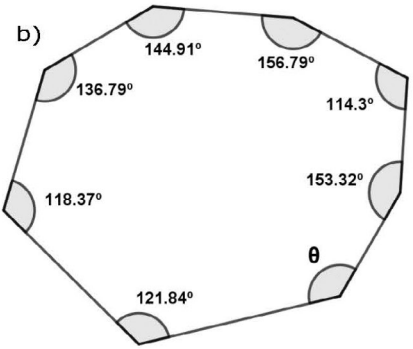


13) Um topógrafo ao fazer um levantamento de alguns terrenos obteve junto a estação total os ângulos internos que estão na figura. Calcule em cada caso, o valor de θ?

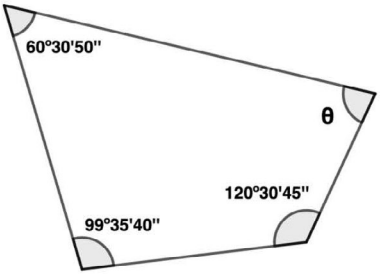
a)



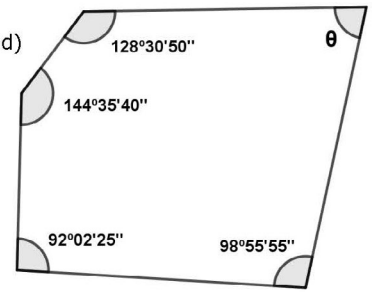
b)



c)

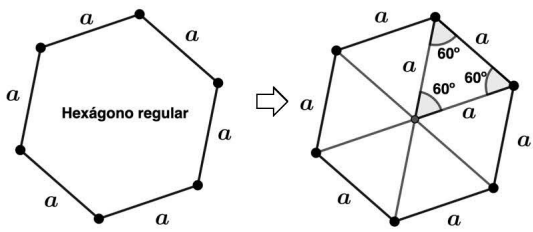


d)



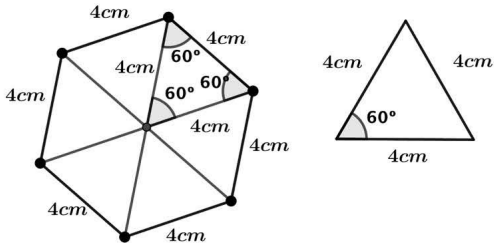
10.5.1. Área de um hexágono regular

Um hexágono regular é um polígono que possui 6 lados congruentes. Ao dividi-lo em 6 triângulos, o ângulo central de um dos triângulos é $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ e os demais (pela soma dos ângulos internos) também. Assim, todos os triângulos formados são equiláteros. Veja as figuras:



Desta forma, para calcular a área de um hexágono regular, basta calcular a área de um triângulo equilátero apenas e multiplicar o resultado por 6.

Por exemplo: Vamos calcular a área de um hexágono regular de lado 4cm.
Solução:



A área de um triângulo equilátero é: $A_\Delta = \frac{4.4.sen60^\circ}{2} = \frac{16.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A_\Delta = 4\sqrt{3}cm^2}$.

$$A_{hex} = 6.A_\Delta = 6.4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_{hex} = 24\sqrt{3}\ cm^2}.$$

2º exemplo: Calcule a área de um hexágono regular de lado 10cm.
Solução: A área de um triângulo equilátero é:

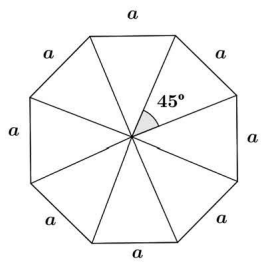
$$A_\Delta = \frac{10.10.sen60^\circ}{2} = \frac{100.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A_\Delta = 5\sqrt{3}cm^2}$$

$$A_{hex} = 6.A_\Delta = 6.25\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_{hex} = 150\sqrt{3}\ \text{cm}^2}.$$

10.5.2. Área de um octógono regular

Um octógono regular é um polígono que possui 8 lados congruentes. Ao dividi-lo em 8 triângulos, o ângulo central de um dos triângulos é $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Veja a figura:



Como todos os triângulos são congruentes (verifique!), é suficiente calcular a área de um triângulo apenas e multiplicar o resultado por 8.

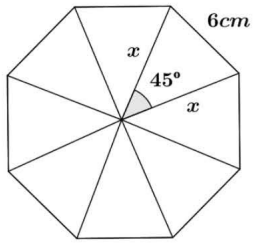
Exemplo: Calcular á área de um octógono regular de lado 6cm.

Solução:

Pela lei dos cossenos, temos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cosA \Rightarrow 6^2 = x^2 + x^2 - 2x.x.cos45^\circ \Rightarrow$$

$$36 = x^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{36}{2-\sqrt{2}}}.$$



A área de um triângulo é:

$$A_\Delta = \frac{x^2.sen60^\circ}{2} = \frac{x^2.\sqrt{2}}{4} = \frac{36}{2-\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{4}.\frac{(2+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})} = \frac{9\,(2\sqrt{2}+2)}{4-2} \Rightarrow \boxed{A_\Delta = 9(\sqrt{2}+1)}.$$

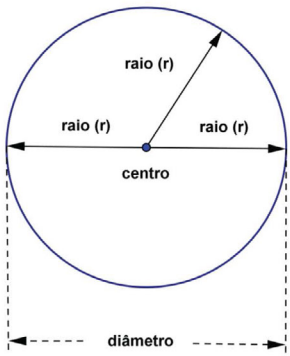
A área do octógono regular é:

$$A_{oct} = 8.A_\Delta = 8.9(\sqrt{2}+1) \Rightarrow \boxed{A_{oct} = 72(\sqrt{2}+1)cm^2}.$$

De forma análoga ao octógono regular, podemos calcular a área de um dodecágono regular. Ao dividi-lo em 12 triângulos, o ângulo central de um dos triângulos é $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Para calcular sua área basta seguir os mesmos passos acima, utilizando a lei dos cossenos.

10.6. Circunferência

Circunferência é ao conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância de um ponto fixo, denominado **centro**. Cada segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado **raio(r).**



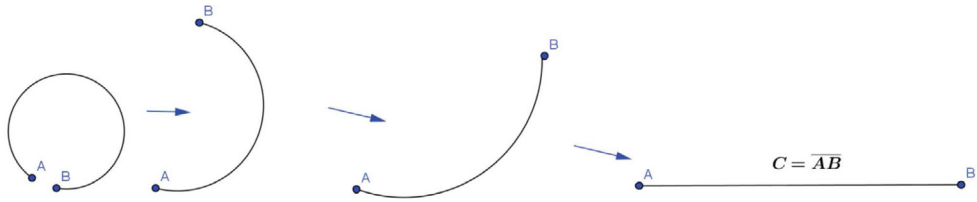
O diâmetro (d) é igual a duas vezes o raio (r):

$$d = 2.r$$

"A razão entre o perímetro C (ou comprimento) de qualquer círculo pelo seu diâmetro d é um número irracional constante representado por π=3,14159..."

$$\pi = \frac{C}{d} \Rightarrow C = 2\pi r$$

O comprimento C da circunferência é a medida do perímetro da figura. É como se pudéssemos abrir a figura e medir o seguimento formado. Veja a ilustração:



Exemplo: Vamos calcular o comprimento de uma circunferência de raio 10 cm.

Solução:

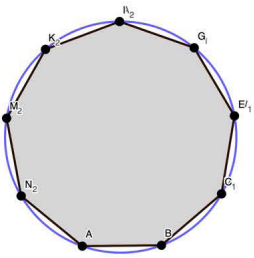
$C = 2\pi r \Rightarrow C = 2.\pi.10 \Rightarrow C = 20\pi\ cm. Usando\ \pi \cong 3{,}14 \Rightarrow \boxed{C \cong 62{,}8\ cm}$.

A área de uma circunferência é dada por:

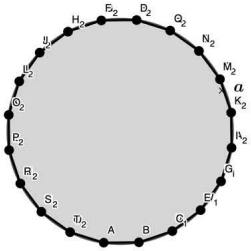
$$A = \pi\, r^2$$

Demonstração:

Considere um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência. A seguir, estão dois exemplos para $n = 9$ e $n = 20$ lados.

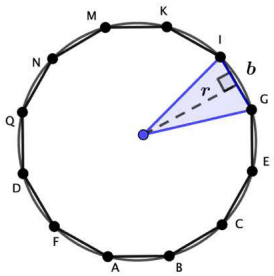


Para $n = 9$.



Para $n = 20$.

Observe que para um polígono de 20 lados, a diferença entre a área da circunferência e a área do polígono é quase nula. Nesse entendimento, podemos considerar um polígono com um valor n de lados suficientemente grande (tão grande quanto se deseje), e assim, a área da circunferência coincidirá com a área do polígono inscrito.



Nesse sentido, como o polígono é regular, ele pode ser dividido em n triângulos (conforme a figura ao lado) e cada triângulo tem área $\frac{b.r}{2}$.

Como são n triângulos, a área do polígono, que coincide com a área da circunferência, é dada por

$$A = n.\frac{b.r}{2}.$$

Entretanto, quando tornamos n suficientemente grande, o lado b do triângulo coincide com a circunferência, fazendo com que o perímetro do polígono $(n.b)$ torne-se o próprio comprimento da circunferência (C), ou seja, $n.b = 2\pi r$. Além disso, a altura r dos triângulos torna-se o próprio raio. Substituindo essas informações na expressão anterior, concluímos que:

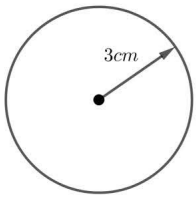
$$A = n.\frac{b.r}{2} = \frac{2.\pi.r.r}{2} \Rightarrow \boxed{A = \pi r^2}.$$

1º exemplo: Determine a área de uma circunferência de raio 8cm.

Solução: $A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi.8^2 \Rightarrow A = 64\pi cm^2$.

Substituindo $\pi \cong 3{,}14$, tem-se: $\boxed{A \cong 200{,}96\ cm^2}$.

2º exemplo: Determine o comprimento e a área do círculo abaixo.



Solução:

$C = 2.\pi.3 = 6\pi cm$ ou $6 \,.\, 3{,}14 \cong \boxed{18{,}84cm}$.

$A = \pi.3^2 = 9\pi cm^2$ ou $9 \,.\, 3{,}14 \cong \boxed{28{,}26cm^2}$.

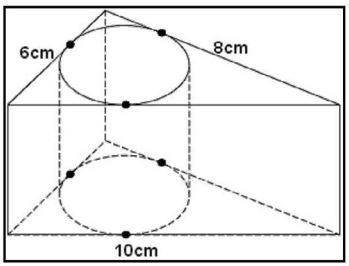
3º exemplo: Pretende-se forrar com lajotas o piso de um compartimento em forma circular de 4 metros de diâmetro. Quantos metros quadrados de lajotas serão necessários?

Solução: $A = \pi . 2^2 \Rightarrow \boxed{A = 4\pi cm^2}$ ou $A \cong 4 \,.\, 3{,}14 \Rightarrow \boxed{A \cong 12{,}56cm^2}$.

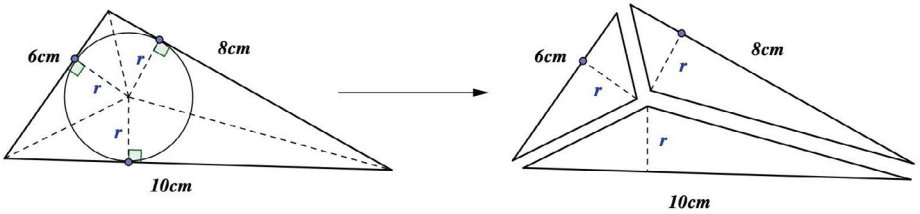
4º exemplo: (ENEM 2010) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.

O raio da perfuração da peça é igual a

a) 1 cm.
b) 2 cm.
c) 3 cm.
d) 4 cm.
e) 5 cm.



Solução: Na parte superior do prisma, temos o seguinte triângulo que foi divido em três outros triângulos, cujas bases são 8cm, 6cm, 10cm. Como a circunferência é tangente aos três lados, o raio é perpendicular a cada lado, ou seja, os triângulos tem altura r.



A área do triângulo maior é igual a soma das três áreas de cada triângulo menor

$$A = \frac{6.r}{2} + \frac{8.r}{2} + \frac{10.r}{2} = 3r + 4r + 5r \Rightarrow \boxed{A = 12r}\ (1).$$

Entretanto, a área também pode ser calculada usando a fórmula de Heron,

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow A = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$$

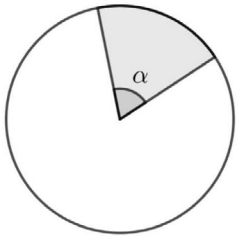
$$A = \sqrt{12.6.4.2} = \sqrt{576} \Rightarrow \boxed{A = 24}\ (2).$$

Igualando (1) e (2), encontramos

$$12r = 24 \Rightarrow r = \frac{24}{12} \Rightarrow \boxed{r = 2cm}.$$

Resposta: letra b.

10.6.1. Área de um setor circular

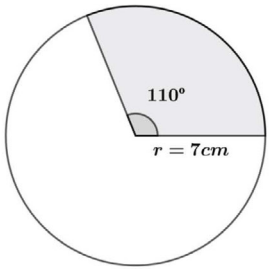


$360° \longrightarrow \pi r^2$ (área do círculo)

$\alpha \longrightarrow A_{setor}$

$$A_{setor} = \frac{\pi r^2 . \alpha}{360°}$$

Exemplo: Calcule a área do setor circular abaixo.



Solução:

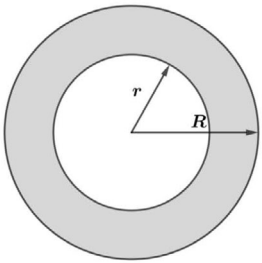
$360° \longrightarrow \pi r^2$ (área do círculo)

$110° \longrightarrow A_{setor}$

$$A_{setor} = \frac{\pi . 7^2 . 110}{360} = \frac{\pi . 49 . 110}{360} = 3{,}14 \, . \, 14{,}97 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_{setor} = 47cm^2} \, .$$

10.6.2. Área da coroa circular



$$A_{coroa} = A_{círculo\ maior} - A_{círculo\ menor}$$

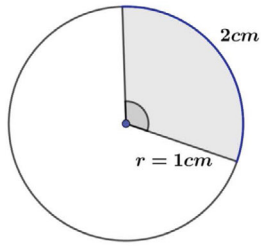
Exemplo: Se $R = 4$cm e $r = 2$cm, então

$$A_{coroa} = \pi . R^2 - \pi . r^2 = \pi(4^2 - 2^2) = \pi . (16 - 4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_{coroa} = 12\ \pi\ cm^2} \, .$$

Todas as figuras dos exemplos a seguir, apresentam curvas referentes a círculos combinadas com polígonos de uma forma geral (já conhecidos), cujas operações, soma ou subtração (ou proporção) de áreas, dependem da forma em que se apresenta a figura.

1º exemplo: Calcule a área da região sombreada (destacada em cinza) nos seguintes casos:

a)



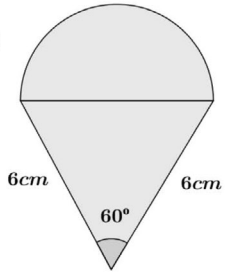
Solução:

$C = 2\pi r\text{cm} \longrightarrow \pi r^2$ **(área total do círculo)**

$2\text{cm} \longrightarrow A_{setor}$

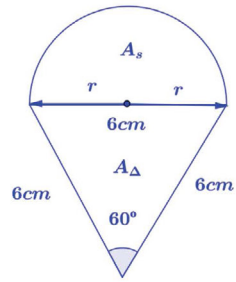
$$A_{setor} = \frac{\pi r^2 . 2}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{A_{setor} = 1cm^2}.$$

b)



Solução: Precisamos do raio do semicírculo. Como o triângulo na figura é isósceles, os dois ângulos da base são iguais, denominando de x, temos

$$x + x + 60° = 180° \Rightarrow \boxed{x = 60°}$$



Assim, o triângulo é também equilátero (outra forma de constatar é usando a lei dos cossenos).

Perceba que o raio do semicírculo é a metade do lado do triângulo. Desse modo, $r = 3cm$ e área do semi-círculo é a metade de πr^2,

$$A_s = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi 3^2}{2} \Rightarrow \boxed{A_s = \frac{9\pi}{2} cm^2}.$$

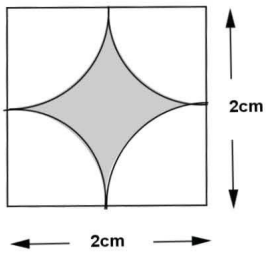
A área do triângulo é

$$A_\Delta = \frac{a.b.sen60º}{2} = \frac{6.6.\sqrt{3}}{4} = \frac{36.\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A_\Delta = 9\sqrt{3}cm^2}.$$

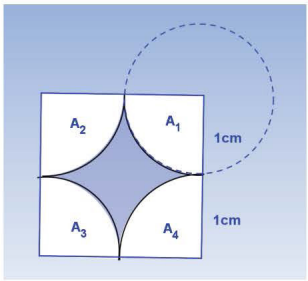
Somando as duas áreas, encontramos

$$A = A_s + A_\Delta = \frac{9\pi}{2} + 9\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{9(\pi + 2\sqrt{3})}{2} cm^2}.$$

c)



Solução: Como o polígono é um quadrado, cada região representa $\frac{1}{4}$ do círculo completo de raio 1cm.



Área do quadrado é $2x2 = 4\ cm^2$.

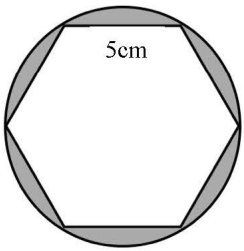
As quatro áreas somadas representam o círculo completo, isto é,

$A_o = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \pi r^2 = \pi . 1^2 \Rightarrow \boxed{A_o = \pi\ cm^2}$.

A área da parte sombreada é a área do quadrado menos a área do círculo, o que nos dá

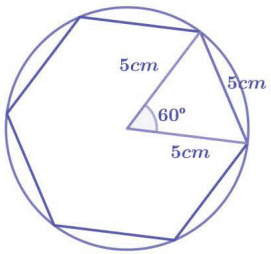
$\boxed{A = (4 - \pi) cm^2}$.

d)



Solução: A área do hexágono regular é dada por

$A_{Hex} = 6.\frac{5.5sen60°}{2} \Rightarrow \boxed{A_{Hex} = 75\sqrt{3}cm^2}$.



A área do círculo é

$A_o = \pi r^2 = \pi 5^2 \Rightarrow \boxed{A_o = 25\pi\ cm^2}$.

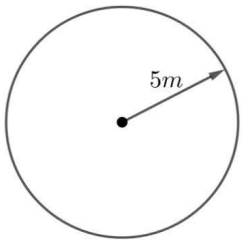
A área da parte sombreada é a área do círculo menos a área do hexágono regular, isto é

$$A = A_o - A_{Hex} = 25\pi - 75.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{25(2\pi - 3\sqrt{3})}{2} cm^2}.$$

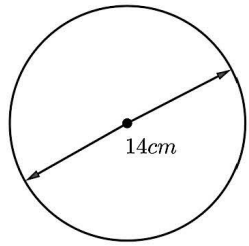
EXERCÍCIOS 10.10

1)Determine o comprimento e a área das circunferências abaixo:

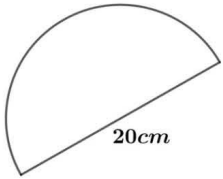
a)



b)



2)Calcule a área e o perímetro do semicírculo abaixo:

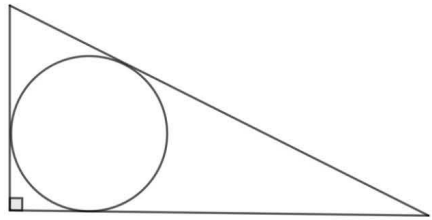


3)Qual o raio de um círculo que possui, aproximadamente, 12,56cm² de área?

4)(UFAL) Na figura abaixo tem-se um círculo inscrito em um triângulo retângulo cujos lados medem 9cm, 12cm e 15cm.

A medida do raio do círculo, em centímetros, é

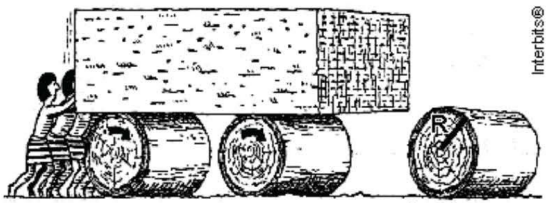
a) 2,4
b) 2,5
c) 3
d) 3,2
e) 4



5)(ENEM 2010) A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

a) y = R.
b) y = 2R.
c) y = πR.
d) y = 2πR.
e) y = 4πR.

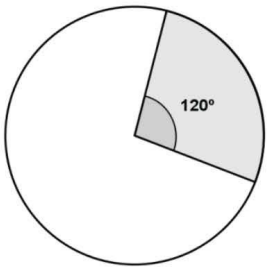


BOLT, Brian. *Atividades matemáticas*. Ed. Gradiva.

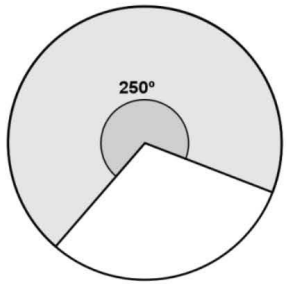
6) Uma propriedade usa um sistema de irrigação denominado pivô central. Esse sistema gira 360º por toda a plantação em torno de um ponto central. Sabendo que o braço acoplado ao pivô central possui 150m, qual a área abrangida pela irrigação desse sistema?

7)Calcule, em cada caso, a área da região sombreada (destacada em cinza) sabendo que o raio da circunferência é de 6 metros.

a)

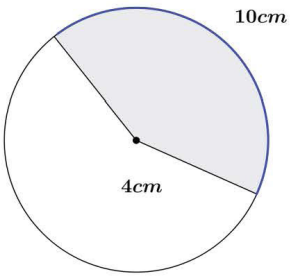


b)

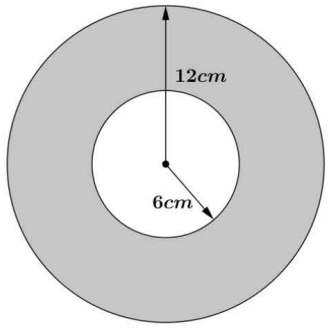


8)Calcule, em cada caso, a área da região sombreada (destacada em cinza)

a)

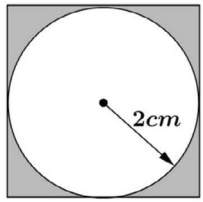


b)

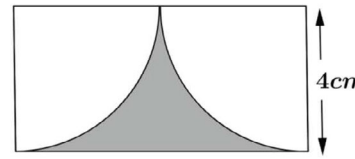


9)Calcule, em cada caso, a área da região sombreada (destacada em cinza), sabendo que o polígono da figura é:

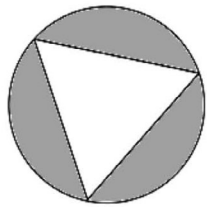
a) Um quadrado



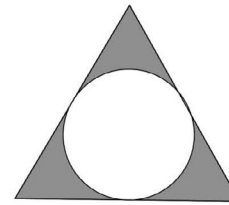
b) Um retângulo



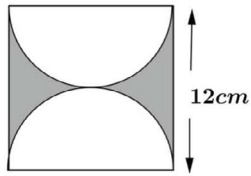
c) Um triângulo equilátero de lado 3cm



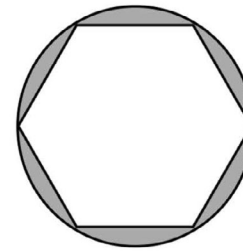
d) um triângulo equilátero de lado 8cm



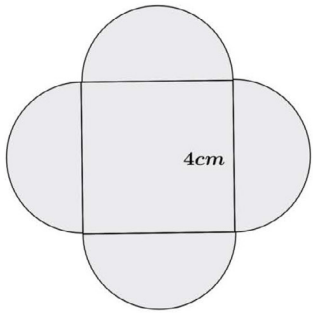
e) Um quadrado



f) Um hexágono regular de lado 10cm

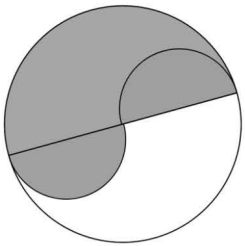


10)Calcule a área da figura abaixo, sabendo que o polígono é um quadrado.

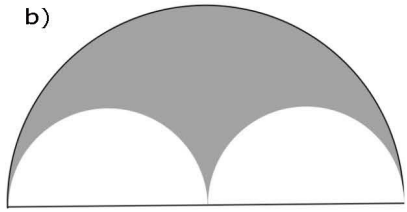


11)Calcule a área da parte escura, sabendo que o círculo maior possui diâmetro 12cm.

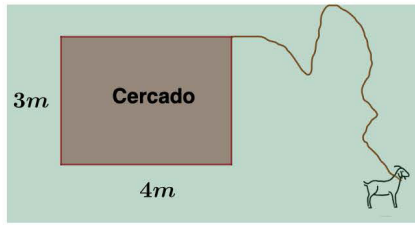
a)



b)



12) Um bode foi amarrado em um cercado retangular que possui em sua volta um capinzal, conforme a figura. Se a corda em que o bode foi preso mede 6 metros, qual a área máxima de capim que o bode pode alcançar para se alimentar?



13)Nos países em que se adota o sistema métrico, o diâmetro ou a circunferência de uma árvore são tomados a altura do peito (1,30 m), e por esta razão denominada de DAP (diâmetro a altura do peito) ou CAP (circunferência a altura do peito).

Fonte: (SILVA e NETO, 1979)

Como a secção transversal do tronco se aproxima da forma circular, para propósitos práticos, usamos as mesmas fórmulas para uma circunferência perfeita. Nesse contexto, calcule:

a) A relação entre a DAP e a CAP?

b) A área da secção transversal de uma árvore em função da DAP.

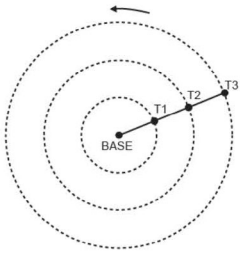
14)(ENEM) Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move-se com velocidade constante.

Um pivô de três torres (T1, T2 e T3) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre T1 são iguais a 50 m. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em 25 horas. Use 3 como aproximação para π.

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres T1, T2 e T3 devem ser, em metro por hora, de

a) 12, 24 e 36.
b) 6, 12 e 18.
c) 2, 4 e 6.
d) 300, 1200 e 2700.
e) 600, 2400 e 5400.



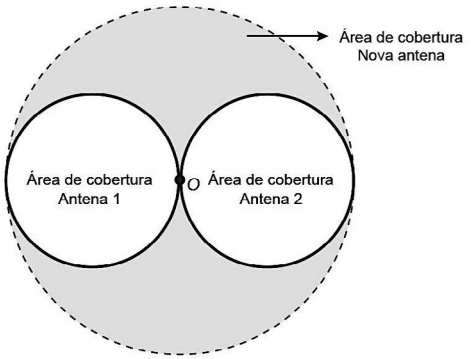


15)(ENEM) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O como mostra a figura:

O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em quanto?

a) 8π.
b) 12π.
c) 16π.
d) 32π.
e) 64π.



CAPÍTULO

11

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

11. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Estudamos a trigonometria com as definições de seno, cosseno e tangente de ângulos em triângulos. Nesta unidade, ampliaremos e aplicaremos essas definições em uma circunferência. Esses estudos iniciais serão a base para o desenvolvimento das funções trigonométricas, conteúdo que possui várias aplicações em diversas ciências, além da matemática, principalmente na modelagem de fenômenos periódicos.

11.1. Elementos iniciais

A seguir estão alguns elementos da circunferência já conhecidos e outros que podem ser importantes.

Elementos (ver figura 11.1.1):

- A : centro da circunferência;
- $\overline{AB} = r$: raio da circunferência;
- $\overline{LD} = d$: diâmetro da circunferência;
- $\overline{EF}$: corda da circunferência;
- $\overset{\frown}{HI}$: arco da circunferência;
- $\overset{\frown}{JAG} = \alpha$: ângulo central.
- C : comprimento da circunferência.

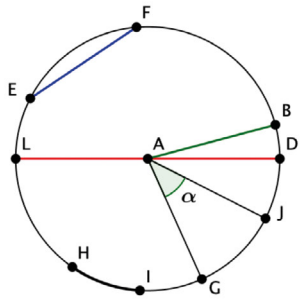


Figura 11.1.1

11.2. Unidades de medidas de arcos

As unidades que iremos usar para medir arcos (ou ângulos) são: o grau, já conhecido, e o radiano.

Definição 11.2.1: Arco de $1\,rad$ (um radiano) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

Aplicando uma regra de três simples a partir dessa definição, temos:

$$\begin{array}{ll} 1\,rad & r \\ x & 2.\pi.r \end{array} \Rightarrow r.x = 2.\pi.r.1\,rad \Rightarrow \boxed{x = 2\pi\,rad}.$$

Isso significa que uma circunferência completa (360º) equivale a 2π rad.

Por simplicidade, nos cálculos de transformações de unidade de medidas, seja para transformar um arco que está em graus em radianos ou um arco em radianos em graus, utilizamos a equivalência de sua metade, ou seja, 180º equivale a $\pi\ rad$.

Exemplo: Vamos transformar 30º em radianos:

Solução: Comumente, utilizamos uma regra de três.

$$\begin{matrix} 180^o & \rightarrow & \pi\ rad \\ 30^o & \rightarrow & x \end{matrix} \Rightarrow 180x = 30\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}\ rad}.$$

2º exemplo: Vamos transformar 220º em radianos:

Solução:

$$\begin{matrix} 180^o & \rightarrow & \pi\ rad \\ 220^o & \rightarrow & x \end{matrix} \Rightarrow 180x = 220\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{220\pi}{180} \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{9}\ rad}.$$

3º exemplo: Vamos transformar $\frac{7\pi}{9}\ rad$ em graus:

Solução: A regra de três é a mesma, apenas muda a posição de x que fica abaixo de 180°.

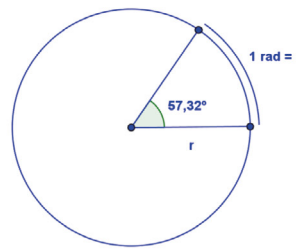
$$\begin{matrix} 180^o & \rightarrow & \pi\ rad \\ x & \rightarrow & \frac{7\pi}{9} rad \end{matrix} \Rightarrow \pi x = 180.\frac{7\pi}{9} \Rightarrow x = \frac{1260}{9} \Rightarrow \boxed{x = 140°}.$$

4º exemplo: Quantos graus possui 1 rad?

Solução:

$$\begin{matrix} 180^o & \rightarrow & \pi\ rad \\ x & \rightarrow & 1\ rad \end{matrix}$$

$$\pi.x = 180 \Rightarrow x = \frac{180}{\pi} \Rightarrow x = \frac{180}{3{,}14} \Rightarrow \boxed{x \cong 57{,}32°}.$$



Ou se preferir: $0{,}32 \times 60' = 19{,}2$ minutos; $0{,}2 \times 60'' = 12$ segundos $\Rightarrow 57°19'12''$.

Isso significa que um arco do tamanho do raio de uma circunferência, mede 57°19'12''.

5º exemplo: Qual o menor ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, quando este marca 10h30min?

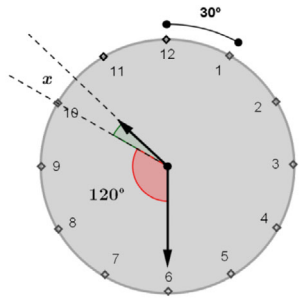
Solução: Uma volta completa de um relógio corresponde a 360°. Como o mostrador é dividido em 12 partes (12 horas), cada parte equivale a $\frac{360°}{12} = 30°$. Às 10h30min, o ponteiro dos minutos está exatamente sobre a marca 6, e da marca 6 à marca 10, temos 4 partes que equivale a 120° (ver figura). O valor do deslocamento x, do ponteiro das horas,

é proporcional aos minutos e pode ser calculado usando a seguinte regra de três simples:

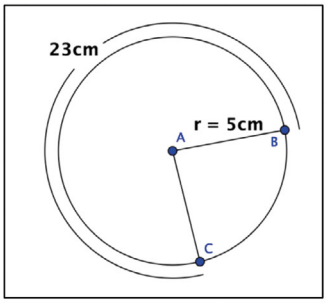
60min ⟶ 30°
30min ⟶ x

$$60x = 30.30 \Rightarrow x = \frac{900}{60} \Rightarrow \boxed{x = 15°}.$$

Assim, o menor ângulo entre os ponteiros é $120 + 15 = 135°$ e o maior é $360° - 135° = 225°$.



6º exemplo: De acordo com a figura abaixo, qual o valor do ângulo $B\hat{A}C$?



Solução: A circunferência completa possui comprimento $C = 2.\pi.r$. Como $r = 5cm$ e $\pi \cong 3{,}14$, temos que $C = 2.(3{,}14).5 = 31{,}4$ cm. Assim, $\overset{\frown}{BC} = 31{,}4 - 23 = 8{,}4cm$.

31,4cm ⟶ $2\pi\ rad$
8,4cm ⟶ x

$$31{,}4x = 8{,}4\ .2\ .3{,}14 \Rightarrow x = \frac{52{,}75}{31{,}4} \Rightarrow \boxed{x = 1{,}68\ rad}.$$

EXERCÍCIOS 11.1

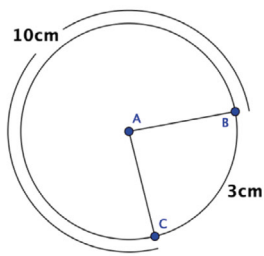
1) Em cada item, expresse a medida em radianos:

a) 45º
b) 330º
c) 72º
d) 1º

2) Em cada item, expresse a medida em graus:

a) $\frac{5\pi}{9}\ rad$
b) $\frac{\pi}{3}\ rad$
c) $\frac{7\pi}{18}\ rad$
d) $3\ rad$

3) De acordo com a figura a seguir, qual o valor do ângulo $B\hat{A}C$ em radianos, sabendo que $\overset{\frown}{BC}$ mede 3cm?



4) Qual o menor ângulo formado entre os ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, quando este marcar:

a) 9h15min

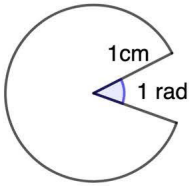
b) 11h45min

c) 7h35min

5) (UFSCAR-SP) Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que melhor aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é: (considere $\pi = 3,14$)

a) 37,7 cm. b) 25,1 cm. c) 20 cm. d) 12 cm. e) 3,14 cm.

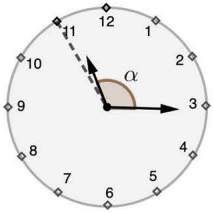
6) (UNESP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é:

a) $\pi - 1$. b) $\pi + 1$. c) $2\pi - 1$. d) 2π. e) $2\pi + 1$.

7) (UFLAVRAS) Às 11 horas e 15 minutos, o ângulo α (figura abaixo) formado pelos ponteiros de um relógio mede:



a) 90°

b) 112°30'

c) 82°30'

d) 120°

e) 127°30'

8) (UEL) Os primeiros relógios baseavam-se no aparente movimento do Sol na abóboda celeste e no deslocamento da sombra projetada sobre a superfície de um corpo iluminado pelo astro. Considere que: a Terra é esférica e seu período de rotação é de 24 horas no sentido oeste-leste; o tempo gasto a cada 15° de rotação é de 1 hora; o triângulo Brasília/Centro da Terra/Luzaka (Zâmbia) forma, em seu vértice central, um ângulo de 75°.



A hora marcada em Luzaka, num relógio solar, quando o sol está a pino em Brasília é (dica: sol a pino equivale às 12h):

a) 5 horas. b) 9 horas. c) 12 horas. d) 17 horas. e) 21 horas.

11.3. Ciclo trigonométrico

Ciclo trigonométrico ou circunferência trigonométrica é toda circunferência de raio unitário $(r = 1)$ disposta em um plano cartesiano, cujo centro coincide com a origem do sistema (0,0), consoante a figura 11.3.1 seguinte.

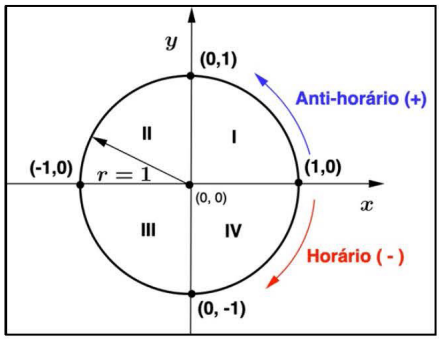


Figura 11.3.1

Onde I, II, III e IV são respectivamente: 1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante e 4º quadrante.

O sentido positivo é o anti-horário e o negativo é o horário.

Os principais arcos do ciclo ficam assim dispostos (figura 11.3.2):

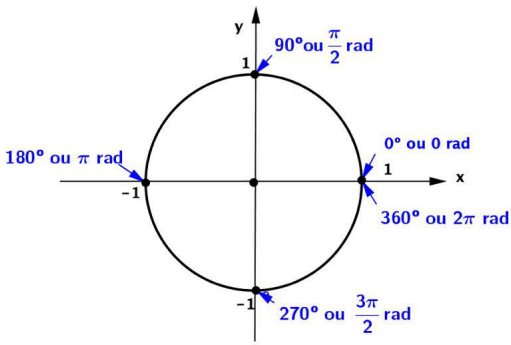


Figura 11.3.2

Como o raio do ciclo trigonométrico é unitário, a medida de um arco em radianos e seu comprimento é igual. Dessa forma, podemos denotar $\frac{\pi}{2}\ rad$ por apenas $\frac{\pi}{2}$ (sem o rad).

Veja como exemplos de representação no ciclo trigonométrico, os arcos de 60º (figura 11.3.3), 240º (figura 11.3.4), -30º (figura 11.3.5) e -120º (figura 11.3.6).

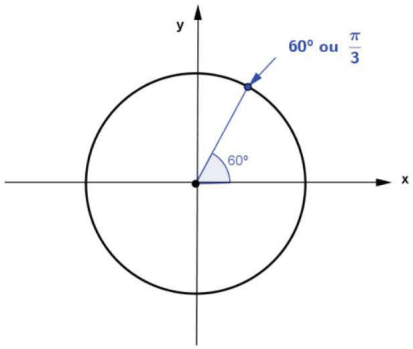


Figura 11.3.3

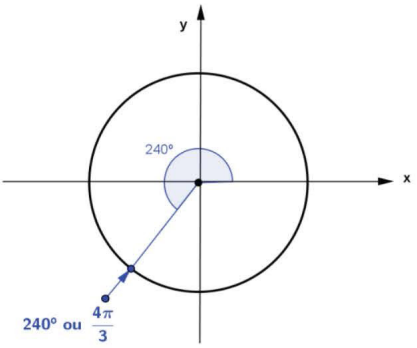


Figura 11.3.4

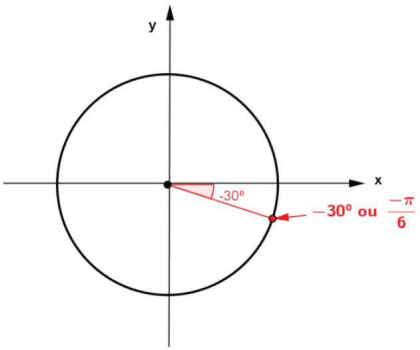


Figura 11.3.5

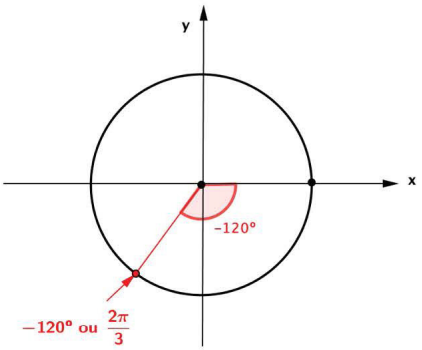


Figura 11.3.6

Perceba ainda que os arcos de 240º e -120º possuem mesmo ponto de representação, mesma extremidade, por esse motivo são denominados de arcos côngruos, assunto da subseção seguinte.

11.3.1. Arcos côngruos

No ciclo trigonométrico, há arcos maiores que uma volta ou arcos negativos que possuem a mesma extremidade, ou seja, são congruentes entre si. Além disso, esses arcos negativos são congruentes a um outro arco positivo menor (ou igual) a 360º. A esse último arco, denominamos de **1ª determinação positiva**.

Todos os arcos côngruos podem ser representados pela expressão $\alpha + k.360°$ ou $\alpha + k.2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), onde α é um arco côngruo.

Exemplos:

1) 480º = 120º, pois $\overbrace{120°}^{\alpha} + \overbrace{1}^{k}. 360° = 480°$.

2) 1050º = 690º = 330º, pois $\overbrace{330^o}^{\alpha} + \overbrace{2}^{k}.360^o = \mathbf{1050^o}$ e $\overbrace{330^o}^{\alpha} + \overbrace{1}^{k}.360^o = \mathbf{690^o}$.

3) -250º = 110º, pois -250º + 360º = **110º** (1ª determinação positiva)

4) -1380º = -300º = 60º. Pois $\overbrace{-300^o}^{\alpha} - \overbrace{3}^{k}.360^o = -1380^o$ e -300º + 360º = **60º**.

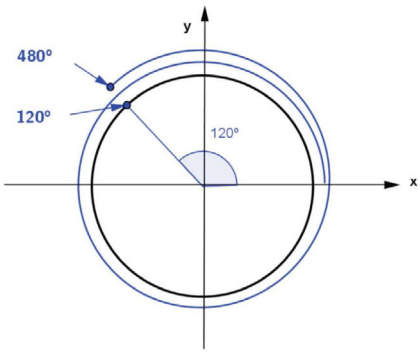
Onde $\alpha = -300°$ e 60° são arcos côngruos e 60° é a 1ª determinação positiva.

Utilizando radianos, temos

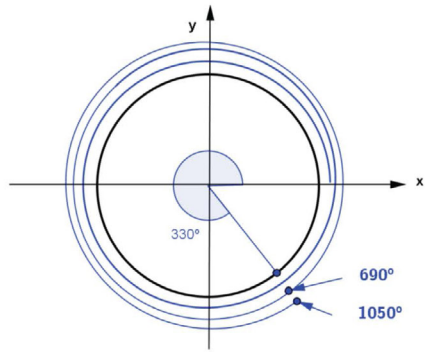
$$-1380° = -\frac{23\pi}{3} = -\overbrace{\frac{5\pi}{3}}^{\alpha} - \overbrace{4}^{k}.2\pi \Rightarrow \overbrace{\frac{-5\pi}{3}}^{\alpha=-300°} + 2\pi = \overbrace{\frac{\pi}{3}}^{60°} \text{ (1ª determinação positiva).}$$

Representação no ciclo:

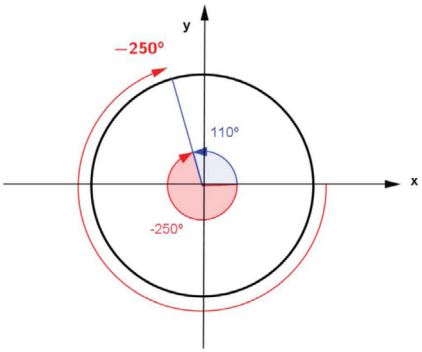
1)



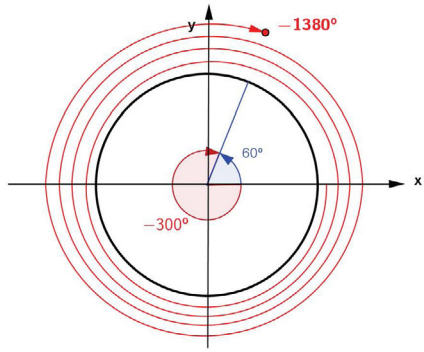
2)



3)



4)



Um método prático para encontrar um arco côngruo, consiste em utilizar o resto da divisão por 360º.

Exemplo: $4122^o \Rightarrow \begin{array}{r|l} 4122^o & 360^o \\ -3960 & 11 \\ \hline 162^o & \end{array}$ (1^o det. positiva) $\Rightarrow \boxed{162^o + k.360^o}$

Para valores de k inteiros podemos encontrar vários arcos côngruos a $4122°$ usando a expressão $162^o + k.360^o$.

Para $k = 1 \Rightarrow 162^o + 1.360^o = 522^o$

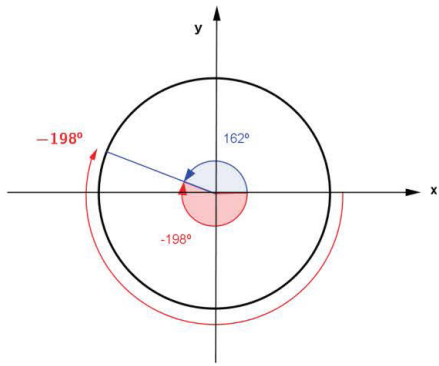
Para $k = 2 \Rightarrow 162^o + 2.360^o = 882^o$

Para $k = 5 \Rightarrow 162^o + 5.360^o = 1962^o$

Para $k = -1 \Rightarrow 162^o - 1.360^o = -198^o$

Para $k = -4 \Rightarrow 162^o - 4.360^o = -1278^o$

Veja uma representação para $k = 0$ e $k = -1$ na figura ao lado.



2º exemplo: $-2448^o \Rightarrow \begin{array}{r|l} -2448^o & 360^o \\ 2160 & 6 \\ \hline -288^o & \end{array}$ (1^o arco côngruo) $\Rightarrow \boxed{-288^o - k.360^o}$.

Para $k = -1 \Rightarrow -288° + 1.360^o = 72°$ (1^a determinação positiva).

Para $k = 1 \Rightarrow -288° - 1.360^o = -648°$.

3º exemplo: $\frac{44\pi}{3} \Rightarrow \frac{42\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \overbrace{14}^{2k}\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{2\pi}{3} + k.2\pi}$.

EXERCÍCIOS 11.2

1) Represente o arco no ciclo trigonométrico e determine o quadrante em que está localizada a extremidade.

a) 265^o

b) -355^o

c) $\frac{5\pi}{9}$

d) $\frac{-7\pi}{3}$

2) Em cada arco a seguir, calcule a 1ª determinação positiva e a expressão $\alpha + k.360°$ ou $\alpha + k.2\pi$ (com $k \in \mathbb{Z}$).

a) 1301^o

b) -7435^o

c) $\frac{11\pi}{4}$

d) $\frac{-59\pi}{18}$

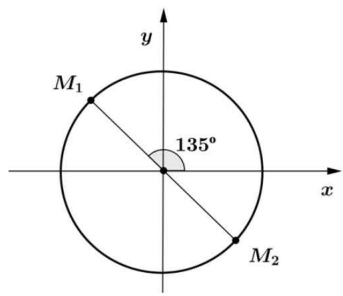
3) (UFC–CE) Dois arcos trigonométricos são côngruos se, e somente se, tiverem a mesma extremidade. Qual das medidas abaixo é um arco côngruo ao arco

trigonométrico de $\frac{\pi}{7}\ rad$?

a) $\frac{22\pi}{7} rad$ b) $\frac{6\pi}{7} rad$ c) $\frac{8\pi}{7} rad$ d) $\frac{29\pi}{7} rad$ e) $\frac{13\pi}{7} rad$

4) (UFRGS-RS) Qual é a expressão geral, em radianos, dos arcos com extremidades nos ponto indicados ($k \in \mathbb{Z}$)?

a) $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ b) $\frac{3\pi}{4} + k\pi$ c) $\frac{3\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi$ d) $\frac{\pi}{4} + k\pi$

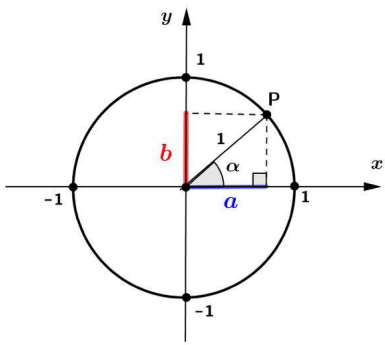


5) A roda de uma motocicleta girou 11445° e parou. Sabendo que o raio da roda é igual a 30cm, qual a dessa distância percorrida (use 3,14 para π)?

11.4. Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico

As razões trigonométricas seno, cosseno e tangente em um triângulo retângulo serão aplicadas agora no ciclo trigonométrico.

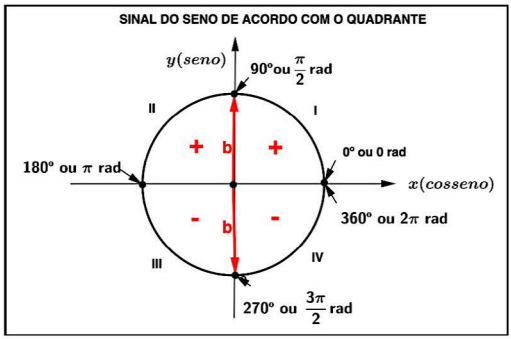
Sendo α o ângulo central, temos

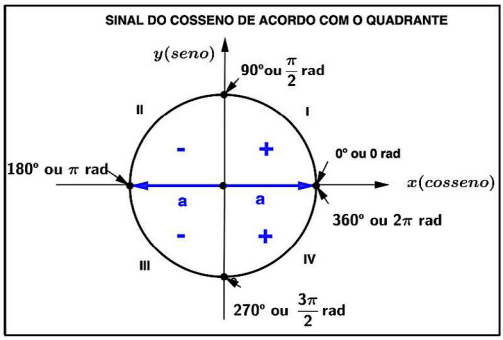


$$sen\alpha = \frac{Cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{1} = b \Rightarrow \boxed{sen\alpha = b}.$$

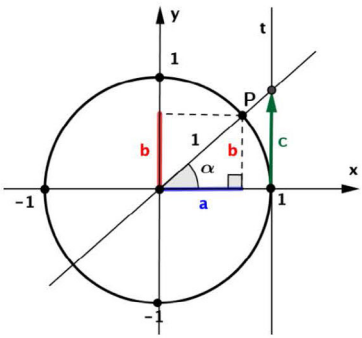
$$cos\alpha = \frac{Cateto\ adjacente}{hipotenusa} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow \boxed{cos\alpha = a}.$$

Portanto, $sen\alpha$ corresponde a projeção do ponto P sobre o eixo y (valor de b) e $cos\alpha$ corresponde a projeção do ponto P sobre o eixo x (valor de a). Assim sendo, a depender de qual quadrante se encontra o arco α (ou o ponto P), o sinal de $sen\alpha$ e $cos\alpha$ podem ser positivos ou negativos. As ilustrações a seguir mostram, respectivamente, os sinais do seno e do cosseno de acordo com o quadrante.





Quanto à tangente, podemos considerar uma reta t paralela ao eixo y e tangente ao ciclo trigonométrico, conforme a figura a seguir.



Aplicando as razões de semelhança de triângulos, vemos que

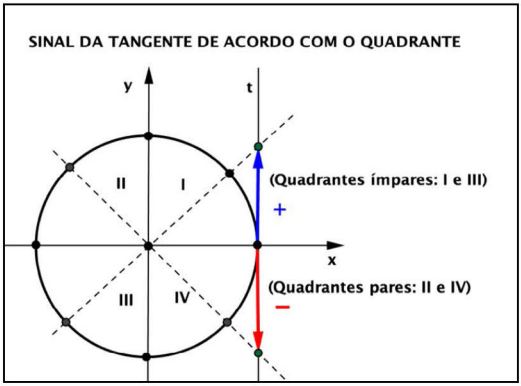
$$\frac{b}{a} = \frac{c}{1} \Rightarrow \boxed{c = \frac{b}{a}}.$$

Como $sen\alpha = b$ e $cos\alpha = a$, concluímos que

$$c = \frac{b}{a} = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \Rightarrow \boxed{c = tg\alpha}.$$

Dessa forma, o valor do segmento c é o valor da tangente de α.

Se c estiver acima do eixo x, o valor da tangente de α será positivo e se estiver abaixo do eixo x, será negativo. O que implica que o valor da tangente será positivo, para arcos nos quadrantes ímpares, e negativo, para arcos nos quadrantes pares. Veja a ilustração na figura seguinte.



Outra forma de verificar o sinal da tangente é analisando o jogo de sinais de $sen\alpha$ e de $cos\alpha$ na fórmula

$$tg\,\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}.$$

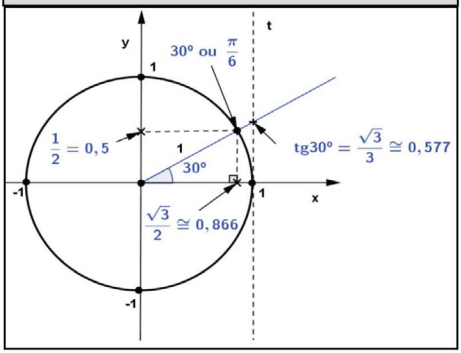
Exemplo: Se α estiver no 4º quadrante, o $sen\,\alpha$ será negativo e o $cos\,\alpha$ será positivo, então a tangente será

$$tg\,\alpha = \frac{-}{+} = - \text{ (negativa)}.$$

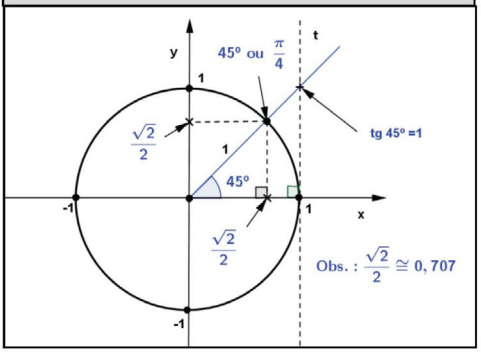
11.4.1. Ângulos notáveis no ciclo trigonométrico:

A seguir estão os ângulos notáveis 30º, 45º e 60º, e os seus respectivos valores de seno, cosseno e tangente, representados no ciclo trigonométrico.

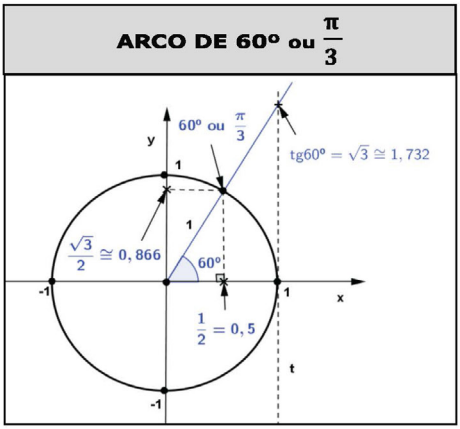
ARCO DE 30º ou $\frac{\pi}{6}$

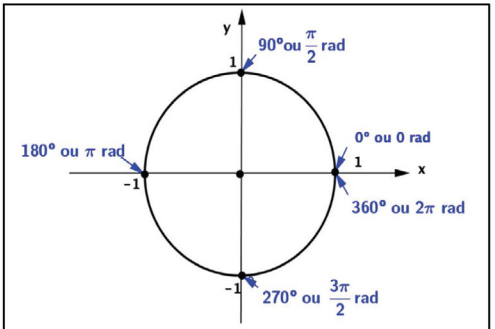


ARCO DE 45º ou $\frac{\pi}{4}$



ARCO DE 60º ou $\frac{\pi}{3}$





α	*sen* α	*cos* α	$tg\ \alpha = \frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos \alpha}$
0º ou 0 (360º ou 2π)	0	1	0 (zero)
90º ou $\frac{\pi}{2}$	1	0	∄ (não existe)
180º ou π	0	-1	0 (zero)
270º ou $\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∄ (não existe)

Outros valores imediatos para seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico, estão na tabela ao lado.

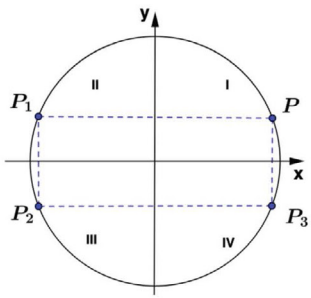
11.5. Redução ao 1º quadrante

Existem arcos que não estão no 1º quadrante e que possuem os mesmos valores, em módulo (desconsiderando o sinal), dos ângulos notáveis 30º, 45º e 60º.

A verificação dessa equivalência é denominada de redução ao 1º quadrante.

Na figura a seguir, os arcos P_1, P_2 e P_3 possuem em módulo os mesmos valores de seno, cosseno e tangente do arco P que está no 1º quadrante.

Assim, ao saber o valor de seno, cosseno e tangente do arco P, saberemos os valores de seno, cosseno e tangente dos arcos P_1, P_2 e P_3 (e vice-versa), restando apenas verificar os sinais de cada um.



Para saber qual é esse arco P, usamos os conhecimentos de geometria plana, que resultam em uma fórmula que varia de acordo com o quadrante. É o que veremos a seguir.

11.5.1. Redução do 2º para o 1º quadrante

Pela figura 11.5.1.1, o arco α que está no 2º quadrante, tem os mesmos valores de seno, cosseno e tangente do arco $180° - \alpha$ (ou $\pi - \alpha$) do 1º quadrante, com os seguintes sinais:

$sen\ \alpha = +sen(180° - \alpha)$ ou $sen\ \alpha = +sen(\pi - \alpha)$

$cos\ \alpha = -cos(180° - \alpha)$ ou $cos\ \alpha = -cos(\pi - \alpha)$

$tg\ \alpha = -tg(180° - \alpha)$ ou $tg\ \alpha = -tg(\pi - \alpha)$

Observe pelo ciclo trigonométrico representado na figura 11.5.1.2, que um arco no 2º quadrante possui seno positivo, cosseno e tangente negativos.

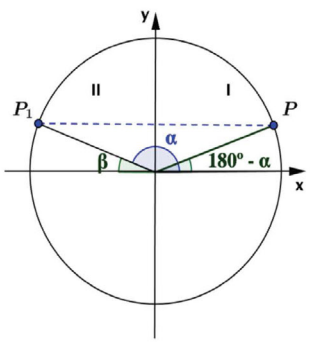


Figura 11.5.1.1

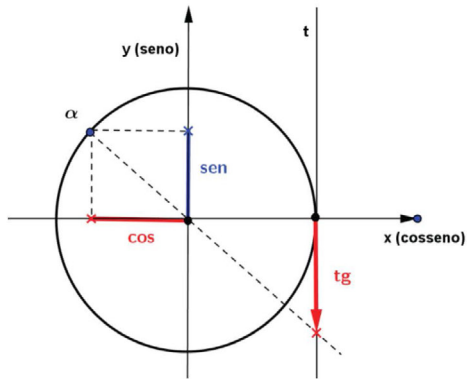


Figura 11.5.1.2

11.5.2. Redução do 3º para o 1º quadrante

Qualquer arco α que esteja no 3º quadrante, terá os mesmos valores de seno, cosseno e tangente do arco $\alpha - 180°$ ou $\alpha - \pi$ do 1º quadrante, porém, com os seguintes sinais (ver figura 11.5.2.1):

$sen\ \alpha = -sen(\alpha - 180°)$	ou	$sen\ \alpha = -sen(\alpha - \pi)$
$cos\ \alpha = -cos(\alpha - 180°)$	ou	$cos\ \alpha = -cos(\alpha - \pi)$
$tg\ \alpha = +tg(\alpha - 180°)$	ou	$tg\ \alpha = +tg(\alpha - \pi)$

Observe pelo ciclo trigonométrico na figura 11.5.2.2, que um arco no 3º quadrante possui tangente positiva, seno e cosseno negativos.

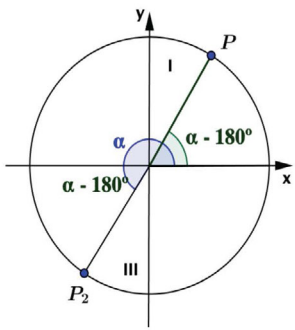


Figura 11.5.2.1

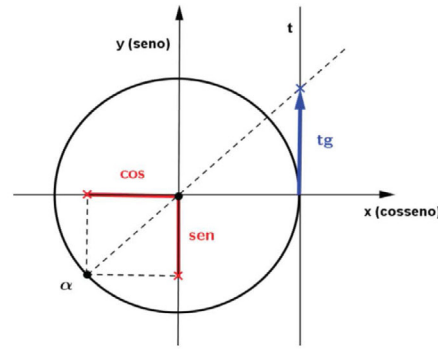


Figura 11.5.2.2

11.5.3. Redução do 4º para o 1º quadrante.

Pela figura 11.5.3.1, qualquer arco α que esteja no 4º quadrante, terá os mesmos valores de seno, cosseno e tangente do arco $360° - \alpha$ ou $2\pi - \alpha$ do 1º quadrante, no entanto, com os seguintes sinais:

$sen\ \alpha = -sen(360° - \alpha)$	ou	$sen\ \alpha = -sen(2\pi - \alpha)$
$cos\ \alpha = +cos(360° - \alpha)$	ou	$cos\ \alpha = +cos(2\pi - \alpha)$
$tg\ \alpha = -tg(360° - \alpha)$	ou	$tg\ \alpha = -tg(2\pi - \alpha)$

Observe pelo ciclo trigonométrico na figura 11.5.3.2, que um arco no 4º quadrante possui cosseno positivo, seno e tangente negativos.

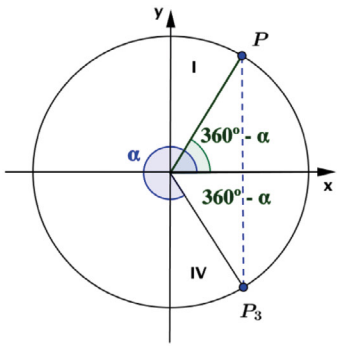


Figura 11.5.3.1

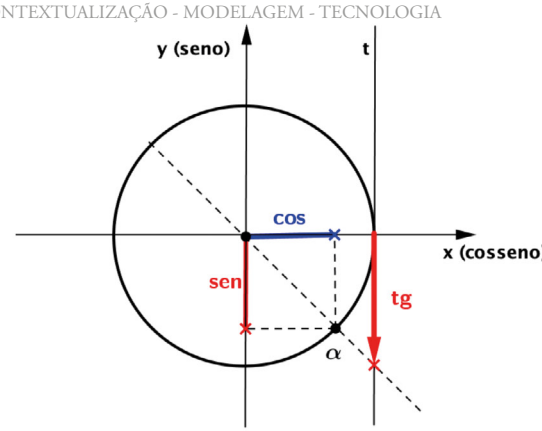


Figura 11.5.3.2

Exemplo: Verifique os sinais do seno, cosseno e tangente dos seguintes arcos.

a) 131º

Solução: Esse arco está no II quadrante, logo possui seno positivo, cosseno negativo e tangente negativa.

b) 277º

Solução: Como esse arco está no IV quadrante, ele possui seno negativo, cosseno positivo e tangente negativa.

c) $\frac{19\pi}{18}$ rad

Dica: Se tiver dificuldade em saber qual o quadrante que se encontra um arco em radianos, converta-o para grau.

Solução:

$$\begin{array}{ccc} 180^\circ & \longrightarrow & \pi \text{ rad} \\ x & \longrightarrow & \frac{19\pi}{18} \text{ rad} \end{array}$$

$$\Rightarrow \pi . x = 180 . \frac{19\pi}{18} \Rightarrow x = \frac{3420}{18} \Rightarrow \boxed{x = 190^\circ}.$$

O arco $\alpha = 190°$ está no III quadrante e desse modo possui seno negativo, cosseno negativo e tangente negativa.

2º exemplo: Calcule os valores de seno, cosseno e a tangente de:

a) 150º

Solução: O arco $\alpha = 150°$ está no II quadrante, logo tem os mesmos valores de seno, cosseno e tangente de $180° - \alpha$ com os seguintes sinais

$$sen\ 150^o = sen(180° - 150°) = sen\ 30° = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{sen\ 150° = \frac{1}{2}}.$$

$$cos\ 150^o = -cos(180^o - 150^o) = -cos\ 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{cos\ 150^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$tg\ 150^o = -tg(180^o - 150^o) = -tg\ 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{tg\ 150^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

b) 1020^o

Solução: Vamos dividir $1020°$ por $360°$: $1020^o \;|\; 360^o$

$-720 \quad\quad 2$

300^o

O arco $300°$ é côngruo à $1020°$ e está no IV quadrante. Logo, tem os mesmos valores de seno, cosseno e tangente de $360° - \alpha$, ou seja, de $360° - 300° = 60°$, porém, com os seguintes sinais

$$sen\ 1020° = -sen\ 60° \Rightarrow \boxed{sen\ 1020° = -\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$cos\ 1020° = cos\ 60° \Rightarrow \boxed{cos\ 1020° = \frac{1}{2}}.$$

$$tg\ 1020° = -tg\ 60° \Rightarrow \boxed{tg\ 1020° = -\sqrt{3}}.$$

c) $\frac{5\pi}{4}$ rad

Solução: Como arco $\frac{5\pi}{4}$ está no III quadrante, ele possui os mesmos valores de seno, cosseno e tangente de $\alpha - \pi$, ou melhor, de $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ (equivale a $45°$). Mas, com os seguintes sinais:

$$sen\ \frac{5\pi}{4} = -sen\ \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{sen\ \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$cos\ \frac{5\pi}{4} = -cos\ \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{cos\ \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

$$tg\ \frac{5\pi}{4} = tg\ \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{tg\ \frac{5\pi}{4} = 1}.$$

3º exemplo: Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $cosx = -\frac{1}{2}$

Solução: O arco cujo cosseno é $\frac{1}{2}$ no I quadrante é o $\frac{\pi}{3}$. E os quadrantes cujo cosseno é negativo, são os quadrantes II e III. Aplicando as duas reduções, encontramos:

– Do 2º para o 1º quadrante: $\pi - \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ $(120°)$.

– Do 3º para o 1º quadrante: $\alpha - \pi = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \pi \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$ $(240°)$.

Como os arcos apresentam o mesmo valor de cosseno para mais de uma volta, a solução é $S = \{x \in \mathbb{R} |\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

b) $sen(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

Solução: Verificando os quadrantes em que o seno é negativo (III e IV) e aplicando a redução ao 1º quadrante, temos para $k \in \mathbb{Z}$, que

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \pi + 2k\pi}\ ou\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}.$$

Ambas são soluções para a equação.

EXERCÍCIOS 11.3

1) Calcule os valores de seno, cosseno e tangente dos seguintes arcos:

a) 330°

b) -870°

c) $\frac{7\pi}{4}$

d) $\frac{35\pi}{4}$

2) Calcule o valor das expressões abaixo:

a) $\frac{sen\ 540° + cos\ 450° + tg765°}{tg180° + cos\ 360° + sen90°}$

b) $\frac{sen\ 270° + cos\ 1800° + tg0°}{tg1260° + cos(-45°) + sen135°}$

3) Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $sen\ 2x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

b) $cos\ (x - \frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{-1}{2} + sen\ 4x = -1$

4) (UEL) Dos números a seguir, o mais próximo de sen5° é

a) 1 b) 1/2 c) 0 d) -1/2 e) -1

5) (UFLA - MG) A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é $\frac{\pi}{4}$ rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:

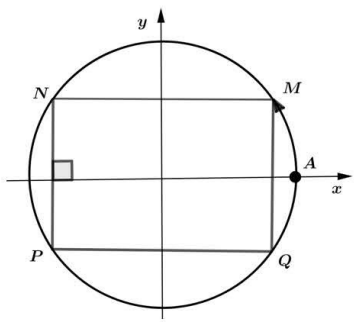
a) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$

b) π e $\frac{3\pi}{2}$

c) $\frac{3\pi}{4}$ e 2π

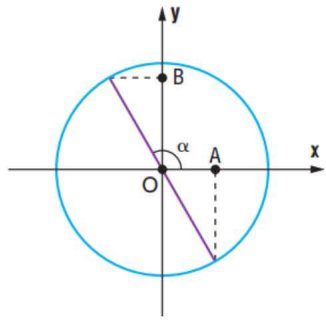
d) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{4}$

e) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{8}$



6) (UFRGS) No círculo trigonométrico da figura abaixo, tem-se $\alpha = 120°$. O valor de $\overline{OA} \cdot \overline{OB}$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{4}$



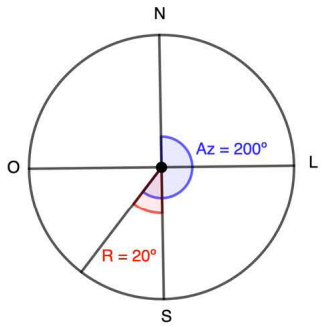
7) (FATEC) Sobre as sentenças:

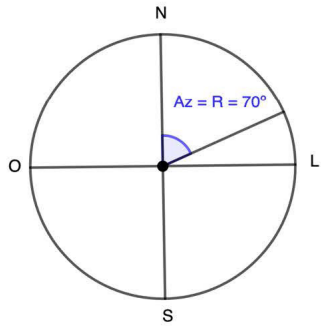
I) sen40° < sen50°
II) cos190° > cos200°
III) tg60° = tg240°

É correto afirma que somente:

a) I é verdadeira
b) II é verdadeira
c) III é verdadeira
d) I e II são verdadeiras
e) I e III são verdadeiras

8) Os conceitos de azimute e rumo são bastante utilizados em topografia, e tem aplicação similar ao ciclo trigonométrico. O azimute (Az) é o ângulo formado entre o Norte e o alinhamento, variando de 0° a 360° e é contado no sentido horário. Enquanto que o rumo (R), é o menor ângulo formado entre a linha Norte e Sul e o alinhamento. Em alguns casos, são congruentes. Ver as figuras a seguir.

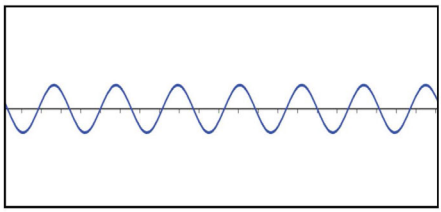




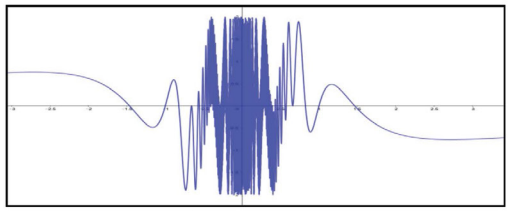
Um topógrafo, utilizando uma estação total, identificou um azimute de 122°. Calcule o rumo acusado na estação.

11.6. Funções circulares

Existem vários fenômenos na natureza que são periódicos, isto é, se repetem sempre após o mesmo intervalo de tempo. As ondas do mar, a propagação do som e da luz, o ciclo respiratório (inspiração e expiração), a safra e entressafra de um cultivo, etc., são excelentes exemplos de fenômenos periódicos.



Sinal periódico

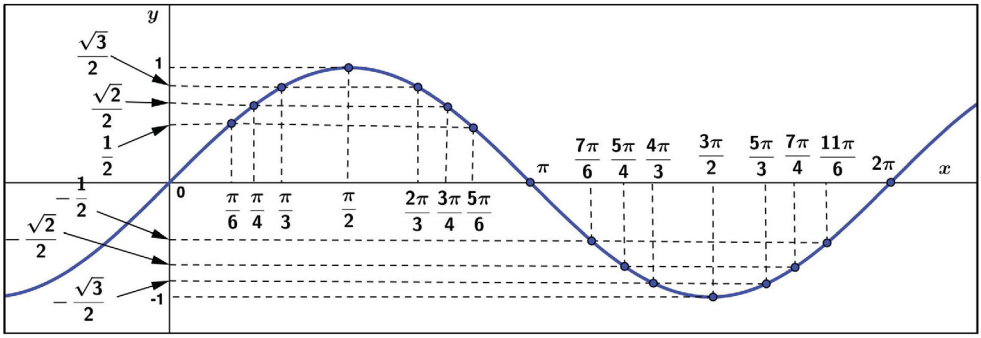


Sinal não -periódico

Eventualmente, fenômenos periódicos podem obedecer a uma determinada função matemática, como a **função seno** e a **função cosseno**, a seguir.

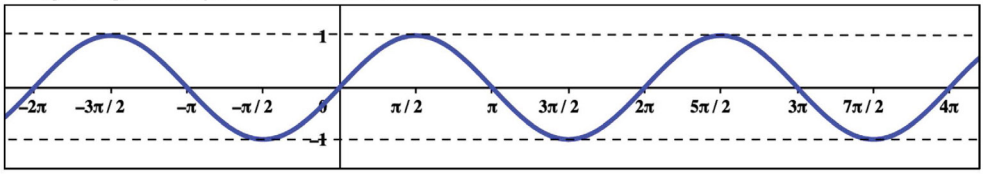
11.6.1. Função seno

A função seno é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = senx$. Veja o gráfico para $x \in [0,2\pi]$ abaixo:



A função seno é crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ e decrescente para $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Veja o gráfico para valores estendidos de x:

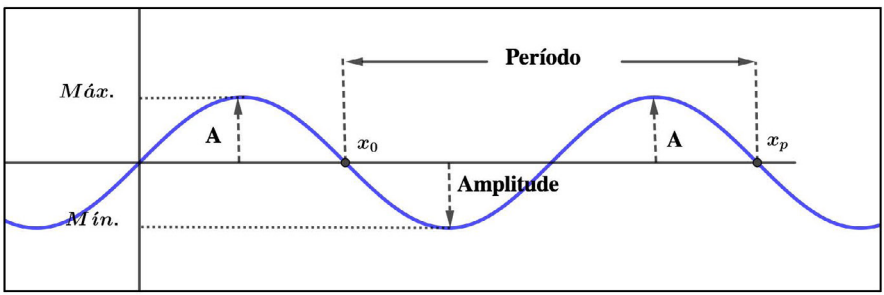


O gráfico da função seno é chamado de **senoide** ou onda senoidal e possui os seguintes elementos: período, amplitude e conjunto imagem.

O **Período (P)** de uma oscilação é o tempo necessário para a oscilação evoluir um ciclo completo. Para efeito de cálculo, basta marcar qualquer ponto x_0 no gráfico e verificar qual o próximo ponto x_p em que a volta se completa. O período será diferença $P = x_p - x_0$.

A **Amplitude (A)** de uma oscilação é a metade da distância entre os valores máximos e mínimos: $A = (Máx - Mín)/2$.

O **Conjunto Imagem (*Im*)** $= [Mín, Máx]$.

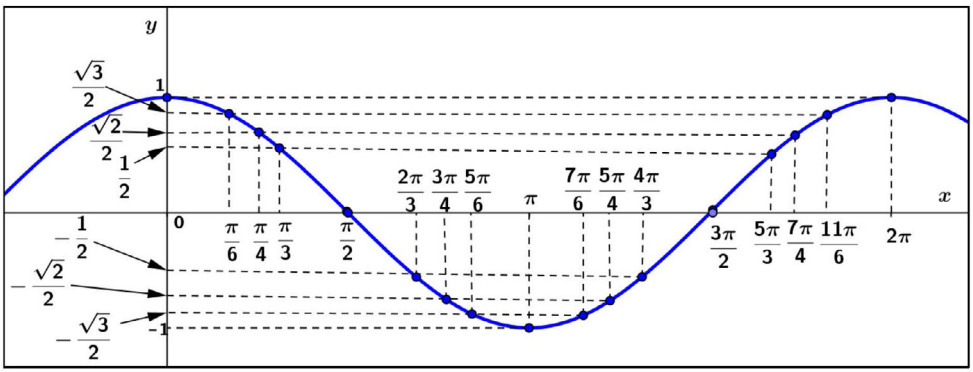


A função senoide apresenta os seguintes elementos:

- **Período:** $x_0 = 0$ e $x_p = 2\pi$, logo $P = 2\pi - 0 \Rightarrow \boxed{P = 2\pi}$.
- **Amplitude:** $a = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$.
- ***Im*** $= [-1,1]$.

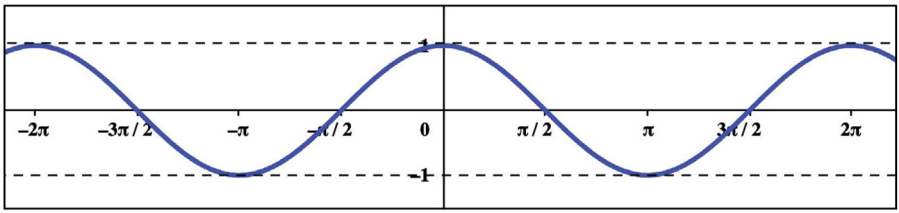
11.6.2. Função Cosseno

A função cosseno é uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cosx$. Veja o gráfico para $x \in [0,2\pi]$ abaixo.



A função cosseno é crescente para $\pi < x < 2\pi$ e decrescente para $0 < x < \pi$.

Veja o gráfico para valores estendidos de x:



O gráfico da função cosseno é chamado de **cossenoide** ou onda cossenoidal e possui os seguintes elementos:

- **Período:** $x_0 = 0$ e $x_p = 2\pi$, logo $P = 2\pi - 0 \Rightarrow \boxed{P = 2\pi}$.
- **Amplitude:** $a = \frac{1-(-1)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$.
- $Im = [-1, 1]$.

11.6.3. Variações da função seno e função cosseno

Algumas funções senoides e cossenoides podem estar na forma:

$$f(x) = a + b.sen(cx + d) \qquad f(x) = a + b.cos(cx + d)$$

Para esses casos, existe um padrão de imagem, período e amplitude.

Quanto ao conjunto imagem: basta ver que $sen(cx + d)$ ou $cos(cx + d)$ pode assumir valor máximo 1 e valor mínimo -1.

Para mínimo: $f(x) = a + b.\underbrace{\overbrace{sen}^{ou\ cos}\ (cx + d)}_{-1} = a - b$

Para máximo: $f(x) = a + b.\underbrace{\overbrace{sen}^{ou\ cos}\ (cx + d)}_{1} = a + b$

$$Im = [a - b, a + b]$$

Dependendo dos sinais de a e b, o valor de $(a - b)$ pode ser maior que $(a + b)$, neste caso, basta inverter as posições.

Quanto ao período: a expressão $(cx + d)$ varia de 0 a 2π.

Para $cx + d = 0$, temos: $\boxed{x = \frac{-d}{c}}$ (1). Para $cx + d = 2\pi$, temos: $\boxed{x = \frac{2\pi - d}{c}}$ (2).

Fazendo (2) – (1), temos o período: $P = \frac{2\pi-d}{c} - \left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow$ $\boxed{P = \frac{2\pi}{|c|}}$

Quanto à **amplitude**: $A = \frac{(Máx - Mín)}{2} = \frac{(a+b-(a-b))}{2} = b \Rightarrow$ $\boxed{A = |b|}$

Como o período e amplitude são grandezas positivas, utilizamos o modulo | | nos coeficientes c e b nas fórmulas.

1º exemplo: Calcule o período, a amplitude, o conjunto imagem e construa o gráfico das seguintes funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3 + sen4x$

Solução: Comparando a função com $f(x) = a + b.sen(cx + d)$, vemos que: $a = 3$; $b = 1$; $c = 4$ e $d = 0$. Assim,

Período: $P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|4|} \Rightarrow \boxed{P = \frac{\pi}{2}}$.

Conjunto imagem: $Im = [a - b, a + b] = [3 - 1{,}3 + 1] \Rightarrow \boxed{Im = [2,4]}$.

A amplitude: $A = |b| = |1| \Rightarrow \boxed{A = 1}$.

Solução sem o uso da fórmula:

O valor do seno na função $f(x) = 3 + sen4x$ é nulo para $4x = 0$ e $4x = 2\pi$, ou seja, para $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Portanto, o **período** é de $\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

O mínimo da função $f(x) = 3 + sen4x$, ocorre quando $sen4x = -1$ e o máximo quando $sen4x = 1$, isto é, $f(x) = 3 - 1 = 2$ é o mínimo e $f(x) = 3 + 1 = 4$ é o valor máximo. Logo, o **conjunto imagem** é: $Im = [2,4]$.

A amplitude: $A = \frac{(Máx - Mín)}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$.

Para construir o gráfico, usaremos os pontos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π.

Para $4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$ e $f(x) = 3 + \underbrace{0}_{sen4x} \Rightarrow \boxed{f(x) = 3}$.

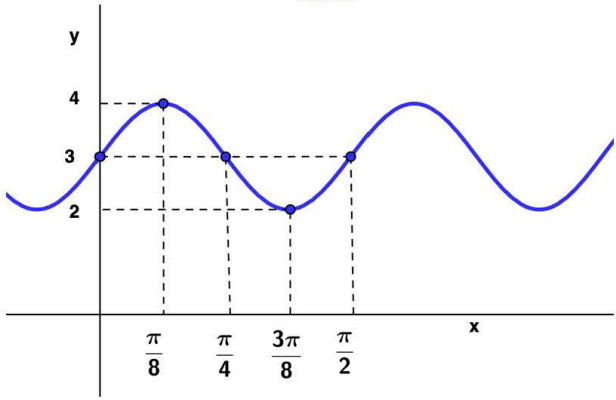
Para $4x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{8}}$ e $f(x) = 3 + \underbrace{1}_{sen\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{f(x) = 4}$.

Para $4x = \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4}}$ e $f(x) = 3 + \underbrace{0}_{sen\pi} \Rightarrow \boxed{f(x) = 3}$.

Para $4x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{8}}$ e $f(x) = 3 + \underbrace{(-1)}_{sen\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2}$.

Para $4x = 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{2}}$ e $f(x) = 3 + \underbrace{0}_{sen2\pi} \Rightarrow \boxed{f(x) = 3}$.

O gráfico:



b) $f(x) = 1 - 2.\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Solução: Comparando a função com $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, vemos que: $a = 1$; $b = -2$; $c = 2$ e $d = \frac{\pi}{3}$. Pelas fórmulas, encontramos

$P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} \Rightarrow \boxed{P = \pi}$.

$Im = [a - b, a + b] = [1 - (-2), 1 - 2] = [3, -1] \Rightarrow \boxed{Im = [-1,3]}$.

$A = |b| = |-2| \Rightarrow \boxed{A = 2}$.

Solução sem o uso da fórmula: O valor do cosseno na função $f(x) = 1 - 2.cos(2x - \frac{\pi}{3})$ é igual à 1 para dois valores: $2x - \frac{\pi}{3} = 0$ e $2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi$. Desse modo,

$2x - \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow 2x = 0 + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$.

$2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow 2x = 2\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$.

O período foi calculado fixando $cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$, mas pode ser calculado para qualquer valor fixo, como zero, por exemplo.

Assim, o período é de $\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi$.

O mínimo da função $f(x) = 1 - 2.cos\left(\underbrace{2x - \frac{\pi}{3}}_{-1 \text{ à } 1}\right)$, acontece quando $cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ e o máximo quando $cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$, ou seja, $f(x) = 1 - 2.1 = -1$ é o mínimo e $f(x) = 1 - 2.(-1) = 3$ é o valor máximo. O que implica em, $Im = [-1, 3]$.

A amplitude $A = \frac{3-(-1)}{2} = 2$.

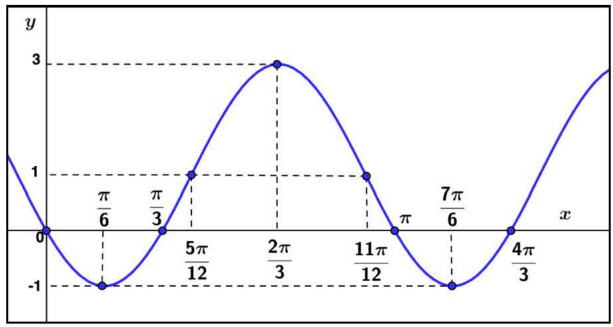
Construção do gráfico: Para maior detalhes de valores do gráfico, convém observar que $f(x) = 0$, se $cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, quando:

- $2x - \frac{\pi}{3} = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{I\ quadrante} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, etc.$
- $2x - \frac{\pi}{3} = \underbrace{\frac{5\pi}{3}}_{IV\ quadrante} + 2k\pi \Rightarrow x = \pi, 2\pi, 3\pi, etc.$

Para os demais pontos usaremos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ e 2π, atribuindo a $2x - \frac{\pi}{3}$.

- Para $2x - \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}}$ e $f(x) = 1 - 2.\underbrace{1}_{cos0} \Rightarrow \boxed{f(x) = -1}$.
- Para $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5\pi}{12}}$ e $f(x) = 1 - 2.\underbrace{0}_{cos\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{f(x) = 1}$.
- Para $2x - \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\pi}{3}}$ e $f(x) = 1 - 2.\underbrace{(-1)}_{cos\pi} \Rightarrow \boxed{f(x) = 3}$.
- Para $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{11\pi}{12}}$ e $f(x) = 1 - 2.\underbrace{0}_{cos\frac{3\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{f(x) = 1}$.

– Para $2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{6}}$ e $f(x) = 1 - 2.\underbrace{1}_{cos2\pi} \Rightarrow \boxed{f(x) = -1}$.



2º exemplo: (UFSC) As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplificadamente, pela função seno. Suponhamos que, para uma determinada maré, a altura h, medida em metros, acima do nível médio, seja dada, aproximadamente, pela fórmula $h(t) = 8 + 4sen\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, em que t é o tempo medido em horas. Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. O valor mínimo atingido pela maré baixa é 8 m.

Solução: O valor mínimo acontece quando $sen\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1$. Assim, $h(t) = 8 + 4.(-1) = 8 - 4 = 4m$. Proposição falsa.

02. O momento do dia em que ocorre a maré baixa é às 12 h.

Solução: O valor mínimo (maré baixa) acontece quando $sen\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1$, isto é, $\frac{\pi}{12}t = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 18\ horas$. Proposição falsa.

04. O período de variação da altura da maré é de 24 h.

Solução: O valor de $\frac{\pi}{12}$ varia de 0 a 2π. Para $\frac{\pi}{12}t = 0 \Rightarrow t = 0$. Para $\frac{\pi}{12}t = 2\pi \Rightarrow t = 24$. Logo, o período é de $24 - 0 = 24\ horas$. Proposição correta.

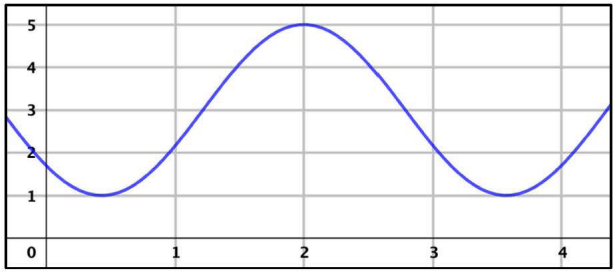
08. O período do dia em que um navio de 10 m de calado (altura necessária de água para que o navio flutue livremente) pode permanecer nesta região é entre 2 e 10 horas.

Solução: Substituindo a altura de $10m$ em $h(t) = 8 + 4sen\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, temos

$$10 = 8 + 4sen\left(\frac{\pi}{12}t\right) \Rightarrow 4sen\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 2 \Rightarrow \boxed{sen\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \frac{1}{2}}.$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}t\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6}\ (I\ Q) \Rightarrow t = 2\ horas \\ \frac{\pi}{12}t = \frac{5\pi}{6}\ (IIQ) \Rightarrow t = 10\ horas\ (proposição\ correta). \end{cases}$$

3º exemplo: O gráfico a seguir mostra a relação entre duas grandezas em um experimento que se observou periódico (oscilatório) com intervalos π. Determine uma função trigonométrica de ajuste para esse experimento.



Solução: De acordo com o gráfico $Im = [1,5]$. Se a função for da forma: $f(x) = a + b.cos(cx + d)$, temos

$$Im = [a-b, a+b] = [1,5] \Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ a+b=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=3 \text{ e } b=2}.$$

O ciclo completo no eixo x (o período) é π, logo

$$P = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{c} \Rightarrow \boxed{c=2}.$$

O valor máximo acontece quando $x = 2$ e na função acontece quando $cx + d = 0$. Isso nos dá

$2.2 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d=-4} \Rightarrow \boxed{f(x) = 3 + 2.cos(2x-4)}$.

Se eventualmente o período não for informado. É possível obter os valores de c e d, utilizamos as coordenadas de máximo e mínimo da função no sitema:

$$\begin{cases} c.x_{Máx} + d = 2\pi \\ c.x_{Mín} + d = \pi. \end{cases}$$

Importante observar pelos gráficos de ambas as funções na inicial, que a função cossenoide está defasada em $\frac{\pi}{2}$ em relação a senoide (verifique!). Portanto, vale a equivalência entre as funções:

- $f(x) = a + b.cos(cx + d) \Leftrightarrow f(x) = a + b.sen(cx + d + \frac{\pi}{2})$
- $f(x) = a + b.sen(cx + d) \Leftrightarrow f(x) = a + b.cos(cx + d - \frac{\pi}{2})$

O exemplo anterior pode ter também uma função seno como resposta:

$$\boxed{f(x) = 3 + 2.sen(2x - 4 + \tfrac{\pi}{2})}.$$ Faça os testes!

As vezes a função oscilatória pode não está no padrão acima, como no exemplo a seguir.

4º exemplo: Calcule o período, a amplitude e o conjunto imagem da função $f(x) = 1 + 6.[sen(2x)]^2$.

Solução: Embora na função $f(x) = 1 + 6.\left[\underbrace{sen(2x)}_{-1 \text{ à } 1}\right]^2$ o seno varie de -1 à 1, o mínimo dessa função acontece quando o $sen\,2x = 0$ (analise o quadrado) e o máximo quando $sen\,2x = 1$ ou $sen\,2x = -1$.

Assim, $f(x) = 1 + 6.0 = 1$ é o mínimo e $f(x) = 1 + 6.1 = 7$ é o valor máximo. O que

nos dá o conjunto imagem: $\boxed{Im = [1,7]}$.

A amplitude é: $A = \frac{7-1}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{A = 3}$.

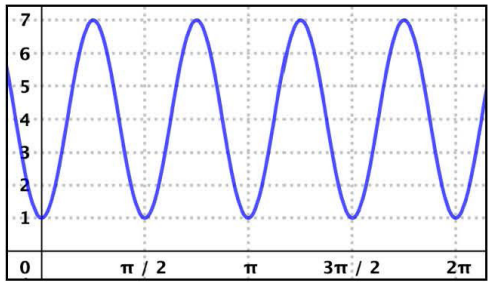
Para o cálculo do período vamos analisar $sen(2x) = 0$. Para essa equação, há as seguintes possibilidades

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$ *ou* $2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Dessa maneira, $P = \frac{\pi}{2} - 0 \Rightarrow \boxed{P = \frac{\pi}{2}}$.

Veja o gráfico da função ao lado.

Importante ressaltar que as fórmulas para cálculo de imagem, período e amplitude, não podem ser aplicadas aqui.

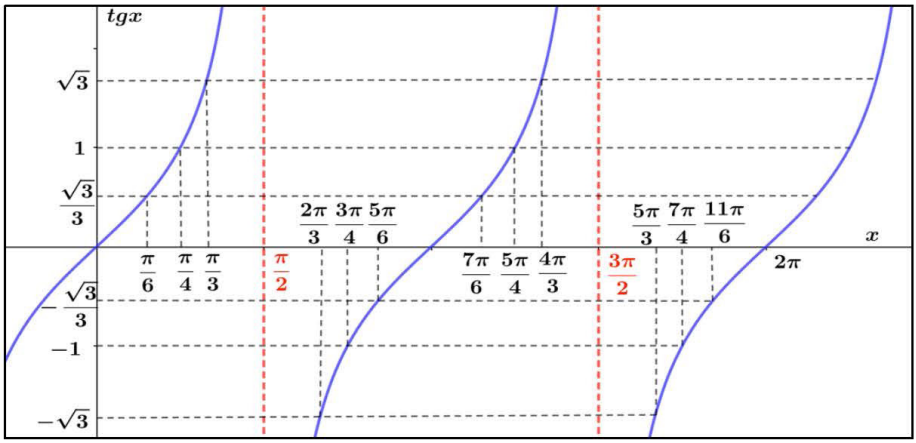


11.6.4. Função tangente

A função tangente é uma função $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = tgx = \frac{senx}{cosx}$ (com $k \in \mathbb{Z}$).

A restrição no domínio $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ deve-se ao fato de $cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ ser nulo e não existir divisão por zero. Por esse motivo, não existem tangentes nesse pontos.

Os valores dos arcos e suas respectivas tangentes estão no gráfico a seguir.



Observações:

✓ O período é π.

✓ O conjunto imagem $Im = \mathbb{R}$.

✓ Não faz sentido amplitude, pois a função cresce infinitamente ao se aproximar das assíntotas.

EXERCÍCIOS 11.4

1) Calcule o período, a amplitude, o conjunto imagem e construa o gráfico das seguintes funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = sen(x - \frac{\pi}{3})$

b) $f(x) = 1 + cos2x$

c) $f(x) = 4 - 3.sen(2x - \frac{\pi}{6})$

d) $f(x) = 7 - 3.[cos(3x)]^2$

2) Calcule o período da seguinte função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cos(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2})$.

3) Calcule o conjunto imagem da seguinte função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 10 + 6.sen(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2})$.

4) Qual a característica da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 7 - cos^2x - sen^2x$?

5) Qual o menor valor de $1/(1 - cos\, x)$ para x real?

6) Construa o gráfico, calcule o período e o conjunto imagem das seguintes funções tangentes:

a) $f(x) = 2 + tgx$

b) $f(x) = 5.tg(2x - \frac{\pi}{3})$

7) (CESUMAR) Na fase da Lua Cheia (Sol – Terra – Lua) ou na fase da Lua Nova (Sol – Lua – Terra), observa-se a maior amplitude das marés. A maré é um dos fenômenos naturais mais conhecidos. Dependendo das condições atmosféricas, há possibilidade da ocorrência da ressaca. A força da ressaca costuma alagar avenidas e danificar construções à beira-mar. Há também relatos de banhistas tragados pelo mar e levados para longe da praia pelas fortes correntes marítimas. Os movimentos periódicos de elevação e abaixamento das superfícies dos oceanos, mares e lagos são provocados pela força gravitacional da Lua e do Sol sobre a terra. As marés ocorrem em intervalos regulares de 6 horas e 12 minutos. Então a cada 24 horas e 50 minutos, aproximadamente, o mar sobe e desce duas vezes, constituindo o fluxo e refluxo das águas. Para uma determinada maré, a altura A, medida em metros, é dada aproximadamente pela fórmula matemática, $A(t) = 4.sen(30.t + 45)°$, em que t é o tempo medido em hora e $0 \leq t \leq 12$.

a) Em 1 hora e 30 minutos, a altura da maré foi máxima.

b) Em 4 horas e 30 minutos, a altura da maré foi máxima.

c) A função acima é um modelo de função linear.

d) As ressacas, no Brasil, são quase sempre causadas pela atuação da massa tropical continental e podem ocorrer dezenas de vezes por ano, mas infelizmente, não é possível prevê-las.

e) No Brasil, há um grande potencial para o desenvolvimento da energia maré-motriz, devido à elevada amplitude das marés, principalmente no Estado do Paraná.

8) (UNEMAT) Supõe-se que em um determinado local a intensidade média I da radiação solar possa ser expressa em função do tempo s, em semanas, pela fórmula abaixo:

$$I(s) = 400 + 200.sen\left[2\pi\left(\frac{s-11}{52}\right)\right]$$

Em um período inferior a seis meses, quando ocorre a intensidade máxima de radiação solar?

a) na vigésima sexta semana;
b) na vigésima semana;
c) na vigésima quarta semana;
d) na vigésima sétima semana;
e) na vigésima terceira semana.

9) (ENEM) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1+0{,}15.\cos(0{,}06t)}$$

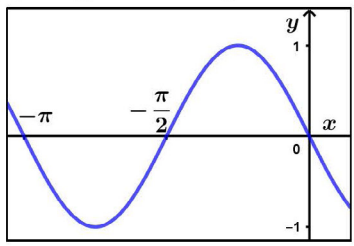
Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S.

O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

a) 12765 km. b) 12000 km. c) 11730 km. d) 10965 km. e) 5865 km

10) (UNITAU) Indique a função trigonométrica $f(x)$ de domínio $\mathbb{R}$; $Im = [-1, 1]$ e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir:

a) $y = 1 + cos\, x$.
b) $y = 1 - sen\, x$.
c) $y = sen\,(-2x)$.
d) $y = cos\,(-2x)$.
e) $y = -cos\, x$.



11) (UEL) Uma bomba de água aspira e expira água a cada três segundos. O volume de água da bomba varia entre um mínimo de 2 litros e um máximo de 4 litros. Dentre as alternativas a seguir, assinale a expressão algébrica para o volume (y) de água na bomba, em função do tempo (t).

a) $y = 2 + 2.sen(\frac{\pi}{3}t)$

b) $y = 2 + 2.sen(\frac{2\pi}{3}t)$

c) $y = 3 + sen(\frac{\pi}{3}t)$

d) $y = 3 + sen(\frac{2\pi}{3}t)$

e) $y = -3 + 2.sen(\frac{\pi}{3}t)$

12) (ACAFE–SC) Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis. Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia ($t = 0$) e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3.cos(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3})$ em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e $T(t)$, a temperatura (em °C) no instante t. O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente:

a) 6h, 25,5 °C e 10h.
b) 12h, 27 °C e 10h.
c) 12h, 27 °C e 15h.
d) 6h, 25,5 °C e 15h.

13) Produção de açaí o ano todo para o estado do Pará e para o Brasil é a proposta da nova cultivar de açaizeiro (*Euterpe oleracea*) irrigado de terra-firme da Embrapa, a BRS Pai d'Égua. Um dos maiores diferenciais da nova cultivar é a distribuição bem equilibrada da produção anual. A BRS Pai d'Égua produz 46% no período da entressafra (de janeiro a junho) e 54% na safra (de julho a dezembro). Trata-se de uma forte vantagem para o produtor, pois a redução da oferta de açaí na entressafra faz o seu preço aumentar, além de provocar demanda reprimida nesse período.

Fonte: (EMBRAPA, 2019)

Considere a seguir, os preços médios do litro da polpa de açaí comercializados no estado do Pará em 2018.

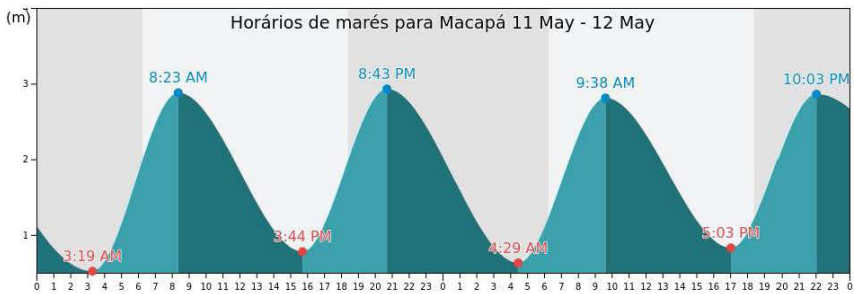
Preço do litro de açaí \ Ano	2018
Mês de janeiro (m=1)→Preço na entressafra-Máximo (R$)	11,00
Mês de Julho (m=7)→Preço na safra-Mínimo (R$)	7,00

entressafra a cada 6 meses. Calcule:

a) A função trigonométrica de ajuste do preço $f(m)$ de acordo com os meses m do ano $(0 \leq m \leq 12)$.

b) O preço do litro da polpa no mês de março de acordo com essa função.

14) A seguir está o gráfico que representa as tábuas de marés em Macapá-AP em 11/05/2019:

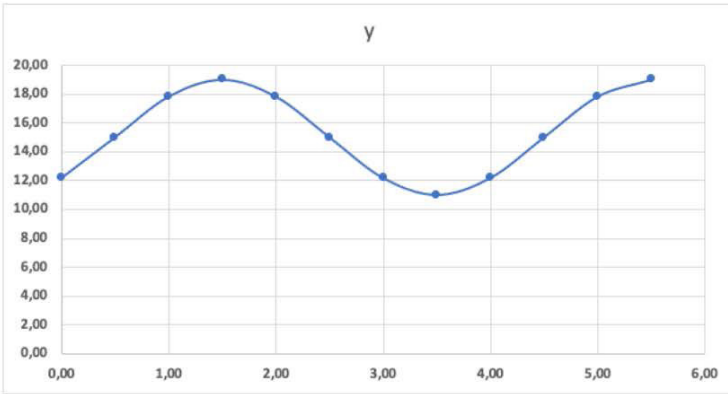


Fonte: (TIDESCHART, 2019)

Considerando que todas as marés altas foram iguais a 3 metros e sempre ocorreram às 9:00hs do dia ou da noite, e que todas as marés baixas foram iguais a 0,5 metros e que ocorreram às 04:00hs da tarde ou da manhã, modele uma função em que se enquadre as informações, usando $0 \leq h \leq 12$ para as horas do dia.

15) Os dados a seguir mostra a relação entre duas grandezas em um experimento. Determine a função de ajuste.

DADOS DO EXPERIMENTO												
x	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00	5,50
y	12,17	15,00	17,83	19,00	17,83	15,00	12,17	11,00	12,17	15,00	17,83	19,00



16) (UNESP) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em °C)

do solo em uma determinada região, durante três dias, a intervalos de 1 hora. A medição da temperatura começou a ser feita às três horas da manhã do primeiro dia ($t = 0$) e terminou 72 horas depois ($t = 72$). Os dados puderam ser aproximados pela função $H(t) = 15 + 5.sen(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2})$, onde t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação e $H(t) =$ a temperatura (em ºC) no instante t.

a) Resolva a equação $sen(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}) = 1$, para $t \in [0,24]$.

b) Determine a temperatura máxima atingida e o horário em que essa temperatura ocorreu no primeiro dia da observação.

17) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a.sen[(bx + c)]$, em que os parâmetros a, b, c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

a) a b) b c) c d) a e b e) b e c

18) (ENEM) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5.cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

a) janeiro
b) abril
c) junho
d) julho
e) outubro

11.7. Gráficos de funções trigonométricas no geogebra

Exemplos:

1)Para a função $f(x) = 5 - 4.cos(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{3})$ digite: f(x) = 5-4cos((pi/4)*x + (pi)/3)

2)Para a função $f(x) = 3 - sen(x + \frac{\pi}{2})$ digite: g(x) = 3-sen(x + (pi)/3)

3)Para a função $f(x) = 2.tg(x - \frac{\pi}{4})$ digite: h(x) = 2*tg(x -(pi)/4)

Ver figura 11.7.1.

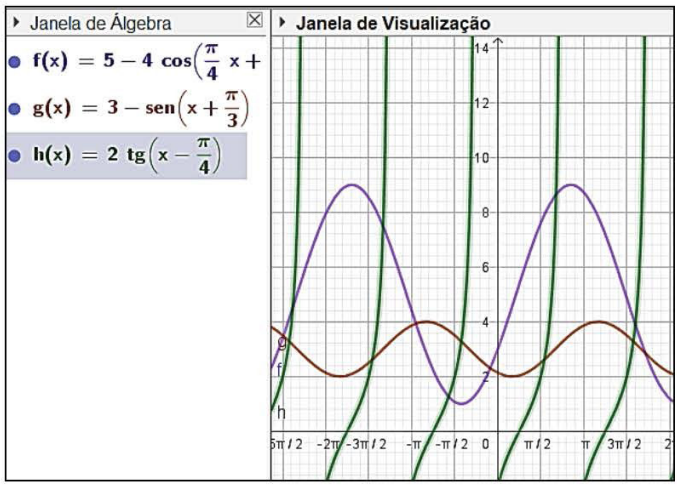


Figura 11.7.1

Para mudar os intervalos no eixo x, vá em propriedades – preferências – eixo x e marque a distância desejada (ver figura 11.7.2):

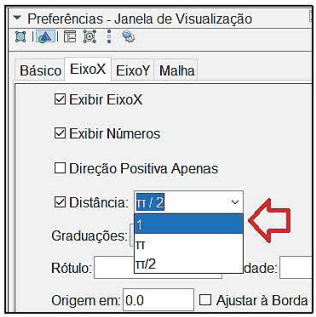


Figura 11.7.2

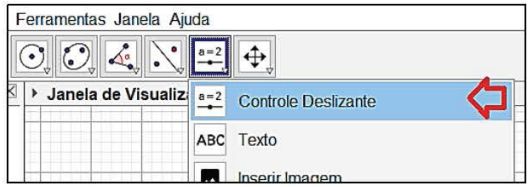


Figura 11.7.3

Vamos aplicar controles deslizantes para os parâmetros a, b, c e d da função

$f(x) = a + b.sen(cx + d)$. O mesmo se aplica para o cosseno (ver figura 11.7.3).

1)No menu, selecione o controle:

2)Clique no lugar desejado dentro do gráfico;

3)Coloque o nome "a" marque a opção inteiro, coloque no intervalo mínimo de -30 e o máximo de 30, depois clique em "OK" (figura 11.7.4)

4)Seguindo os mesmo passos de 1, 2 e 3, crie mais 3 controles deslizantes escrevendo no nome "b, c, d" e o mesmo intervalo do item 3 (um de cada vez).

5) No campo de entrada da função digite:

a + b sen*(c*x + d)

6) Altere os valores dos parâmetro a, b, c e d, analise as alterações do gráfico (figura 11.7.5). Veja que:

- a translada o gráfico para cima $(a > 0)$ ou para baixo $(a < 0)$
- b dilata se $|b| > 1$ ou contrai verticalmente se $|b| < 1$.
- c dilata se $|c| < 1$ ou contrai horizontalmente se $|c| > 1$.
- d translada para direita se $(d < 0)$ ou para a esquerda $(d > 0)$

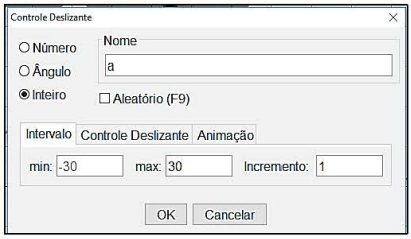


Figura 11.7.4

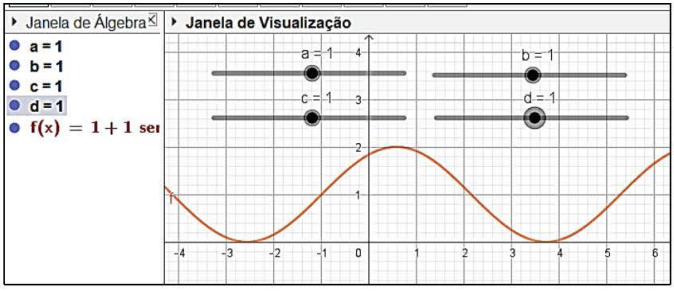


Figura 11.7.5

11.8. Transformações e identidades trigonométricas

11.8.1. Arco complementar

Na figura 11.8.1.1, o seno do arco P é igual ao cosseno do arco P' e o cosseno do arco P é igual ao seno do arco P'. Como $\alpha + \beta = 90°$ e sen α = cos β, concluímos que:

$sen\alpha = cos(90° - \alpha)$ e $cos\,\beta = sen(90° - \beta)$.

Por consequência, para um arco x, temos

$$sen\,x = cos(90° - x)\ ou\ sen\,x = cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$cos\,x = sen(90° - x)\ ou\ cos\,x = sen(\frac{\pi}{2} - x)$$

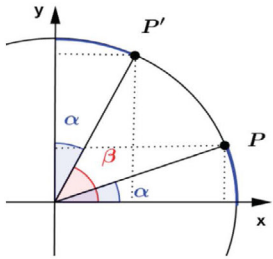


Figura 11.8.1.1

Quanto à tangente, podemos utilizar

$$tgx = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{cos(90° - x)}{sen(90° - x)} \Rightarrow$$

$$tg\,x = \frac{1}{tg(90° - x)}\ ou\ tg\,x = \frac{1}{tg(\frac{\pi}{2} - x)}$$

Resumindo as fórmulas: Seja um arco x menor que 90º. O seno desse arco, tem o mesmo valor do cosseno do seu complementar, assim como, o cosseno desse arco, tem o mesmo valor do seno do seu complementar, e consequentemente, a tangente desse arco é o inverso da tangente de seu complementar.

Como exemplo, podemos relembrar a tabela dos ângulos notáveis e perceber a equivalência entre os valores de:

- $sen60° = cos(90° - 60°) = cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $sen30° = cos(90° - 30°) = cos60° = \frac{1}{2}$;
- $tg60° = \frac{1}{tg(90° - 60°)} = \frac{1}{tg\,30°} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$.

Outros exemplos:

- $sen19° = cos(90° - 19°) = cos71°$;
- $cos80° = sen(90° - 80°) = cos10°$;
- $tg50° = \frac{1}{tg(90° - 50°)} = \frac{1}{tg\,40°}$.

Consulte a tabela trigonométrica no final desse volume ou use uma calculadora científica conforme seção 11.9 e constate essas igualdades.

11.8.2. Arco da soma e da diferença

É fato que $sen(\alpha + \beta) \neq sen\alpha + sen\beta$, que $cos(\alpha + \beta) \neq cos\alpha + cos\beta$ e que $tg(\alpha + \beta) \neq tg\alpha + tg\beta$, basta tomar dois arcos da tabela dos ângulos notáveis e notar a não validade. O mesmo ocorre com a diferença de arcos. Diante dessas circunstâncias, é possível relacionar seno, cosseno e tangente da soma ou diferença de dois arcos, usando o seno, cosseno e tangente de cada arco individualmente? É o que veremos a seguir.

Na figura 11.8.2.1, foi marcado $\overline{0A} = cos\beta$ e de modo que $\overline{0A}$ seja perpendicular a $\overline{BA}$. Assim, temos que $\overline{BA} = sen\beta$, já que $cos^2\beta + sen^2\beta = 1$.

Projetando os pontos B e A sobre o eixo x, conforme a figura 11.8.2.2, encontramos os pontos B′ e A′, respectivamente, e as seguintes igualdades:

- $\overline{0B'} = cos\ (\alpha + \beta)$
- $\overline{0A'} = cos\alpha\ .\ cos\beta$
- $\overline{0A'} - \overline{0B'} = sen\alpha\ .\ sen\beta.$

O que implica em

$$cos\alpha.cos\beta + cos(\alpha + \beta) = sen\alpha.sen\beta \Rightarrow$$

$$\boxed{cos(\alpha + \beta) = cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta}$$

Colocando $-\beta$ em vez de β e utilizando as sentenças: $cos(-\beta) = cos\beta$ e $sen(-\beta) = -sen\beta$, dispomos de

$$\boxed{cos(\alpha - \beta) = cos\alpha.cos\beta + sen\alpha.sen\beta}$$

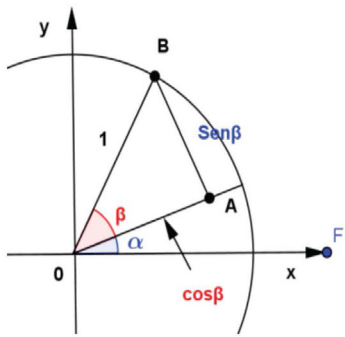


Figura 11.8.2.1

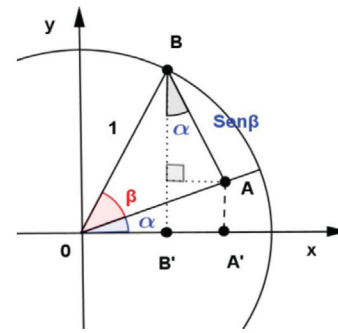


Figura 11.8.2.2

Por outro lado, $sen(\alpha + \beta) = cos(90^o - (\alpha + \beta)) = cos((90^o - \alpha) - \beta)$, aplicando a fórmula acima, temos

$$sen(\alpha + \beta) = \underbrace{cos(90° - \alpha)}_{sen\alpha}.cos\beta + \underbrace{sen(90° - \alpha)}_{cos\,\alpha} sen\beta \Rightarrow$$

$$\boxed{sen(\alpha + \beta) = sen\alpha.cos\beta + sen\beta.cos\alpha}$$

Colocando $-\beta$ em vez de β e utilizando as igualdades: $sen\,(-\beta) = -sen\beta$ e $cos(-\beta) = cos\beta$, encontramos

$$\boxed{sen(\alpha - \beta) = sen\alpha.cos\beta - sen\beta.cos\alpha.}$$

No caso da tangente, podemos partir de:

$$tg(\alpha + \beta = \frac{sen\,(\alpha + \beta)}{cos(\alpha + \beta)} = \frac{sen\,\alpha\,.cos\beta + sen\beta.cos\alpha}{cos\,\alpha\,.cos\beta + sen\,\alpha\,.sen\beta}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos\alpha\,.\cos\beta$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\frac{sen\,\alpha\,.cos\beta + sen\beta.cos\alpha}{cos\,\alpha\,.cos\beta}}{\frac{cos\,\alpha\,.cos\beta - sen\,\alpha\,.\,sen\beta}{cos\,\alpha\,.cos\beta}} \frac{\frac{sen\,\alpha\,.cos\beta}{cos\,\alpha\,.cos\beta} + \frac{sen\beta.cos\alpha}{cos\,\alpha\,.cos\beta}}{\frac{cos\,\alpha\,.cos\beta}{cos\,\alpha\,.cos\beta} - \frac{sen\,\alpha\,.\,sen\beta}{cos\,\alpha\,.cos\beta}} = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\,.\,tg\beta}$$

$$\boxed{tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha.tg\beta}}$$

Manipulando de forma análoga e conveniente os arcos da diferença, mostra-se que

$$\boxed{tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha.tg\beta}}$$

A partir dessas fórmulas é possível calcular seno, cosseno e tangente de um arco, transformando-o em uma soma ou diferença de dois outros arcos, pelos quais já se conhecem o seno, cosseno e tangente.

1º exemplo: Vamos calcular seno, cosseno e tangente de 15º.

Solução: É preciso usar seno, cosseno e tangente de outros dois arcos conhecidos, cuja soma ou diferença seja 15°. Nesse caso, podemos fazer 45° - 30° ou 60° - 45°. Faremos 45° - 30°.

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta.cos\alpha$$

$$sen(45° - 30°) = sen45°.cos30° - sen30°.cos45°$$

$$sen15° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{sen15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}.$$

$$cos(\alpha - \beta) = cos\alpha cos\beta - sen\alpha.sen\beta$$

$$cos(45° - 30°) = cos45°.cos30° + sen45°.sen30°$$

$$cos15° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{cos15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

Para calcular a $tg15°$ basta dividir $sen15°$ por $cos15°$ já calculados. Porém, faremos o uso da fórmula para fins didáticos.

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\,.\,tg\beta} \Rightarrow tg(45° - 30°) = \frac{tg45° - tg30°}{1 + tg45°\,.\,tg30°} \Rightarrow$$

$$tg15° = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}.\frac{(3 - \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})} = \frac{9 - 2.3.\sqrt{3} + 3}{9 - 3} \Rightarrow$$

$$tg15° = \frac{12 - 6.\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \boxed{tg15° = 2 - \sqrt{3}}.$$

2º exemplo: Calcular seno, cosseno e tangente de $\frac{19\pi}{12}$ *rad*.

Solução: Para melhor visualização do arco, vamos transformá-lo em grau.

$$\begin{array}{ll} 180° & \pi \text{ rad} \\ x & \frac{19\pi}{12} \text{ rad} \end{array} \qquad \pi.x = 180.\frac{19\pi}{12} \Rightarrow x = \frac{3420}{12} \Rightarrow \boxed{x = 285°}.$$

O arco 285° está no IV quadrante e tem os mesmos valores de seno, cosseno e tangente de 360° - 285° = 75° (com exceção do sinal). Assim, podemos fazer 75° = 45° + 30° e utilizar a fórmula do arco da soma.

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha.cos\beta + sen\beta.cos\alpha$$

$$sen(45° + 30°) = sen45°.cos30° + sen30°.cos45°$$

$$sen75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{sen75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}.$$

$$cos(\alpha + \beta) = cos\alpha.cos\beta - sen\alpha.sen\beta$$

$$cos(45° + 30°) = cos45°cos30° - sen45°.sen30°$$

$$cos75° = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \boxed{cos75° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\,.\,tg\beta} \Rightarrow tg(45° + 30°) = \frac{tg45° + tg30°}{1 - tg45°\,.\,tg30°} \Rightarrow$$

$$tg75° = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}.\frac{(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})} \Rightarrow$$

$$tg75° = \frac{9 + 2.3.\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6.\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \boxed{tg75° = 2 + \sqrt{3}}.$$

Conclusão:

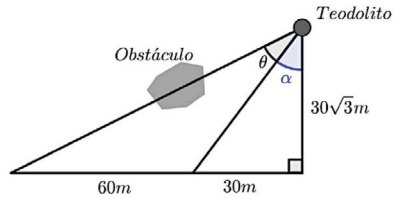
$$\boxed{sen\left(\frac{19\pi}{12} rad\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}, \boxed{cos\left(\frac{19\pi}{12} rad\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \; e \; \boxed{tg\left(\frac{19\pi}{12} rad\right) = -2 - \sqrt{3}}.$$

3º exemplo: Um topógrafo obteve os valores das distâncias que estão na figura a partir de um teodolito. Como havia um obstáculo à frente do instrumento não foi possível medir o ângulo θ. Calcule o seu valor.

Solução:

$$tg\ \alpha = \frac{30}{30\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$tg\ (\alpha + \theta) = \frac{60+30}{30\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$



Além disso, podemos escrever $\theta = (\alpha + \theta) - \alpha$ e assim, obtermos:

$$tg\ \theta = tg[(\alpha+\theta) - \alpha] = \frac{tg(\alpha+\theta) - tg\alpha}{1 + tg(\alpha+\theta).\ tg\alpha} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = 30°}.$$

Outra solução: Se $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então: $\alpha = 30°$. Se $tg\ (\alpha+\theta) = \sqrt{3}$, então $\alpha+\theta = 60°$, o que implica em $\boxed{\theta = 30°}$. Essa solução não seria viável caso α e $\alpha+\theta$ não fossem arcos notáveis.

11.8.3. Arco duplo

Ao fazer $\beta = \alpha$ nas fórmulas da adição, temos

- $sen(\alpha + \alpha) = sen\alpha.cos\alpha + sen\alpha.cos\alpha \Rightarrow$ $\boxed{sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha}$
- $cos\ (\alpha + \alpha = cos\alpha.cos\alpha - sen\alpha.sen\alpha \Rightarrow$ $\boxed{cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$
- $tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\ .\ tg\alpha} \Rightarrow tg2\alpha\frac{2.tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Rightarrow$ $\boxed{tg2\alpha = \frac{2.tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}}$

Exemplo: Sabendo que $sen\alpha = \frac{4}{5}$, calcule $sen2\alpha$, para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Solução: De acordo com fórmula do $sen2\alpha$, precisamos também do valor do cosα, que pode ser encontrado pelo teorema fundamental da trigonometria,

$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2\alpha + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow cos^2\alpha = \frac{25-16}{25} \quad \Rightarrow \quad cos^2\alpha = \frac{9}{25} \quad \Rightarrow \quad cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}.$$

Uma vez que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (I quadrante), então $cos\alpha = \frac{3}{5}$. Substituindo, encontramos

$$sen2\alpha = 2.sen\alpha.cos\alpha \; sen2\alpha = 2.\frac{4}{5}.\frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{sen2\alpha = \frac{24}{25}}.$$

A vantagem das fórmulas do arco duplo, é que podemos calcular o seno, cosseno ou a tangente de um arco, sabendo o seno, cosseno ou a tangente da metade desse arco.

2º exemplo: Calcule $cos120°$ usando a fórmula do arco duplo.

Solução: $cos120° = \cos(2.60°) = cos^2 60° - sen^2 60° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$.

11.8.4. Arco da metade

Ao fazer $\beta = 2\alpha$ nas fórmulas anteriores do arco duplo, encontramos:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}} \qquad cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}}$$

Os sinais $\pm$ dependem da do quadrante onde se encontra o arco. Se por exemplo, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II quadrante), então $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$. E assim, $\frac{\alpha}{2}$ estará no I quadrante e o valor do seno, cosseno e tangentes serão positivos.

O benefício das fórmulas do arco da metade, está no fato de que podemos calcular o seno, cosseno ou a tangente de um arco, sabendo o seno, cosseno ou a tangente, do dobro desse arco.

Exemplo: Calcule os valores de seno, cosseno e tangente do arco $\frac{\pi}{8} rad.$

Solução: O dobro desse arco é $2.\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} = 45°$ e $cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{\pi}{4}$ estão no 1º quadrante, os valores de seno, cosseno e tangente, serão positivos.

$$sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{2}} \Rightarrow sen\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{sen\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}} \Rightarrow cos\frac{\pi}{8} = +\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\alpha}{1 + cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} \Rightarrow \boxed{tg\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1}.$$

11.8.5. Transformação em produto

Utilizando a soma e a diferença das fórmulas de soma e subtração de arcos, encontramos

$$cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta) = 2.cos\alpha.cos\beta$$
$$cos(\alpha + \beta) - cos(\alpha - \beta) = -2.sen\alpha.sen\beta$$
$$sen(\alpha + \beta) + sen(\alpha - \beta = 2.sen\alpha.cos\beta$$
$$sen(\alpha + \beta) - sen(\alpha - \beta) = 2.sen\beta.cos\alpha.$$

A partir dessas sentenças e denominando $\alpha = \frac{p+q}{2}$ e $\beta = \frac{p-q}{2}$, dispomos das seguintes fórmulas

$$cosp + cosq = 2.cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$cosp - cosq = -2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$senp + senq = 2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$senp - senq = 2.sen\left(\frac{p-q}{2}\right).cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Além disso,

$$tgp + tgq = \frac{senp}{cosp} + \frac{senq}{cosq} = \frac{senp.cosq + senq.cosp}{cosp.cosq} = \frac{sen(p+q)}{cosp.cosq}$$
$$tgp - tgq = \frac{senp}{cosp} - \frac{senq}{cosq} = \frac{senp.cosq - senq.cosp}{cosp.cosq} = \frac{sen(p-q)}{cosp.cosq}$$

O que nos dá

$$tgp + tgq = \frac{sen(p+q)}{cosp.cosq}$$
$$tgp - tgq = \frac{sen(p-q)}{cosp.cosq}$$

Essas fórmulas tem como recurso, transformar somas (ou diferenças) de arcos em produtos ou de forma contrária, transformar produtos em soma.

Exemplo: Transforme em produto:

a) $sen3x + senx$

Solução:

$$senp + senq = 2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$sen3x + senx = 2.sen\left(\frac{3x+x}{2}\right).cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2.sen2x.senx$$

b) $1 - cos2x$

Solução:

$$cosp - cosq = -2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$cos0 - cos2x = -2.sen\left(\frac{0+2x}{2}\right).sen\left(\frac{0-2x}{2}\right)$$

$$cos0 - cos2x = -2.senx.\underbrace{sen(-x)}_{-senx} = -2.sen^2x$$

2º exemplo: Transforme em soma.

a) $sen3x.cosx$

Solução:

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = 3x \\ \frac{p-q}{2} = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+q = 6x \\ p-q = 2x \end{cases} +$$

$$2p = 8x \Rightarrow \boxed{p = 4x}.$$

$p + q = 6x \Rightarrow 4x + q = 6x \Rightarrow \boxed{q = 2x}$.

Substituindo em: $senp + senq = 2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, temos

$$sen4x + sen2x = 2.sen3x.cosx \Rightarrow \boxed{sen3x.cosx = \frac{sen4x + sen2x}{2}}.$$

b) $sen\frac{7\pi}{8}.sen\frac{\pi}{8}$

Solução:

$$\begin{cases} \frac{p+q}{2} = \frac{7\pi}{8} \\ \frac{p-q}{2} = \frac{\pi}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p+q = \frac{7\pi}{4} \\ p-q = \frac{\pi}{4} \end{cases} +$$

$$2p = \frac{8\pi}{4} \Rightarrow \boxed{p = \pi}.$$

$p + q = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \pi + q = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \boxed{q = \frac{3\pi}{4}}$.

Substituindo em: $cosp - cosq = -2.sen\left(\frac{p+q}{2}\right).sen\left(\frac{p-q}{2}\right)$, encontramos

$$\underbrace{cos\overset{180°}{\overbrace{\pi}}}_{-1} - \underbrace{cos\overset{135°}{\overbrace{\frac{3\pi}{4}}}}_{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2.sen\frac{7\pi}{8}.sen\frac{\pi}{8} \Rightarrow sen\frac{7\pi}{8}.sen\frac{\pi}{8} = \frac{-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{sen\frac{7\pi}{8}.sen\frac{\pi}{8} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}}.$$

Outra solução pode ser encontrada usando o arco da metade:

$$sen\frac{7\pi}{8}.sen\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - cos\frac{7\pi}{4}}{2}}.\sqrt{\frac{1 - cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{1 - cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

EXERCÍCIOS 11.5

1) O valor de $sen\,61°$ é igual a:

a) $sen\,29°$ b) $cos\,29°$ c) $sen\,119°$ d) $cos\,61°$ e) $cos\,119°$

2) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=cos\,(90°-x)$ é equivalente a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

a) $sen\,(90°-x)$ b) $cos\,x$ c) $senx$ d) $-senx$ e) $-cosx$

3) Calcule seno, cosseno e tangente dos seguintes arcos:

a) 75º

b) 105º

c) 165º

d) $\frac{29\pi}{12}$

4) Se $cos\,x=\frac{3}{5}$ e $sen\,y=-\frac{5}{13}$, qual o valor de $sen(x+y)$, sabendo que $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$?

5) Se $tg\,x=\frac{4}{3}$ e $sen\,y=-\frac{24}{25}$, qual o valor de $tg(x+y)$, sabendo que $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}<y<2\pi$?

6) Se $tg\,x=3$ e $tg\,y=-2$, qual o valor de $tg(x-y)$, sabendo que $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}<y<\pi$?

7) Se $tg\,x=\frac{3}{4}$ e $0<x<\frac{\pi}{2}$, calcule $sen2x$.

8) Se $sen\,x=\frac{7}{25}$ e $0<x<\frac{\pi}{2}$, calcule $sen2x$, $cos2x$, $tg2x$, $sen\frac{x}{2}$, $cos\frac{x}{2}$ e $tg\frac{x}{2}$.

9) A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=sen2x.cos\,x+senx.cos2x$ é equivalente a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

a) $sen\,5x$ b) $cos\,3x$ c) $sen\,4x$ d) $-sen4x$ e) $sen3x$

10) Calcule $sen3x$ em função de $senx$, $cos3x$ em função de $cosx$ e $tg3x$ em função de tgx.

11) Transforme em produto.

a) $sen5x+senx$

b) $cos3x-cosx$

c) $1+cosx$

d) $sen7x+sen5x-senx-sen3x$

12) Transforme em soma.

a) $sen2x.cos2x$ b) $sen3x.cos5x$

13) Usando a fórmula de transformação do produto em soma, calcule o valor de:

a) $sen\frac{13\pi}{12}.sen\frac{\pi}{12}$

b) $cos\frac{5\pi}{24}.cos\frac{\pi}{24}$

14) Indique uma estratégia para calcular $sen75° - cos75°$ usando a fórmula do produto e calcule.

15) Seja um triângulo ABC pela qual vale a relação $cosA + cosB = senC$. Mostre que esse triângulo é retângulo.

16) (FGV – SP) No teodolito indicado, cada volta completa da manivela aumenta em 0,5° o ângulo de observação em relação à horizontal.

Se a partir da situação descrita na figura são necessárias mais 45 voltas completas da manivela para que o teodolito aponte para o topo da parede, a medida de h, em metros, é igual a:

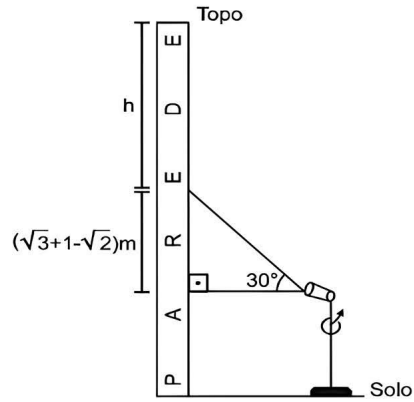
a) $0,75.(\sqrt{3}+1-\sqrt{2})$

b) $2.(\sqrt{3}-1)$

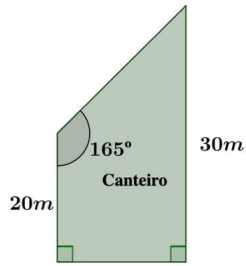
c) $4.(\sqrt{2}-1)$

d) $2\sqrt{6}-3$

e) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$



17) Um canteiro foi construído para o plantio de hortaliças, conforme as informações que estão na figura. As recomendações técnicas de semeadura e adubação dependem da área desse canteiro. Calcule-a utilizando $\sqrt{3} = 1,7$.



11.8.6. Outras relações trigonométricas

Existem outras relações também importantes na trigonometria, além do seno, cosseno e tangente, denominadas de relações inversas. São elas:

◆ **Cossecante:** A cossecante de um arco é definida como o inverso do seno desse arco.

$$\boxed{cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha}} \qquad \boxed{\text{Com } \alpha \neq k\pi \text{ (k} \in \mathbb{Z}\text{).}}$$

◆ **Secante:** A secante de um arco é definida como o inverso do cosseno desse arco.

$$\boxed{sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha}} \qquad \boxed{\text{Com } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ (k} \in \mathbb{Z}\text{).}}$$

◆ **Cotangente:** A cotangente de um arco é definida como o inverso da tangente desse arco.

$$\boxed{cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}} \qquad \boxed{\text{Com } \alpha \neq \frac{k\pi}{2} \text{ (k} \in \mathbb{Z}\text{).}}$$

Vamos demonstrar pelo ciclo trigonométrico da figura 11.8.6.1, onde o segmento $\overline{QS}$ é tangente ao ciclo no ponto R, que $cossec\alpha = \overline{OQ}$, $sec\alpha = \overline{OS}$ e $cotg\alpha = \overline{VU}$.

O triângulo ΔOQR é semelhante ao triângulo ΔOPR, assim vale a relação

$$\frac{1}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP}}{1} \Rightarrow \overline{OP} = sen\alpha \Rightarrow \boxed{\overline{OQ} = \frac{1}{sen\alpha}}.$$

O triângulo ΔORS é semelhante ao triângulo ΔORT, então vale a relação

$$\frac{1}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OT}}{1} \Rightarrow \overline{OT} = cos\alpha \Rightarrow \boxed{\overline{OS} = \frac{1}{cos\alpha}}.$$

Por fim, o triângulo ΔOVU é semelhante ao triângulo ΔOPR, o que nos dá

$$\frac{\overline{VU}}{\overline{PR}} - \frac{1}{\overline{OP}}.$$

Como $\overline{PR} = cos\alpha$ e $\overline{OP} = sen\alpha$, concluímos

$$\overline{VU} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} \Rightarrow \boxed{\overline{VU} = \frac{1}{tg\alpha}}.$$

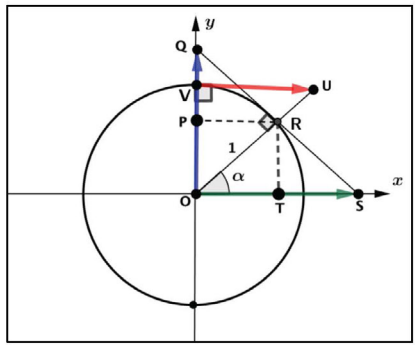


Figura 11.8.6.1

Está claro que a cotangente é o inverso da tangente, assim podemos utilizar também a seguinte fórmula

$$cotg\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$$ Com $\alpha \neq k\pi$ (k $\in \mathbb{Z}$).

A partir do teorema fundamental da trigonometria $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, podemos encontrar ainda, outras relações.

Dividindo a igualdade $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ por $cos^2\alpha$, obtemos

$$\underbrace{\frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha}}_{tg^2\alpha} + \underbrace{\frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha}}_{1} = \underbrace{\frac{1}{cos^2\alpha}}_{sec^2\alpha} \Rightarrow \boxed{sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha}$$ Com $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k $\in \mathbb{Z}$).

Dividindo a igualdade $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ por $sen^2\alpha$, temos

$$\underbrace{\frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha}}_{1} + \underbrace{\frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha}}_{cotg^2\alpha} = \underbrace{\frac{1}{sen^2\alpha}}_{cossec^2\alpha} \Rightarrow \boxed{cossec^2\alpha = 1 + cotg^2\alpha}$$ Com $\alpha \neq k\pi$ (k $\in \mathbb{Z}$).

Denominamos essas relações e todas outras já conhecidas, de identidades trigonométricas fundamentais. O que significa dizer que a partir de apenas uma dessas informações: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante ou cossecante, é suficiente para encontrar todas as demais.

É imediato observar que os sinais dessas novas relações variam de acordo com o quadrante do arco e que seguem o mesmo sinal dos seus inversos, ou seja, o sinal da $cossec\alpha$ tem o mesmo sinal do $sen\alpha$, o sinal da $sec\alpha$ tem o mesmo sinal do $cos\alpha$ e o sinal da $cotg\alpha$ é o mesmo da $tg\alpha$.

Exemplo: Vamos calcular a cossecante, secante e cotangente do arco de 60°.

Solução:

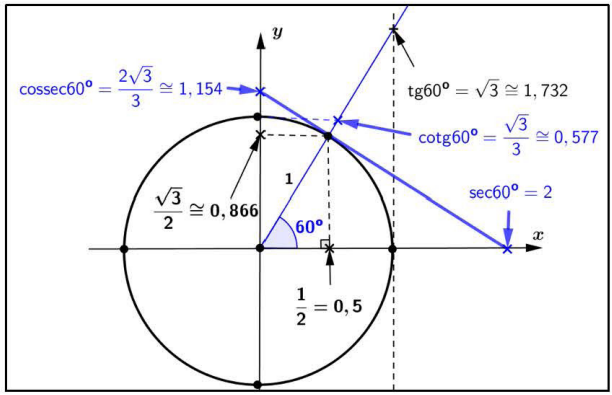
$$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow cossec60° = \frac{1}{sen60°} \Rightarrow cossec60° = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cossec60° = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{cossec60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow sec60° = \frac{1}{cos60°} \Rightarrow sec60° = \frac{1}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{sec60° = 2}$$

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow cotg60° = \frac{1}{tg60°} \Rightarrow cotg60° = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{cotg60° = \frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

A figura a seguir, mostra a representação desses valores no ciclo trigonométrico.



2º exemplo: Se $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule as demais relações trigonométricas fundamentais.

Solução:

$$cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow cotg\alpha = \frac{1}{-\frac{3}{4}} \Rightarrow \boxed{cotg\alpha = -\frac{4}{3}}$$

$$sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow sec^2\alpha = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$sec^2\alpha = 1 + \frac{9}{16} \Rightarrow sec^2\alpha = \frac{25}{16} \Rightarrow sec\alpha = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}.$$

Uma vez que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ (II quadrante), a secante é negativa, isto é:

$$\boxed{sec\alpha = -\frac{5}{4}}.$$

Quanto as demais identidades,

$$sec\alpha = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow -\frac{5}{4} = \frac{1}{cos\alpha} \Rightarrow \boxed{cos\alpha = -\frac{4}{5}}$$

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \Rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{sen\alpha}{-\frac{4}{5}} \Rightarrow \boxed{sen\alpha = \frac{3}{5}}$$

$$cossec\alpha = \frac{1}{sen\alpha} \Rightarrow cossec\alpha = \frac{1}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \boxed{cossec\alpha = \frac{5}{3}}.$$

Uma solução alternativa para $cossec\alpha$ seria utilizarmos a fórmula seguinte:

$$cossec^2\alpha = 1 + cotg^2\alpha$$

$$cossec^2\alpha = 1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow cossec^2\alpha = 1 + \frac{16}{9} \Rightarrow cossec^2\alpha = \frac{25}{9} \Rightarrow$$

$$cossec\alpha = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow \boxed{cossec\alpha = \frac{5}{3}}.$$

11.8.7. Identidades trigonométricas

Nesta subseção abordaremos demonstrações de identidades trigonométricas.

Para demonstrar identidades trigonométricas, podemos aplicar a substituição de todas as identidades trigonométricas fundamentais, as fórmulas do arco complementar, do arco da soma e diferença, do arco duplo e da metade e da transformação em produto. O processo de demonstração pode se dar, basicamente, de três maneiras:

1º) Podemos partir de um dos membros, desenvolvê-lo e encontrar o mesmo valor do outro membro, comprovando a igualdade;

2º) Desenvolver ambos os membros de forma conveniente até encontrar a equivalência;

3º) Subtrair um membro do outro e mostrar que o resultado é zero.

A melhor maneira de demonstrar dependerá de cada caso e será descoberta após o êxito das tentativas.

Exemplo: Prove que

a) $tg\,x + cotg\,x = sec\,x\,.cossec\,x$

Solução: Desenvolvendo o primeiro membro

$$tg\,x + cotg\,x = \frac{senx}{cosx} + \frac{cosx}{senx} = \frac{\overbrace{sen^2x + cos^2x}^{1}}{cosx\,.senx} = \frac{1}{cosx\,.senx} = \frac{\overbrace{secx}^{\frac{1}{cosx}}}{1}.\frac{\overbrace{cossecx}^{\frac{1}{senx}}}{1}.$$

b) $\frac{cotgx+cotgy}{tgx+tgy} = cotgx\,.cotg\,y$

Solução: Passando $tgx + tg\,y$ para o 2º membro multiplicando, encontramos

$$cotgx + cotg\,y = cotgx\,.cotg\,y.(tgx + tg\,y)$$

Desenvolvendo o 2º membro

$$cotgx\,.cotg\,y.(tgx + tg\,y) = cotgx\,.cotg\,y.tgx + cotgx\,.cotg\,y.tg\,y$$

$$cotgx\,.cotg\,y.(tgx + tg\,y) = \frac{1}{\cancel{tgx}}.cotg\,y.\cancel{tgx} + cotgx\,.\frac{1}{\cancel{tgy}}.\cancel{tg\,y}$$

$$cotgx\,.cotg\,y.(tgx + tg\,y) = cotg\,y + cotgx.$$

c) $(tgx + 1)^2 = (1 + sen2x).sec^2x$

Solução: Desenvolvendo o produto notável no 1º membro, temos

$$(tgx + 1)^2 = tg^2x + 2.tgx + 1 = \underbrace{sec^2x}_{1+tg^2x} + 2.tgx = sec^2x + 2.\frac{senx}{\underbrace{cosx}_{tgx}}.\frac{cosx}{cosx} \Rightarrow$$

$$(tgx + 1)^2 = sec^2x + \overbrace{2.senx.cosx}^{sen2x}.\frac{\overbrace{sec^2x}^{\frac{1}{cos^2x}}}{1} = sec^2x + sen2x.sec^2x$$

$$(tgx + 1)^2 = (1 + sen2x).sec^2x \Leftarrow demonstrado.$$

Outra solução: Desenvolvendo o 2º membro, temos

$$(1 + sen2x).sec^2x = sec^2x + sen2x.sec^2x = \overbrace{\frac{1}{cos^2x}}^{sec^2x} + \overbrace{2.senx.cosx}^{Sen2x}.\overbrace{\frac{1}{cos^2x}}^{sec^2x} \Rightarrow$$

$$(1 + sen2x).sec^2x = \frac{2.senx.cosx + 1}{cos^2x} = \frac{2.senx.cosx + \overbrace{sen^2x + cos^2x}^{1}}{cos^2x} \Rightarrow$$

$$(1 + sen2x).sec^2x = \frac{(senx + cosx)^2}{cos^2x} = \left(\frac{senx + cosx}{cosx}\right)^2 = \left(\frac{senx}{cosx} + 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$(1 + sen2x).sec^2x = (tgx + 1)^2 \Leftarrow demonstrado.$$

EXERCÍCIOS 11.6

1) Calcule a cossecante, secante e cotangente do arco de 30º.

2) Calcule a cossecante, secante e cotangente do arco de 45º.

3) Calcule a cossecante, secante e cotangente do arco de 15º.

4) Se $tg\,\alpha = 2$ e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais relações trigonométricas fundamentais.

5) Se $cos\,\alpha = \frac{1}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule as demais relações trigonométricas fundamentais.

6) Demonstre as identidades:

a) $secx.cotgx = cossecx$

b) $sec^2x + cossec^2x = sec^2x.cossec^2x$

c) $sec^2x - cossec^2x = tg^2x - cotg^2x$

d) $\frac{cotg^2x + 1}{cossec^2x - 1} = sec^2x$

e) $\frac{cosx + cotgx}{secx + tgx} = cotgx.cosx$

f) $\frac{sen^2(2x)}{2} = cos^4x + sen^4x - 1$

g) $sen(a + b).sen(a - b) = (cosb + cosa)(cosb - cosa)$

h) $sen3x = 3.senx - 4.sen^3x$

i) $cos3x = 4.cos^3x - 3.cosx$

j) $\frac{cossec^2x.secx}{cotgx + tgx} = \frac{senx}{cosx + 1} + \frac{1 + cosx}{senx} - cossecx$

11.9. Arcos trigonométricos na calculadora científica

Os botões para as relações trigonométricas são: "sin", "cos" e "tan" (ver figura 11.9.1) que referem-se, respectivamente, ao seno, cosseno e tangente.

Veja um exemplo para o seno de um arco de 30º e de forma similar se aplica as outras relações.

Incialmente observe se no visor da calculadora aparece uma letra "D" referente a unidade de graus (figura 11.9.2). Se sim, tecle em "sin", em seguida digite 30 e tecle em igual "=". O visor mostrará o sen30º conforme a figura 11.9.2. Se não, acompanhe os passos do último parágrafo.

Para o cálculo em radianos, tecle duas vezes no botão "modeclr" e escolha a opção 2 "Rad", conforme a figura 11.9.3. No visor aparecerá uma letra "R" referente a radianos, conforme a figura 11.9.4.

Faremos um exemplo para o seno do arco $\pi/6$.

Na calculadora tecle:

1-em "sin", 2- abra um parênteses, 3 - tecle "Shifit", 4 - tecle "Exp" (refere-se ao valor π), 5 – em "÷", 6 – em "3", 7 - feche os parênteses, e por fim, 8 - tecle em igual "=". A calculadora mostrará o sen $\pi/3$ conforme a figura 11.9.4.

Para voltar a unidade de graus, tecle duas vezes no botão "modeclr" e escolha a opção 1 "Deg", conforme a figura 11.9.3. No visor aparecerá uma letra "D" referente a graus.



Figura 11.9.1



Figura 11.9.2



Figura 11.98.3

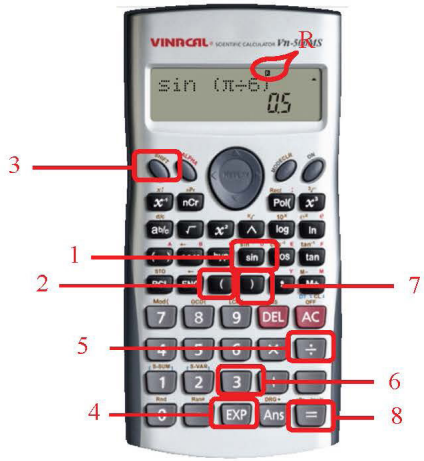


Figura 11.9.4

CAPÍTULO

12

GEOMETRIA ESPACIAL

GEOMETRIA ESPACIAL

12. GEOMETRIA ESPACIAL

Geometria espacial é a área da matemática que estuda figuras geométricas ou sólidos geométricos em três dimensões. Nesta unidade, estudaremos as figuras geométricas espaciais mais conhecidas, como os poliedros em geral, os prismas, as pirâmides, os cones, os cilindros e as esferas. Cada uma dessas figuras pode representar objetos na nossa realidade, como dados, caixas de sapato, caixas de frutas (que são prismas), casquinhas de sorvete ou chapéus de aniversário (que são cones), canos de PVC, latas de tintas, silos (que são cilindros), bolas de futebol (que são esferas), entre outros. A geometria espacial é responsável pelo estudo das estruturas dessas figuras e suas aplicações.

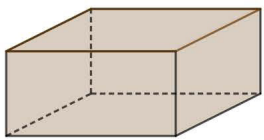
12.1. Poliedros

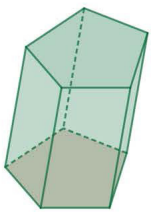
Definição 12.1.1 (simplificada): ***Poliedro*** é a reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um outro polígono.

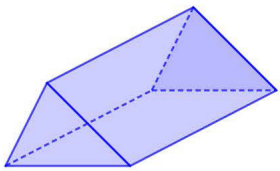
A palavra poliedro é formada por duas palavras gregas: polys que significa várias, dando origem ao prefixo **poli** e hédrai que significa faces, dando origem ao sufixo **edro**.

Poliedros são sólidos geométricos cuja superfície é formada por partes planas. Esses sólidos não têm formas arredondadas.

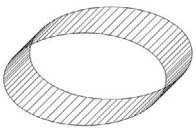
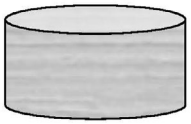
Exemplos:







Exemplos de figuras que **não são** poliedros, pois possuem curvas ou formas arredondadas em sua superfície:

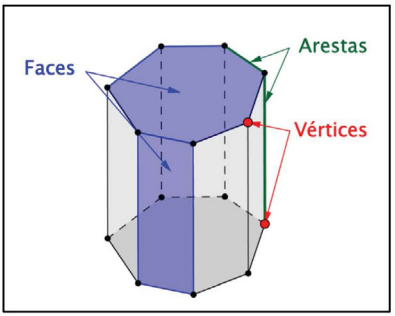




Elementos de um poliedro:

- Face (um polígono): São os polígonos que limitam os poliedros.

- Aresta (um segmento): É o lado do polígono que limita o poliedro ou a interseção de dois polígonos que formam faces da figura.

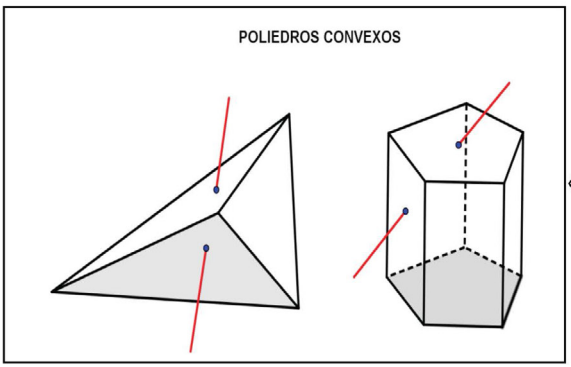
-Vértice (um ponto): É cada um dos pontos de interseção de 3 ou mais arestas.



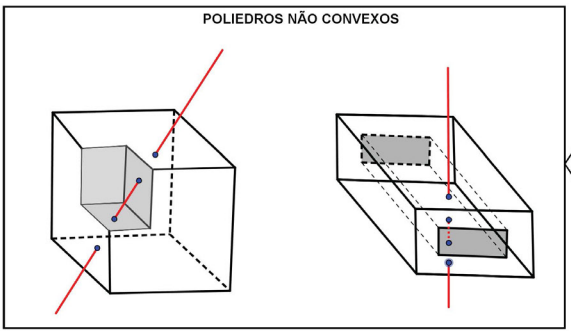
Nomes dos poliedros quanto ao número de faces:

Quant. de faces	Nome do Poliedro	Quant. de faces	Nome do Poliedro
4	Tetraedro	10	Decaedro
5	Pentaedro	11	Undecaedro
6	Hexaedro	12	Dodecaedro
7	Heptaedro	13	Tridecaedro
8	Octaedro	...	...
9	Nonaedro	20	Icosaedro

Um poliedro é convexo se qualquer segmento de reta, não paralelo as faces, o intersecta em, no máximo, dois pontos. Caso contrário, é chamado de poliedro não-convexo.



Estes poliedros são convexos, pois todos os segmentos de reta, não paralelos as suas faces, os intersectam em no máximo dois pontos.



Estes poliedros não são convexos, pois existem segmentos de reta, não paralelos as suas faces, que os intersectam em mais de dois pontos.

12.1.1. Relação de Euler

Relação de Euler[5]: Em um poliedro convexo de F faces, A arestas e V vértices, tem-se necessariamente que:

$$V + F - A = 2$$

Demonstração: A estratégia dessa demonstração consiste em imaginar um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices, totalmente desmontado face por face. Em seguida, procede-se à montagem do poliedro novamente, reunindo as faces, uma a uma, reanalisando em cada passo o valor da relação de Euler.

Iniciando pela primeira face, podemos pensar em qualquer polígono para essa face. Suponha que seja o polígono da figura 12.1.1.1.

A relação de Euler vale: $\underbrace{V}_{5} + \underbrace{F}_{1} - \underbrace{A}_{5} = 1$ (confira na figura!).

Unindo a segunda face (imagine qualquer polígono) à primeira, conforme o exemplo da figura 12.1.1.2. A relação de Euler vale: $\underbrace{V}_{9} + \underbrace{F}_{2} - \underbrace{A}_{10} = 1$.

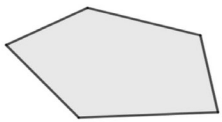


Figura 12.1.1.1

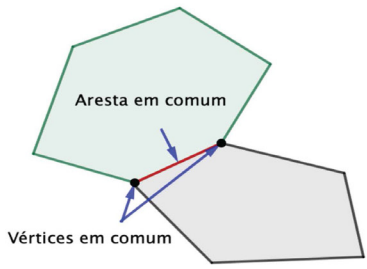


Figura 12.1.1.2

[5] Leonhard Euler (1707-1783) possui cerca de quinhentos livros publicados e é considerado um dos precursores da Matemática moderna, com grandes contribuições para a geometria analítica, trigonometria, geometria, cálculo, teoria dos números e outros.

Unindo a terceira face (imagine também qualquer polígono) às primeiras, conforme o exemplo da figura 12.1.1.3, a relação de Euler vale: $\underbrace{V}_{12} + \underbrace{F}_{3} - \underbrace{A}_{14} = 1$.

O valor da relação de Euler continuou inalterado, e essa não variação é consequência dos seguintes fatos:

◆ O número de vértices em comum excede o número de arestas em comum em uma unidade (analise todas as figuras), isto é:

$$V_{comuns} = A_{comuns} + 1 \quad \Longrightarrow \boxed{A_{comuns} - V_{comuns} = -1}$$

◆ A nova face a ser unida, possui sempre o número de arestas igual ao número vértices (uma vez que é um polígono) e já sabemos pela análise inicial que

$$\boxed{V_{novo} + F_{novo} - A_{novo} = 1}$$

Assim, a relação de Euler, após a união de cada nova face, vale:

$$V + F - A = \underbrace{V_{antes} + V_{novo} - V_{comuns}}_{V} + \underbrace{F_{antes} + F_{novo}}_{F} - (\underbrace{A_{antes} + A_{novo} - A_{comuns}}_{A})$$

$$V + F - A = \underbrace{V_{antes} + F_{antes} - A_{antes}}_{1} + \underbrace{V_{novo} + F_{novo} - A_{novo}}_{1} + \underbrace{A_{comuns} - V_{comuns}}_{-1} = 1$$

Esse padrão é válido para a união de qualquer uma das faces, com exceção da última face que fecha o poliedro. Na figura 12.1.1.4, podemos observar que, nesse caso, não haverá novos vértices nem novas arestas, apenas uma nova face que fecha o poliedro.

$$V + F - A = \underbrace{V_{antes} + F_{antes} - A_{antes}}_{1} + \underbrace{1}_{Face} = 2.$$

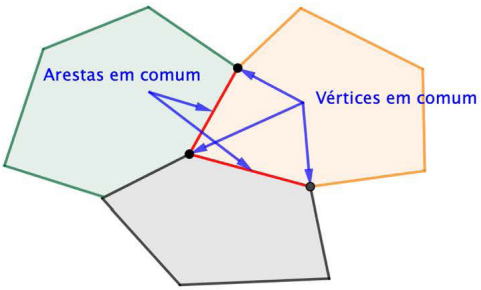


Figura 12.1.1.3

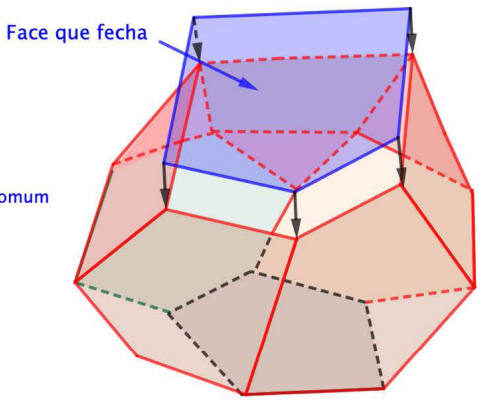
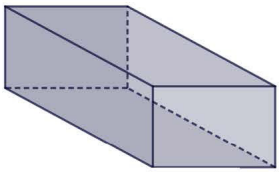


Figura 12.1.1.4

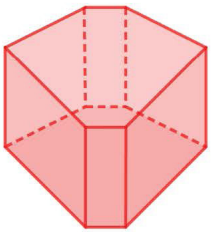
Observação: Para manter a expressão $V + F - A = 1$ invariável é preciso que a construção seja feita com polígonos adjacentes sem deixar "buracos". O que é perfeitamente possível para poliedros convexos e alguns poliedros não convexos. Essas são também as condicionantes para a validade da relação de Euler.

Exemplos:



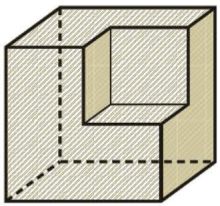
Este poliedro é convexo com: 8 vértices, 6 faces e 12 arestas. Então, vale a relação de Euler:

$$V + F - A = 8 + 6 - 12 = 2.$$



Poliedro convexo com: 12 vértices, 18 arestas e 8 faces. Então, verifica-se a relação de Euler:

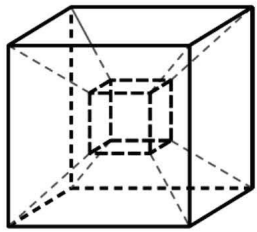
$$V + F - A = 12 + 8 - 18 = 2.$$

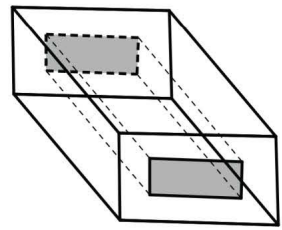


Este poliedro é não convexo, e mesmo assim, vale a relação de Euler. Veja que há 14 vértices, 21 arestas e 9 faces e que:

$$V + F - A = 14 + 9 - 21.$$

Os poliedros não convexos em que normalmente **não vale a relação de Euler** são os que possuem "buracos" em sua estrutura. Exemplos:





Nesses poliedros a relação de Euler é falsa, ou seja, $V + F - A \neq 2$. Verifique!

A vantagem da relação de Euler é que, dado um poliedro convexo, na ausência de uma das informações sobre o número de vértices, faces ou arestas, basta utilizar a relação para encontrá-la.

Exemplo: Qual o número de faces de um poliedro convexo que tem 30 arestas e 12 vértices?

Solução: Como se trata de um poliedro convexo, vale a relação de Euler.

Substituindo os dados em V + F – A = 2, obtemos

$$12 + F - 30 = 2 \Rightarrow F = 2 + 30 - 12 \Rightarrow \boxed{F = 20}.$$ Resposta: 20 faces.

2º exemplo: Sabe-se que um poliedro convexo de 11 faces, possui um número de arestas igual ao dobro de vértices. Quantas arestas possui este poliedro?

Solução: Como A = 2.V e o poliedro é convexo, vale a relação de Euler.

Substituindo A = 2.V e F =11 em V + F – A = 2 , dispomos de

$$V + 11 - 2V = 2 \Rightarrow -V = 2 - 11 \Rightarrow \boxed{V = 9}.$$

Como A = 2.V $\Rightarrow$ A = 2.9 $\Rightarrow \boxed{A = 18}$. Resposta: 18 arestas.

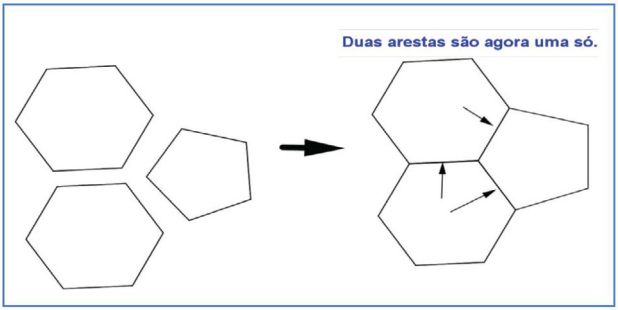
3º exemplo: Algumas bolas de futebol possuem figuras geométricas em sua superfície. Uma bola que possui 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, possui quantos vértices?



Solução: Embora uma bola de futebol não seja um poliedro, podemos aproximar suas faces como planas e aplicar a relação de Euler. No entanto, antes disso, vamos verificar quantas arestas a bola possui.

Imaginemos todos os polígonos: 12 pentágonos e 20 hexágonos do poliedro desmontados. O total de arestas é calculado somando o número de arestas de cada polígono, ou seja, 12 pentágonos, cada um com 5 lados (12 x 5 = 60 arestas), e 20 hexágonos, cada um com 6 lados (20 x 6 = 120 arestas). Portanto, o total de arestas é 60 + 120, resultando em 180 arestas.

Entretanto, com os polígonos unidos e montados, cada aresta é exatamente a união de duas outras arestas anteriores. Veja a ilustração de um trecho do poliedro:



Desta forma, as 180 arestas são reduzidas a 90 arestas (dividindo por 2). Portanto, o poliedro possui 90 arestas.

As faces claramente são: 12 +20 = 32 faces e pela relação de Euler, encontramos

$$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 32 - 90 = 2 \Rightarrow \boxed{V = 60}.$$ Resposta: 60 vértices.

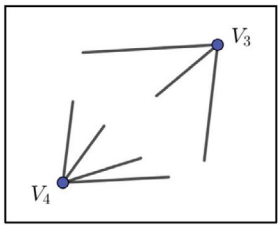
O raciocínio empregado nesse exemplo nos leva à seguinte fórmula utilizada no cálculo do número de arestas a partir da quantidade e tipos de faces de um poliedro convexo:

$$A = \frac{3.F_3 + 4.F_4 + 5.F_5 + 6.F_6 + \cdots}{2}$$

Onde: F_3 – quantidade de faces triangulares, F_4 - quantidade de faces quadrangulares, F_5 - quantidade de faces pentagonais, etc.

Utilizando esse mesmo raciocínio, demonstra-se a seguinte fórmula para a quantidade de vértices que partem um certo número de arestas.

Seja um poliedro convexo, em que: V_3 - é quantidade de vértices que partem 3 arestas, V_4 – a quantidade de vértices que partem 4 arestas, V_5 – a quantidade de vértices que partem 5 arestas, etc. Como cada aresta que parte de um vértice é também aresta de outro vértice (são contados em duplicidade), temos:



$$A = \frac{3.V_3 + 4.V_4 + 5.V_5 + 6.V_6 + \cdots}{2}.$$

4º exemplo: Um poliedro convexo possui 4 faces hexagonais e 4 triangulares. Quantos vértices e quantas arestas possui este poliedro?

Solução:

$$A = \frac{3.F_3 + 6.F_6}{2} = \frac{3.4 + 6.4}{2} = \frac{12 + 24}{2} = \frac{36}{2} \Rightarrow \boxed{A = 18 \ arestas}.$$

A quantidade de faces é $F = 4 + 4 = 8$. E pela relação de Euler, encontramos

$$V + F - A = 2 \Rightarrow V + 8 - 18 = 2 \Rightarrow \boxed{V = 12 \ vértcies}.$$

5º exemplo: Um poliedro convexo possui 12 vértices. Quatro desses vértices partem 3 arestas e dos vértices restantes partem 4 arestas. Quantas arestas e quantas faces possui esse poliedro?

Solução:

$$A = \frac{3.V_3 + 4.F_4}{2} = \frac{3.4 + 4.8}{2} = \frac{12 + 32}{2} = \frac{44}{2} \Rightarrow \boxed{A = 22 \ arestas}.$$

Pela relação de Euler: $V + F - A = 2 \Rightarrow 12 + F - 22 = 2 \Rightarrow \boxed{F = 12 \ vértices}$.

EXERCÍCIOS 12.1

1)Qual o número de vértices de um poliedro convexo de 15 faces e 20 arestas?

2)Qual o número de arestas de um poliedro convexo de 8 faces e 12 vértices?

3)Qual o nome do poliedro convexo que possui 4 vértices e 6 arestas?

4) Um poliedro convexo possui 6 faces pentagonais e 4 triangulares. Quantos vértices e quantas arestas possui este poliedro?

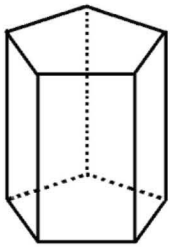
5)Um poliedro convexo possui 20 faces hexagonais, 10 faces pentagonais e 2 triangulares. Quantos vértices e quantas arestas possui este poliedro?

6)Existe um poliedro convexo de 5 vértices e 4 arestas? Justifique.

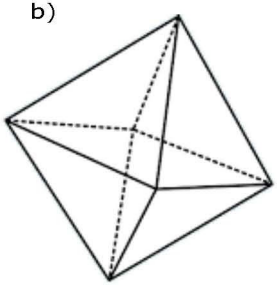
7)(FAAP - SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices em 6 unidades. Calcule o número de faces.

8)Qual o número de vértices, arestas e faces de cada poliedro?

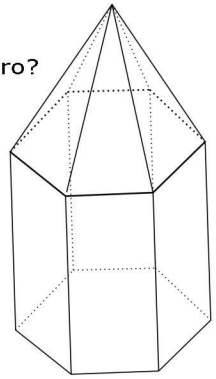
a)



b)



c)



9)(UFPEL-RS) No país do México, há mais de mil anos, o povo asteca resolveu o problema da armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.

(http://www.tibarose.com/port/boletim.htm,acessado em: 10/10/2007 (adaptado).

Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem:

a) 90 arestas e 60 vértices
b) 86 arestas e 56 vértices
c) 90 arestas e 56 vértices
d) 86 arestas e 60 vértices
e) 110 arestas e 60 vértices

10)(UNIRIO)Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices deste cristal é igual a:

a) 35; b) 34; c) 33 d) 32; e) 31.

11)(U.F. – RS) Um poliedro convexo tem seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. O número de arestas e de vértices do poliedro é, respectivamente:

a) 34 e 10 b) 19 e 10 c) 34 e 20 d) 12 e 10 e) 19 e 12

12) João monta poliedros convexos utilizando canudos e massa de modelar conforme a figura a seguir. Em seu novo projeto, ele pretende montar outro poliedro usando 30 canudos, porém com o número de faces igual ao número de vértices. Podemos afirmar que esse poliedro possui:

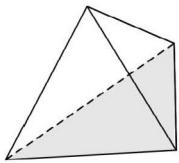


a) 16 vértices
b) 32 faces
c) 15 arestas
d) 32 vértices
e) 50 faces

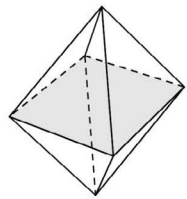
12.1.2. Poliedros regulares

Definição 12.1.2.1: Um poliedro convexo é denominado de regular se suas faces são polígonos regulares congruentes, onde cada face possui o mesmo número de lados e, em todo vértice, convergem o mesmo número de arestas.

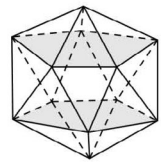
Existem apenas cinco poliedros regulares convexos. São eles:



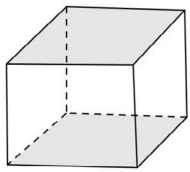
Tetraedro regular



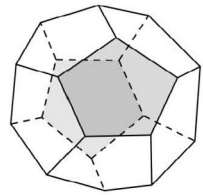
Octaedro regular



Icosaedro regular



Hexaedro regular



Dodecaedro regular

Demonstração:

Como as faces são iguais, para n faces, temos

$$A = \frac{3.F_3 + 4.F_4 + 5.F_5 + 6.F_6 + \cdots}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{n.F}{2}} \ (1).$$

O número de arestas que parte de cada vértice deve ser igual, e ao nomearmos essa quantidade como x, obtemos

$$A = \frac{3.V_3 + 4.V_4 + 5.V_5 + 6.V_6 + \cdots}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{x.V}{2}} \ (2).$$

De (1) e (2), concluímos que

$$\frac{n.F}{2} = \frac{x.V}{2} \Rightarrow \boxed{V = \frac{n.F}{x}} \ (3).$$

Substituindo (1) e (3) na relação de Euler, encontramos

$$\underbrace{\frac{n.F}{x}}_{V} + F - \underbrace{\frac{n.F}{2}}_{A} = 2 \Rightarrow \frac{2.n.F + 2.x.F - nx.F}{2x} = 2 \Rightarrow \boxed{F = \frac{4.x}{2.n + 2.x - n.x}} \ (4).$$

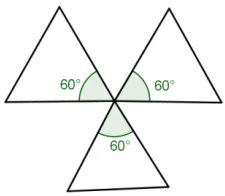
Por outro lado, os polígonos das faces são regulares, então cada ângulo interno destes polígonos medem

$$\frac{(n-2).180°}{n}.$$

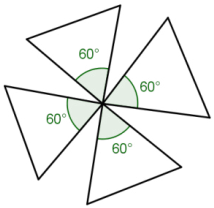
Soma dos ângulos internos dividido pela quantidade de lados.

Ressalte-se que soma dos ângulos internos em torno de um vértice não pode ser igual e nem ultrapassar 360°, pois não é possível haver sobreposição de faces

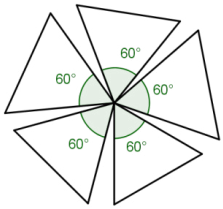
ao formar um poliedro no espaço. Veja o exemplo para o triângulo equilátero:



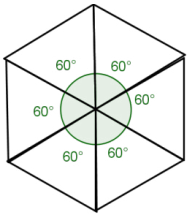
possível formar um poliedro



possível formar um poliedro



possível formar um poliedro



Impossível formar um poliedro (no espaço)

Nesse entendimento,

$$\frac{(n-2).180°}{n}.x < 360° \Rightarrow (n-2).x < 2n \Rightarrow \boxed{x < \frac{2.n}{n-2}}\ (5).$$

Iniciando por $n = 3$, triângulos equiláteros, encontramos $x < 6$ na expressão (5). Entretanto, cada vértice precisa partir pelo menos três arestas, isto é, $x \geq 3$. Desse modo, os três casos possíveis são $x = 3$, $x = 4$ e $x = 5$. Substituindo esses valores em (4), obtemos:

Para $x = 3 \Rightarrow F = \frac{4.x}{2.n+2.x-n.x} = \frac{4.3}{2.3+2.3-3.3} = 4 \Rightarrow$ Tetraedro.

Para $x = 4 \Rightarrow F = \frac{4.x}{2.n+2.x-n.x} = \frac{4.4}{2.3+2.4-3.4} = 8 \Rightarrow$ Octaedro.

Para $x = 5 \Rightarrow F = \frac{4.x}{2.n+2.x-n.x} = \frac{4.5}{2.3+2.5-3.5} = 20 \Rightarrow$ Icosaedro.

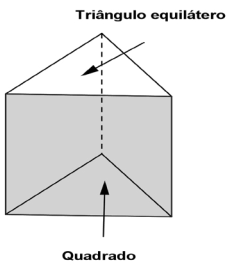
Agora, se $n = 4$, quadrados, a expressão (5) nos dá $x < 4$. Como $x \geq 3$, então:

Para $x = 3 \Rightarrow F = \frac{4.x}{2.n+2.x-n.x} = \frac{4.3}{2.4+2.3-4.3} = 6 \Rightarrow$ Hexaedro (Cubo).

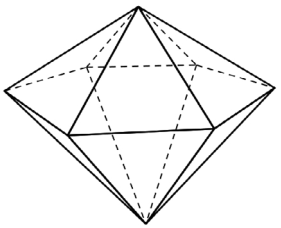
Se $n = 5$, pentágonos regulares, temos $x < 4$ e $x \geq 3$. E assim:

Para $x = 3 \Rightarrow F = \frac{4.x}{2.n+2.x-n.x} = \frac{4.3}{2.5+2.3-5.3} = 12 \Rightarrow$ Dodecaedro.

Exemplos de poliedros **não** regulares:



Motivo: Possui faces diferentes.

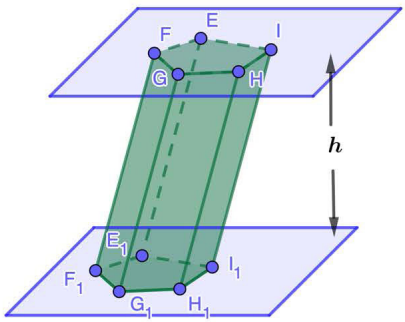

Motivo: O número de arestas que parte do vértice superior é diferente do vértice lateral.

Observe que, embora os poliedros acima possuam faces formadas por polígonos regulares, eles **não são** poliedros regulares.

12.2. Prismas

Definição 12.2.1: Denomina-se prisma todo poliedro formado por uma face superior e face inferior paralelas e congruentes, ligadas por arestas laterais paralelas.

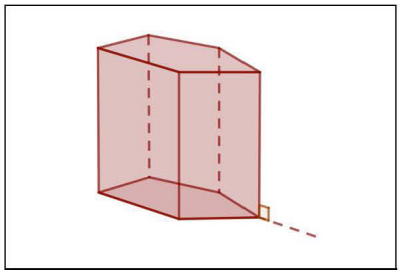
Considerando o prisma da figura abaixo, temos os seguintes elementos:



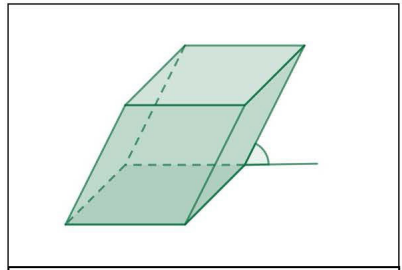
- **Bases:** os polígonos $EFGHI$ e $E_1F_1G_1H_1I_1$;
- **Arestas da base:** os segmentos $\overline{F_1G_1}, \overline{G_1H_1}, \overline{H_1I_1}, \overline{I_1E_1}, \overline{E_1F_1}$ do polígono inferior (base inferior) e os segmentos $\overline{FG}, \overline{GH}, \overline{HI}, \overline{IE}, \overline{EF}$ do polígono superior (base superior);
- **Arestas laterais:** os segmentos paralelos $\overline{FF_1}, \overline{GF_1}, \overline{HH_1}, \overline{II_1}, \overline{EE_1}$;
- **Faces laterais:** os quadriláteros: FGF_1G_1, GHG_1H_1, HIH_1I_1, IEI_1E_1, EFE_1F_1.
- **Altura:** distância h entres os planos superior e base.

12.2.1. Classificação dos prismas

Um prisma pode ser:



Reto: Quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.



Oblíquo: Quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

Chamamos de **prisma regular** todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares.

De acordo com a base, um prisma pode ser denominado de:

- **Prisma de base triangular**, se sua a base for um triângulo;
- **Prisma de base quadrangular**, se a base for um quadrilátero;
- **Prisma de base pentagonal**, se a base for um pentágono.

E assim por diante.

Como exemplos, veja os prismas de base triangular, hexagonal e heptagonal, respectivamente, nas figuras 12.2.1.1, 12.2.1.2 e 12.2.1.3.

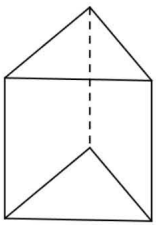
Alguns prismas quadrangulares possuem nomes especiais, como o paralelepípedo e o cubo.

O **paralelepípedo** é um prisma quadrangular cujas bases são paralelogramos. Ele pode ser classificado em:

- **Paralelepípedo reto retângulo:** As bases e as faces laterais são retângulos (figura 12.2.1.5).

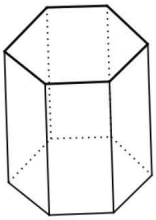
Um caso particular do paralelepípedo reto retângulo é o hexaedro regular que denominamos de **cubo** (figura 12.2.1.4).

- **Paralelepípedo retângulo:** As bases são retângulos e as faces laterais são paralelogramos (figura 12.2.1.6).



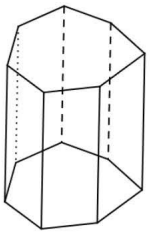
Base triangular

Figura 12.2.1.1



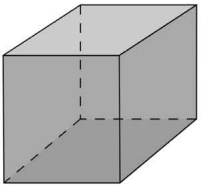
Base hexagonal

Figura 12.2.1.2



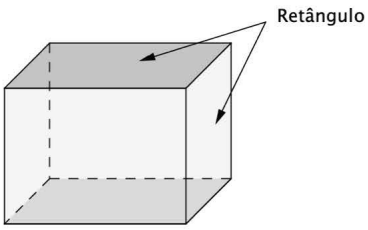
Base heptagonal

Figura 12.2.1.3



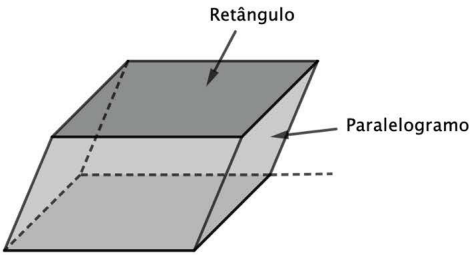
Cubo

Figura 12.2.1.4



Paralelepípedo reto retângulo

Figura 12.2.1.5



Paralelepípedo retângulo

Figura 12.2.1.6

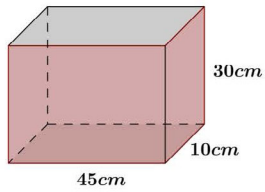
12.2.2. Área da superfície de um prisma

Área lateral (A_l): É a soma das áreas dos polígonos que forma a lateral do prisma.

Área da base (A_b): Corresponde a área do polígono que constitui a sua base.

Área total (A_T): É a soma de todas as áreas do prisma.

Exemplo: Calcule a área da superfície do paralelepípedo abaixo.



Solução:

A área da base: $A_b = 10.45 \Rightarrow \boxed{A_b = 450cm^2}$.

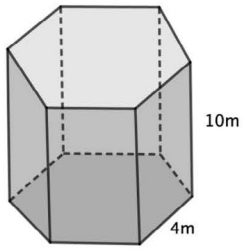
A área lateral:

$A_l = 2.45.30 + 2.10.30 \Rightarrow \boxed{A_l = 3300cm^2}$.

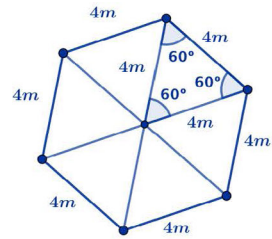
A área total:

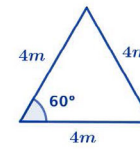
$A_T = A_l + 2.A_b = 3300 + 2\,.\,450 \Rightarrow \boxed{A_T = 4.200cm^2}$.

2º exemplo: Calcule a área da superfície do prisma regular de base hexagonal abaixo.



Solução: Para o cálculo da área da base, vamos dividir o hexágono regular em 6 triângulos equiláteros ($A_b = 6.A_\Delta$), conforme as figuras a seguir.





$$A_b = 6.\frac{4.4.sen60°}{2} = 48.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A_b = 24\sqrt{3}m^2}.$$

A lateral é formada por 6 retângulos de altura 10m e base 4m. Assim,

$$A_l = 6.10.4 \Rightarrow \boxed{A_l = 240m^2}.$$

A área total é

$$A_T = A_l + 2.A_b = 240 + 2.24\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_T = 240 + 48\sqrt{3}\,m^2}.$$

12.2.3. Volume de um prisma

Genericamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado de acordo com uma unidade de medida. Se eventualmente queremos saber quantas maçãs cabem em uma caixa ou quantos limões cabem em uma sacola ou ainda, quantos litros cabem em uma panela, por exemplo, as unidades de medida são respectivamente, caixas, limões e litros. Embora a quantidade de espaço fique perfeitamente definida e mensurada com essas unidades de medidas, elas não trazem informações contundentes e comparativas entre quais espaços ocupados (ou de armazenamento) é maior ou menor, e quanto. Por esse motivo, iremos adotar uma única unidade de medida para os sólidos geométricos: um cubo de aresta 1, conforme a definição a seguir.

Definição 12.2.3.1: O volume de um sólido geométrico representa a quantidade de cubos unitários que cabem no sólido.

O sólido mais simples é o prisma reto. Para determinar a quantidade de cubos unitários que cabem nesse sólido, utilizamos o princípio multiplicativo entre as dimensões: **comprimento x largura x altura**.

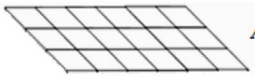
Como o **comprimento x largura** é área da base, escrevemos:

$$V = A_b \cdot h$$

O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura.

Em que: A_b é área da base e h é a altura do prisma.

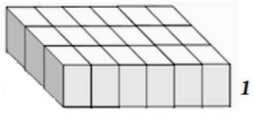
Demonstração: Foi visto em geometria plana que a área de uma figura plana é a quantidade de quadradinhos unitários que cabem na figura.



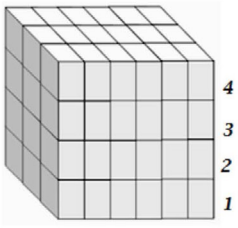
Área da base

A cada quadradinho unitário da base se faz necessário uma unidade de altura para compor os cubos unitários, pois um cubo unitário possui dimensões 1x1x1. Por exemplo: um cubo de $1cm^3 = \underbrace{1cm \text{x} 1cm}_{base} \text{ x } \underbrace{1cm}_{altura}$. Desse modo:

- Para uma unidade de altura, temos V = A_bx1 cubos unitários

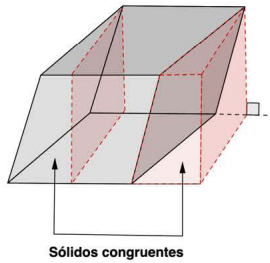


- Para quatro unidades, temos V = A_bx4:



E para h unidades: $\boxed{V = A_b \,.h}$.

Este mesmo princípio (área da base x altura) pode ser aplicado em qualquer prisma, mesmo que a base não seja retangular. Além disso, o prisma pode ser também oblíquo, uma vez que podemos transformá-lo em prisma reto, conforme a figura ao lado.



1º exemplo: Vamos calcular o volume de um cubo de aresta 5cm.

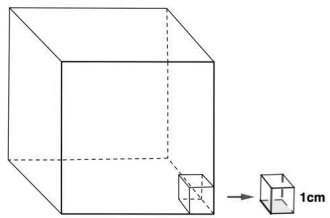
Solução:

Como o cubo possui todas as arestas iguais, temos

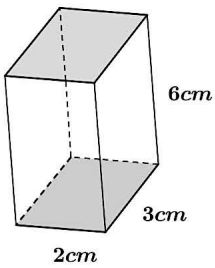
$A_b = 5\text{cm} \,.\, 5\text{cm} = 25\text{cm}^2$ e $h = 5\text{cm}$.

$V = 25.5 \Rightarrow \boxed{V = 125\ cm^3}$.

O volume calculado de 125 cm^3, implica dizer que cabem 125 cubos de 1cm^3 no cubo.



2º exemplo: Calcule o volume do prisma reto a seguir.



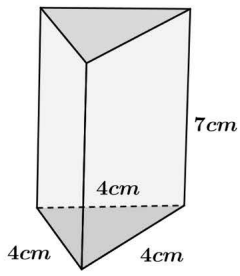
Solução:

$A_b = 3\text{cm} \,.\, 2\text{cm} = 6\text{cm}^2$ e $h = 6\text{cm}$, então

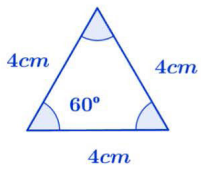
$V = 6.6 \Rightarrow \boxed{V = 36\ cm^3}$.

Logo, cabem 36 cubos de 1cm^3 no paralelepípedo.

3º exemplo: Calcule do volume e a área total de um prisma regular de base triangular cujos lados medem 4cm e altura 7cm.



Solução: Prisma regular é todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares, neste caso, a base do prisma é o triângulo equilátero a seguir.



Área da base: $A_b = \frac{a.b.sen60°}{2} = \frac{4.4.sen60°}{2} = \frac{16.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A_b = 4\sqrt{3}\text{cm}^2}$.

Área lateral: $A_l = 3.4.7 = 84\text{cm}^2$ (três vezes a área de um retângulo lateral).

Área total: $A_T = A_l + 2.A_b = 84 + 2.4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{A_T = 84 + 8\sqrt{3}\text{cm}^2}$.

Volume: $V = A_b \,.\, h = 4\sqrt{3}\,.7 \Rightarrow \boxed{V = 28\sqrt{3}\text{cm}^3}$.

4º exemplo: Calcule o volume de um cubo de 6cm de aresta e a medida de sua diagonal interna.

Solução: Como o cubo possui todas as arestas iguais, então

$$A_b = 6cm.6cm = 36\,cm^2 \text{ e } h = 6cm.$$

$$V = 36.6 \Rightarrow \boxed{V = 216\,cm^3}.$$

A diagonal solicitada do cubo é a medida do comprimento de AC (ver figura a seguir). A medida BC pode ser calculada usando o teorema de Pitágoras,

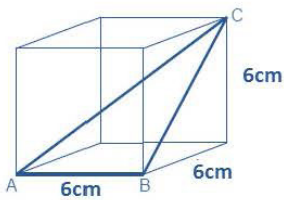
$$\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{2.36} \Rightarrow$$

$$\overline{BC} = \sqrt{2}.\sqrt{36} = \sqrt{2}.6 = 6\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\overline{BC} = 6\sqrt{2}\,cm}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras novamente, agora no triângulo ABC, encontramos

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 + 6^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 6^2} = \sqrt{36.2 + 36} \Rightarrow$$

$$\overline{AC} = \sqrt{36.(2+1)} = \sqrt{36}.\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\overline{AC} = 6\sqrt{3}\,cm}.$$



5º exemplo: Pretende-se escavar um viveiro no formato de paralelepípedo para criação de peixes. Por questões técnicas, o viveiro precisa de um comprimento quatro vezes maior que a sua largura e quantidade de 100 peixes a cada 1000 litros. Respeitando as questões técnicas, calcule as dimensões para um viveiro de 6 metros de largura e para a criação de 30000 peixes.

Solução: $A_b = 6\text{m} \,.\, \overbrace{24\text{m}}^{4\ vezes} = 144\text{m}^2$.

Para uma profundidade h, a capacidade do viveiro é $V = 144\,.h$.

Em contrapartida, o viveiro deve comportar 30000 peixes, sendo 1000 litros a cada 100 peixes, o que equivale a 300000 litros ou 300m^3 (ver tabela no final deste livro). Isso posto,

$$144\,.h = 300 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{300}{144} \Rightarrow \boxed{h = 2{,}08\ m}.$$

Esse viveiro precisa ter 6 metros de largura, 24metros de comprimento e 2,08 metros de profundidade.

6º exemplo: (ENEM 2010) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3cm de largura, 18cm de comprimento e 4cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a:

a) 5 cm. b) 6 cm. c) 12 cm. d) 24cm e) 25 cm.

Solução: O volume da barra de chocolate em forma de paralelepípedo é

$$V = 3.4.18 \Rightarrow \boxed{V = 216\,cm^3}.$$

Supondo que o lado da barra de chocolate em forma de cubo seja de aresta a, o seu volume é $V = a.a.a = a^3$. Como os dois sólidos possuem o mesmo volume, concluímos que

$$a^3 = 216 \Rightarrow a = \sqrt[3]{216} \Rightarrow \boxed{a = 6cm}. \quad Letra\ b).$$

EXERCÍCIOS 12.2

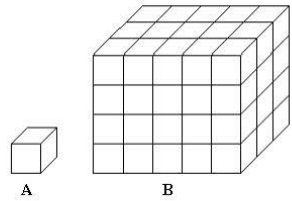
1)Calcule o volume de um prisma cuja área da base é 30cm² e altura 5cm.

2)Qual deve ser a altura de um prisma cuja área da base é 18cm², para que seu volume seja 54 cm³?

3)Qual a altura de um prisma que possui volume de 169m³ e a área de base de 13m²?

4)(UNESP) Quantos cubos A precisa-se empilhar para formar o paralelepípedo B?

a) 60
b) 47
c) 94
d) 39
e) 48

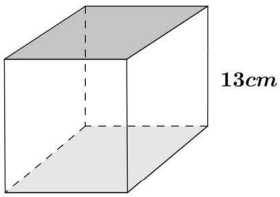


5)Calcule a área total e o volume de um cubo de 7cm de aresta.

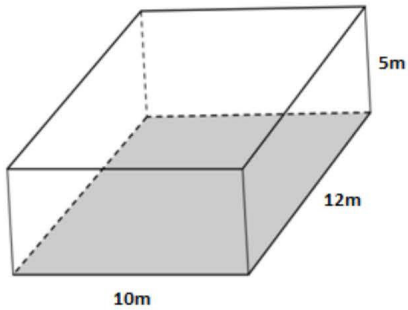
6) Um prisma possui 18 arestas, todas iguais a 10cm. Quantos vértices e quantas faces possui este prisma? Desenhe o prisma e calcule o seu volume.

7)Calcule a área total e o volume dos seguintes sólidos:

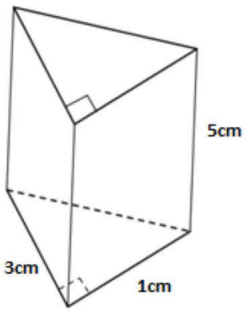
a) Cubo



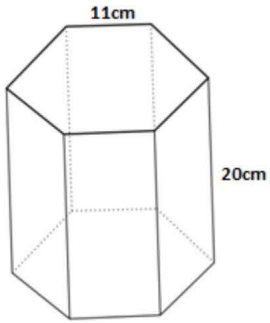
b) Paralelepípedo reto retângulo



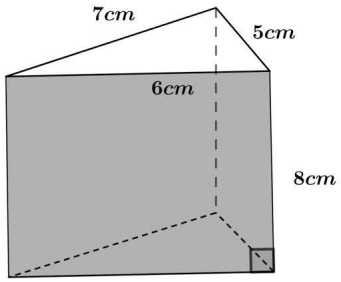
c)Prisma reto triangular



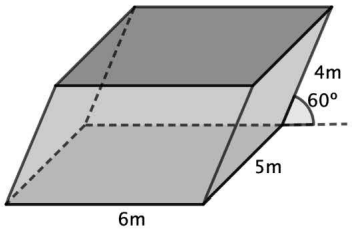
d) Prisma regular hexagonal



e)Prisma reto triangular



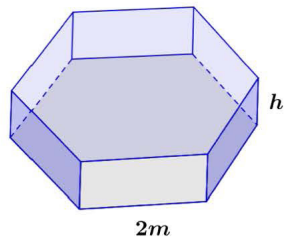
f) Paralelepípedo (Prisma oblíquo)



8)Calcule o volume e a medida da diagonal interna do cubo de aresta 5cm.

9)Calcule a medida da diagonal interna de um paralelepípedo reto que mede 3m de largura, 4m de comprimento e 12m de altura.

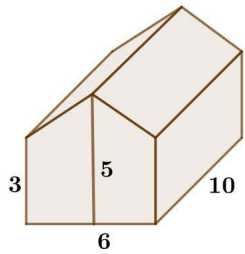
10) Pretende-se construir uma piscina no formato de hexágono regular de lado 2m, conforme a figura. Que profundidade h precisa ter essa piscina para que sua capacidade seja de 15,3 mil litros? Use: $\sqrt{3}$ = 1,7.



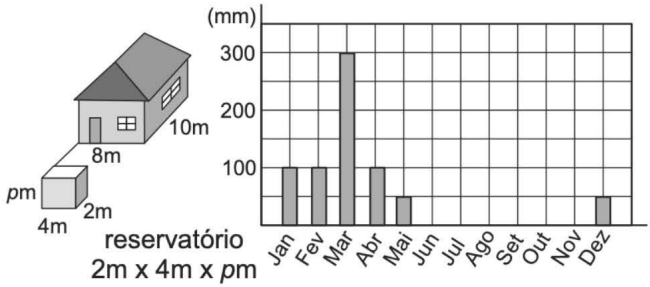
11) Uma carreta possui carroceria em forma de paralelepípedo reto de 3m de altura, 16m de comprimento e 2,5m de largura, e será usada para escoar a produção de grãos de soja de uma fazenda. Sabendo que a produção foi de 352 toneladas e a massa específica (ou densidade) do grão de soja é de 800kg/m³, qual o menor número de viagens necessárias para escoar toda a produção?

12)(EUMT – LONDRINA) O volume de ar contido em um galpão com a forma as dimensões dadas pela figura abaixo é:

a)300 b)240 c)225 d)210 e)180



13)(ENEM)Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso. As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.

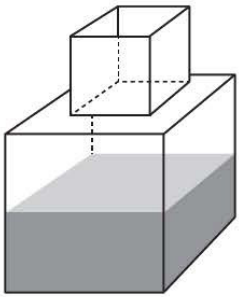


Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (p) do reservatório deverá medir:

a) 4m b) 5m c) 6m d) 7m e) 8m

14)(ENEM) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta de parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

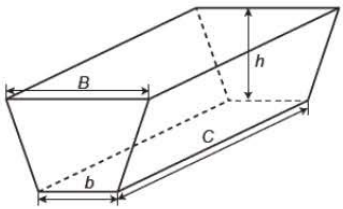
Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?



a) 8
b) 10
c) 16
d) 18
e) 24

15)(ENEM) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.



Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo

EMBRAPA. **Gado de corte**. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

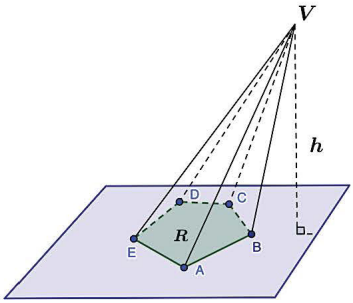
Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

a) 110.
b) 125.
c) 130.
d) 220.
e) 260.

12.3. Pirâmide

Definição 12.3.1: Denomina-se pirâmide a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade em um ponto e a outra em um polígono.

Elementos da pirâmide:



- **Base:** o polígono convexo R;
- **Arestas da base**: os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$ do polígono;
- **Arestas laterais**: os segmentos $\overline{VA}$, $\overline{VB}$, $\overline{VC}$, $\overline{VD}$, $\overline{VE}$;
- **Faces laterais**: os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEA;
- **Altura:** distância h do ponto V ao plano.

Há vários monumentos e arquiteturas antigas, e também modernas, inspiradas em pirâmides:



Pixabay

Pirâmides de Gizé - Egito.

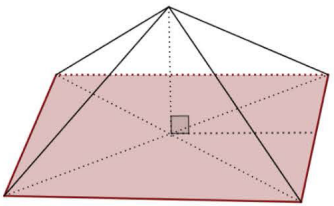


Pixabay

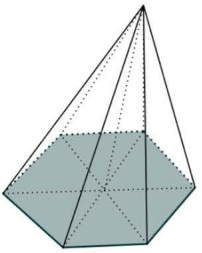
Pirâmide do Louvre – Paris.

12.3.1. Classificação de pirâmides

Uma **pirâmide** é **reta** quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base, caso contrário é uma **pirâmide oblíqua**.



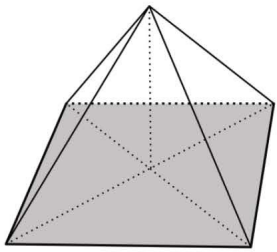
Pirâmide reta



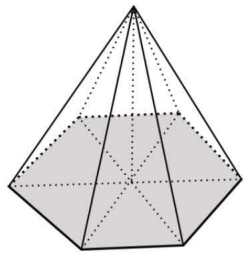
Pirâmide oblíqua

Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, recebe o nome de **pirâmide regular**. Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal, e assim por diante, conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Exemplos:



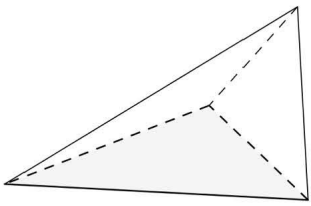
Pirâmide quadrangular



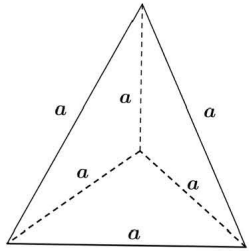
Pirâmide hexagonal

Toda pirâmide triangular recebe o nome do **tetraedro**. Quando o tetraedro possui como faces triângulos equiláteros, ele é denominado regular (todas as faces e todas as arestas são congruentes).

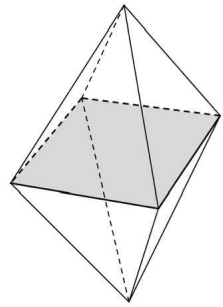
A reunião, base com base, de duas pirâmides de bases quadrangulares, resulta em um octaedro. Quando as faces das pirâmides são triângulos equiláteros, o octaedro é regular.



Tetraedro



Tetraedro regular



Octaedro

12.3.2. Área de superfície de pirâmides

Área lateral (A_l): É a soma das áreas dos polígonos que forma a lateral da pirâmide.

Área da base (A_b): Corresponde a área do polígono que constitui a sua base.

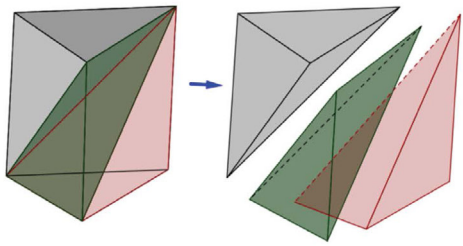
Área total (A_T): É a soma de todas as áreas da pirâmide (área lateral + área da base).

12.3.3. Volume de uma pirâmide

$$V = \frac{1}{3} A_b \, . \, h$$

O volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Demonstração: Podemos dividir um prisma de base triangular em tetraedros, conforme a figura a seguir.



Como os três volumes dos tetraedros são congruentes (verifique!) e o volume do prisma é dado por: $A_b.h$, isso nos dá:

$$V + V + V = A_b.h \Rightarrow 3.V = A_b.h \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{3} .A_b .h}.$$

Notoriamente, toda pirâmide pode ser dividida em tetraedros de mesma altura, e portanto, a fórmula estende-se também a pirâmides de qualquer base.

1º exemplo: Calcule o volume de uma pirâmide de base retangular de lados 5cm e 2cm e altura 15cm.

Solução: $A_b = 5.2 \Rightarrow \boxed{A_b = 10cm^2}$.

$$V = \frac{1}{3} .A_b .h \Rightarrow V = \frac{1}{3} .10 .15 \Rightarrow \boxed{V = 50cm^3}.$$

2º exemplo: Qual a altura de uma pirâmide que possui 18m² de área de base e 3m³ de volume?

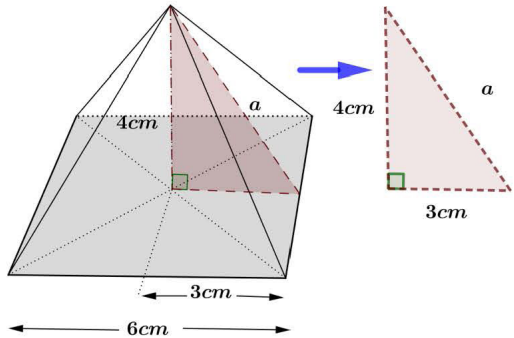
Solução:

$$V = \frac{1}{3} .A_b .h \Rightarrow 3 = \frac{1}{3} .18.h \Rightarrow h = \frac{9}{18} \Rightarrow \boxed{h = 0{,}5\ m}.$$

3º exemplo: Calcule a área total e o volume de uma pirâmide reta, cuja base é um quadrado de lado 6cm e a altura é 4cm.

Solução: Uma pirâmide é reta quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base. Cada triângulo que forma a lateral da pirâmide possui 6cm de base e altura a.

Sabendo que um dos catetos é 3cm (metade do lado do quadrado) e altura é 4cm (veja a figura a seguir), podemos calcular a altura a do triângulo da face lateral utilizando o teorema de Pitágoras, da seguinte forma:



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow \boxed{a = 5\,cm}$.

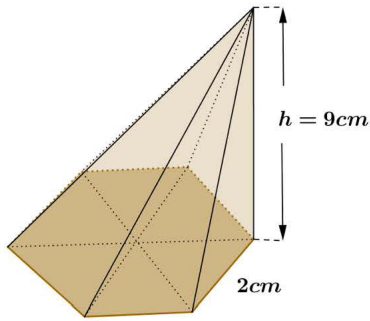
A área lateral é: $A_l = 4.\frac{(6.5)}{2} = 4.15 \Rightarrow \boxed{A_l = 60cm^2}$.

A área da base: $A_b = 6.6 \Rightarrow \boxed{A_b = 36cm^2}$.

A área total: $A_T = A_l + A_b = 60 + 36 \Rightarrow \boxed{A_T = 96cm^2}$.

O volume: $V = \frac{1}{3}.A_b.h \Rightarrow V = \frac{1}{3}.36.4 \Rightarrow \boxed{V = 48cm^3}$.

4º exemplo: Dada a pirâmide abaixo, calcule a área da base e o seu volume, sabendo que a base é um hexágono regular de lado 2cm.

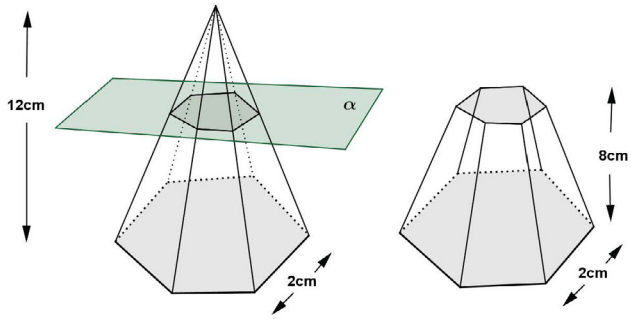


Solução: Da geometria plana sabemos que um hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros de mesmo lado, assim

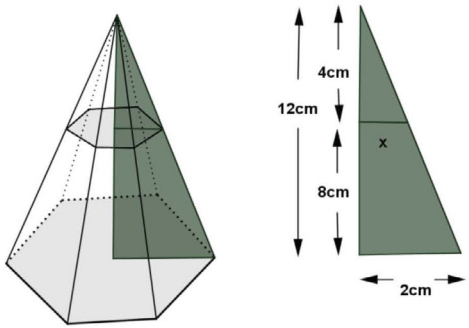
$$A_b = 6.A_\Delta = 6.\left(\frac{2.2.sen60°}{2}\right) = 12.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A_b = 6\sqrt{3}cm^2}.$$

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h \Rightarrow V = \frac{1}{3}.6\sqrt{3}.9 \Rightarrow \boxed{V = 18\sqrt{3}cm^3}.$$

5º exemplo (tronco de pirâmide): Uma pirâmide reta de altura 12cm e base hexagonal de lado 2cm, foi seccionada por um plano α paralelo a base e extraída a pirâmide superior, conforme a figura. Calcule o volume do sólido restante.



Solução: Os triângulos formados entre as alturas e a aresta lateral da pirâmide inicial são semelhantes, conforme a figura seguinte.



Aplicando a razão de semelhança, obtemos

$$\frac{x}{2} = \frac{4}{12} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

A área da base da pirâmide extraída (pirâmide menor) é

$$A_b = 6.A_\Delta = 6.\left(\frac{a.b.senC}{2}\right) \Rightarrow A_b = 6.\frac{\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.sen60°}{2} \Rightarrow A_b = \frac{4}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A_b = \frac{2}{3}\sqrt{3}cm^2}.$$

O volume da pirâmide extraída é

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h \Rightarrow V = \frac{1}{3}.\frac{2}{3}\sqrt{3}.4 \Rightarrow \boxed{V = \frac{8}{9}\sqrt{3}cm^3}.$$

A área da base da pirâmide maior é

$$A_B = 6.A_\Delta = 6.\left(\frac{a.b.senC}{2}\right) = 6.\frac{2.2.sen60°}{2} \Rightarrow A_B = \frac{12.\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{A_B = 6\sqrt{3}cm^2}.$$

O volume da pirâmide inicial é

$$V'' = \frac{1}{3}.A_B.h \Rightarrow V'' = \frac{1}{3}.6\sqrt{3}.12 \Rightarrow \boxed{V'' = 24\sqrt{3}cm^3}.$$

O volume solicitado é $V_{tronco} = V'' - V'$ (volume inicial menos o volume da pirâmide extraída), o que corresponde a

$$V_{tronco} = 24\sqrt{3} - \frac{8}{9}\sqrt{3} = \left(\frac{216-8}{9}\right)\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{208}{9}\sqrt{3}cm^3}.$$

De uma maneira geral, se uma pirâmide cuja aresta da base é b, aresta lateral é c e altura h, for seccionada por um plano paralelo a sua base formando uma nova pirâmide de aresta da base b', de aresta lateral c' e altura h', vale as seguintes relações (de acordo com os nossos estudos sobre triângulos semelhantes).

Relação entre os segmentos:

$$\boxed{\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = k}$$

Onde k é a constante de proporcionalidade entre os segmentos.

Relação entre áreas da base:

$$\boxed{\frac{A_B}{A_b} = k^2}$$

Onde A_B e A_b são as áreas da pirâmide inicial e da nova

Por consequência, sendo $V = \frac{1}{3}.A_B.h$, o volume da pirâmide inicial e $V' = \frac{1}{3}.A_b.h'$, o volume da nova pirâmide, dispomos de

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.h}{\frac{1}{3}.A_b.h'} = \underbrace{\frac{A_B}{A_b}}_{k^2}.\underbrace{\frac{h}{h'}}_{k} = k^3 \Rightarrow \boxed{\frac{V}{V'} = k^3}.$$

Dessa forma, podemos calcular o volume do exemplo anterior usando essas relações:

$$\frac{h}{h'} = k \Rightarrow \frac{12}{4} = k \Rightarrow \boxed{k = 3}.$$

$$\frac{V}{V'} = k^3 \Rightarrow \frac{24\sqrt{3}}{V'} = 3^3 \Rightarrow \boxed{V' = \frac{8}{9}\sqrt{3}\ cm^3}.$$

$$V_{tronco} = 24\sqrt{3} - \frac{8}{9}\sqrt{3} = \left(\frac{216-8}{9}\right)\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{208}{9}\sqrt{3}cm^3}.$$

De posse apenas das informações do tronco, podemos utilizar, alternativamente, a fórmula:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3}\left(\sqrt{A_b.A_B} + A_b + A_B\right)$$

Onde A_B e A_b são, respectivamente, as áreas superior e inferior do tronco, e h sua altura.

Demonstração:

$$V_{tronco} = V - V' = \frac{1}{3}.\ A_B\ .\ h_B - \frac{1}{3}.\ A_b\ .\ h_b \Rightarrow V_{tronco} = \frac{1}{3}(\ A_B\ .\ h_B - \ A_b\ .\ h_b)$$

Como $h = h_B - \ h_b$, temos

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}(\ A_B\ .(h + \ h_b) - \ A_b\ .\ h_b) \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{1}{3}[\ A_B\ .h + \ h_b(\ A_B - \ A_b)]}\ (1).$$

Usando a proporção $\frac{h_B}{h_b} = k$ e $\frac{A_B}{A_b} = k^2$, dispomos de

$$\frac{h_B}{h_b} = \sqrt{\frac{A_B}{A_b}} \Rightarrow h_B = h_b.\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} \Rightarrow h + \ h_b = h_b.\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} \Rightarrow h = h_b.\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} - \ h_b \Rightarrow$$

$$h = h_b.\left(\frac{\sqrt{A_B}}{\sqrt{A_b}} - 1\right) \Rightarrow h = h_b.\left(\frac{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}{\sqrt{A_b}}\right) \Rightarrow \boxed{h_b = \frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}}\ (2).$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}[\ A_B\ .h + \ h_b(\ A_B - \ A_b)] = \frac{1}{3}\left[\ A_B\ .h + \left(\frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}\right)(\ A_B - \ A_b)\right]$$

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}\left[\ A_B\ .h + \left(\frac{h\sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} - \sqrt{A_b}}\right)(\ A_B - \ A_b).\left(\frac{\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}}{\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b}}\right)\right]$$

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}[\ A_B\ .h + h\sqrt{A_b}.(\sqrt{A_B} + \sqrt{A_b})] \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{h}{3}(\sqrt{A_b.\ A_B} + \ A_b + \ A_B)}.$$

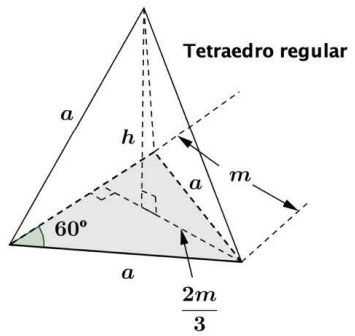
Utilizando a fórmula com dados do exemplo anterior: $A_b = \frac{2}{3}\sqrt{3}cm^2$, $A_B = 6\sqrt{3}cm^2$ e $h = 8cm$, encontramos

$$V_{tronco} = \frac{h}{3}(\sqrt{A_b.\ A_B} + \ A_b + \ A_B) = \frac{8}{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{3}.6\sqrt{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right)$$

$$V_{tronco} = \frac{8}{3}\left(2\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} + 6\sqrt{3}\right) \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{208}{9}\sqrt{3}cm^3}.$$

6º exemplo: Calcule a altura e o volume de um tetraedro regular de lado a.

Solução: O tetraedro regular possui todas as arestas iguais e a base é um triângulo equilátero. Veja a figura a seguir. Assim, a sua área da base mede



$$A_b = \frac{a.b.senC}{2} = \frac{a.a.sen60°}{2} = \frac{a^2.\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

A altura do tetraedro regular forma um ângulo de 90° com a mediana m, exatamente no baricentro do triângulo da base (ver figura). Dessa forma

$$sen60° = \frac{C.O}{Hip} = \frac{m}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{m}{a} \Rightarrow 2.m = a\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{m = \frac{a\sqrt{3}}{2}}.$$

Usando a relação do baricentro de um triângulo com a sua mediana $(\frac{2.m}{3})$ e aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos

$$h^2 + \left(\frac{2.m}{3}\right)^2 = a^2$$

Substituindo $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, encontramos

$$h^2 + \left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{3} = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}.$$

O volume do tetraedro regular é, portanto,

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}.$$

EXERCÍCIOS 12.3

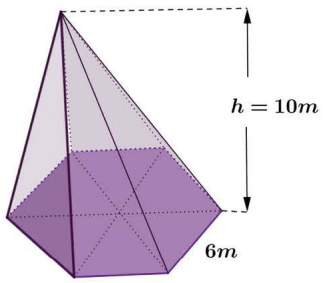
1)Calcule o volume de uma pirâmide de base retangular de lados 4cm e 3cm e altura 5cm.

2)Calcule o volume de um tetraedro cujos lados da base medem 21cm, 20cm e 29cm e altura 10cm.

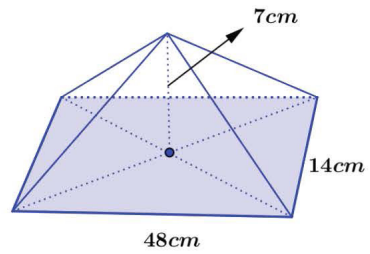
3)Quanto deve ser a altura de uma pirâmide de base quadrada cujo lado mede 9m, para que o seu volume seja 81m³?

4)Calcule o volume dos sólidos a seguir.

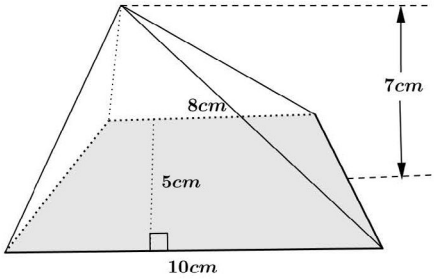
a) Pirâmide de base hexagonal



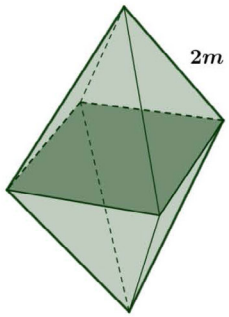
b) Pirâmide reta de base retangular



c) Pirâmide de base trapezoidal



d) Octaedro regular



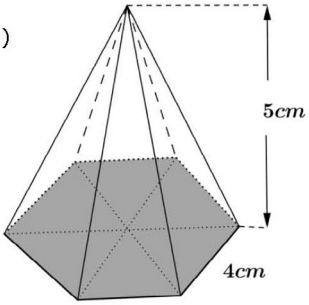
5)(UFF) A grande pirâmide de Quéops, antiga construção localizada no Egito, é uma pirâmide regular de base quadrada, com 137m de altura. Cada face dessa pirâmide é um triângulo isósceles cuja altura relativa à base mede 179m.

A área da base dessa pirâmide, em m², é:

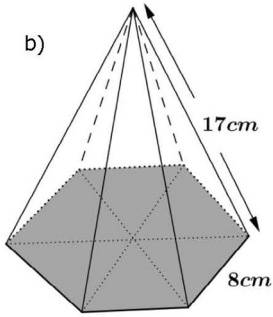
a) 13272 b) 26544 c) 39816 d) 53088 e) 79432

6)Calcule a área total e o volume de cada pirâmide regular de base hexagonal.

a)

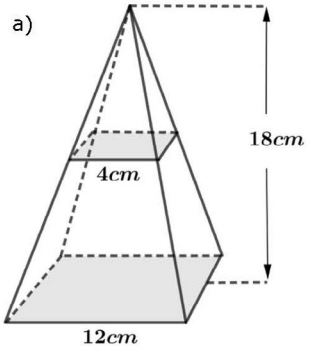


b)

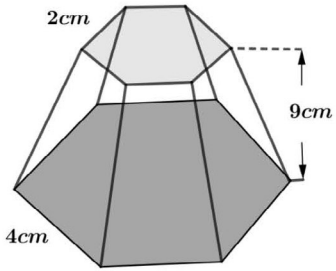


7)Calcule o volume de cada um dos troncos de pirâmide regular a seguir.

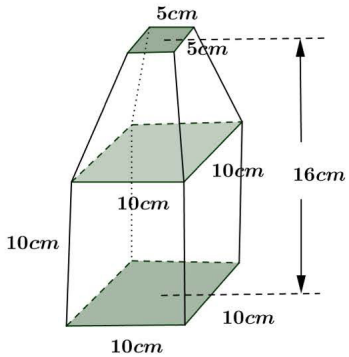
a)



b)

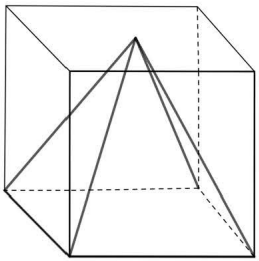


8)Calcule o volume do sólido, sabendo que a parte superior é um tronco de pirâmide.



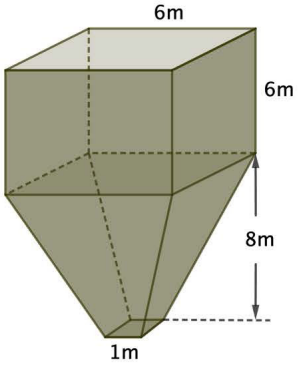
9)(UNIRIO) Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura anterior. Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m³, então, o volume do cubo, em m³, é igual a:

a) 9
b) 12
c) 15
d) 18
e) 21



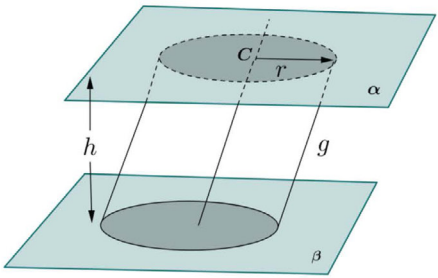
10)Calcule o volume do tetraedro regular de aresta 20cm.

11) Um silo foi construído para armazenamento de grãos, conforme a figura. Se a parte superior é um cubo e a parte inferior é um tronco de pirâmide de bases quadradas, calcule o seu volume.



12.4. Cilindro

Definição 12.4.1: Denomina-se cilindro a reunião de todas as circunferências cujos centros pertencem ao mesmo segmento de reta compreendido entre dois planos paralelos.

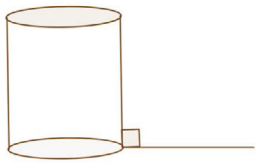


Elementos do cilindro:

- **Bases:** Círculo de raio r e centro C.
- **Altura:** Distância h entre os planos.
- **Geratriz:** Qualquer segmento g com uma extremidade em um ponto da circunferência superior e a outra no ponto correspondente na circunferência inferior.

12.4.1. Classificação

Um **cilindro** é **reto** quando a geratriz **g** forma um ângulo reto com o plano inferior (figura 12.4.1.1), caso contrário é um **cilindro oblíquo** (figura 12.4.1.2). Um cilindro é dito **equilátero**, quando sua altura é igual ao diâmetro da base (figura 12.4.1.3).



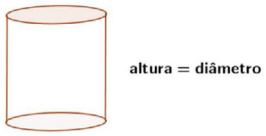
Cilindro reto

Figura 12.4.1.1



Cilindro Oblíquo

Figura 12.4.1.2

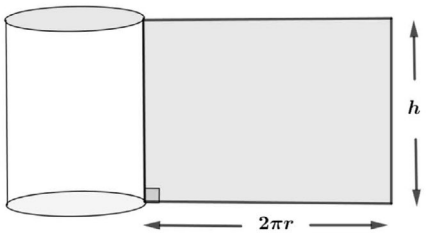


Cilindro equilátero

Figura 12.4.1.3

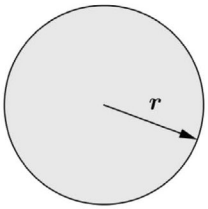
12.4.2. Área da superfície de um cilindro

Área lateral de um cone reto: É equivalente ao retângulo abaixo.



$$A_l = 2.\pi.r.h$$

Área da base: Corresponde a área da circunferência de raio r.



$$A_b = \pi . r^2$$

Área total: É a soma de todas as áreas do cilindro (área lateral mais duas vezes a área da base).

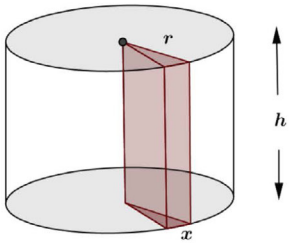
$$A_T = A_l + 2.A_b$$

12.4.3. Volume de um cilindro

$$V = A_b \, . \, h$$

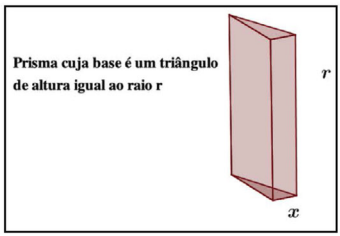
O volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

Demonstração: Podemos fatiar um cilindro reto em um número n elevado (suficientemente grande) de sólidos, conforme a figura. Como n é elevado, o lado x pertencente a circunferência, torna-se tão pequeno que pode ser considerado como um segmento, e o sólido como um prisma cuja base é um triângulo de altura igual ao raio da circunferência da base. Como o volume de cada prisma é: $V_{Prisma} = \frac{r.x}{2}.h$, para n prismas, temos o volume do cilindro:

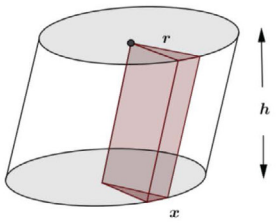


$V_{Cilindro} = n.\frac{r.x}{2}.h$, mas $n \, . \, x = 2\pi r$. Substituindo:

$$V_{Cilindro} = 2\pi r.\frac{r}{2}.h \Rightarrow \boxed{V_{Cilindro} = \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{Área} \\ \text{da} \\ \text{Base}}} . \underbrace{h}_{\text{Altura}}}.$$



O mesmo princípio pode ser aplicado ao cilindro oblíquo (ver figura ao lado). Como o volume de cada prisma oblíquo é o mesmo do prisma reto calculado anteriormente, temos



$$\boxed{V_{Cilindro} = \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{Área} \\ \text{da} \\ \text{Base}}} . \underbrace{h}_{\text{Altura}}}.$$

1º exemplo: Calcule a área total e o volume de cilindro reto, de raio 2cm e altura 3cm.

Solução:

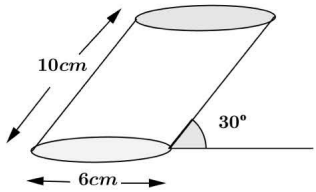
$$A_l = 2.\pi.r.h = 2.\pi.2.3 \Rightarrow \boxed{A_l = 12\pi cm^2}.$$

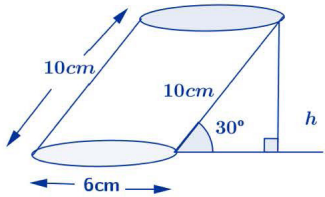
$$A_b = \pi.r^2 = \pi.2^2 = \pi.4 \Rightarrow \boxed{A_b = 4\pi cm^2}.$$

$$A_T = A_l + 2.A_b = 12.\pi + 2.4\pi = 12.\pi + 8\pi \Rightarrow \boxed{A_T = 20\pi cm^2}.$$

$$V = A_b.h = 4\pi.3 \Rightarrow \boxed{V = 12\pi\ cm^3}.$$

2º exemplo: Calcule o volume do cilindro.





Solução: Denominando a altura de h, temos

$$Sen30° = \frac{Cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{h}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{10} \Rightarrow \boxed{h = 5cm}.$$

O raio é $\frac{6cm}{2} \Rightarrow \boxed{r = 3cm}$. Assim,

$$A_b = \pi.r^2 = \pi.3^2 = \pi.9 \Rightarrow \boxed{A_b = 9\pi cm^2}.$$

$$V = A_b.h = 9\pi.5 \Rightarrow \boxed{V = 45\pi\ cm^3}.$$

3º exemplo: (ENEM) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2m de diâmetro e 4m de altura(de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 o valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a:

a) R$ 230,40. b) R$ 124,00 c) R$104,16. d) R$ 54,56. e) R$ 49,60.

Solução: O volume deste sólido pode ser calculado subtraindo o volume do cilindro maior (externo) pelo volume do cilindro menor (interno):

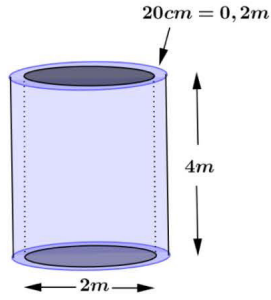
$$V_S = V_{\substack{Cilindro \\ maior}} - V_{\substack{Cilindro \\ menor}} = \pi\, r_1^2.h\ -\ \pi\, r_2^2.h.$$

Substituindo: $r_1 = 1 + 0,2 = 1,2$, $h = 4$ e $r_2 = 1$, temos

$$V_S = 3,1.1,2^2.4 - 3,1.1^2.4 \Rightarrow \boxed{V_S = 5,456\ m^3}.$$

A um custo de R$ 10,00, o preço da manilha é

$5,456 \times 10 = \boxed{\text{R\$ } 54,56}$ (letra d).



EXERCÍCIOS 12.4

1)Calcule a área total e o volume de um cilindro reto de altura 2cm e raio da base igual a 1cm.

2)Calcule a área total e o volume de um cilindro que tem 30 cm de diâmetro da base e 20cm de altura.

3)Quantos metros cúbicos de terra foram escavados para a perfuração de um poço em forma cilíndrica que tem 2m de diâmetro e 25m de profundidade?

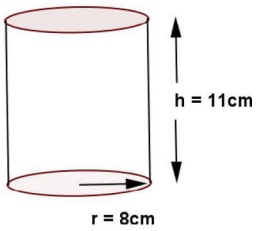
4)Um recipiente cilíndrico possui 22cm de diâmetro e 32cm de profundidade. Quantos litros de água cabem aproximadamente neste recipiente?

5)O que ocorre com o volume de um cilindro quando triplicamos o seu diâmetro?

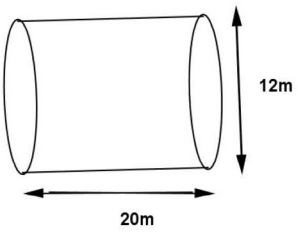
6)O volume de um cilindro de 1m de altura é $81\pi m^3$. Quanto mede o raio de sua base?

7)Calcule a área total e o volume dos seguintes cilindros:

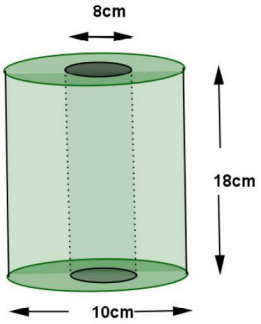
a)



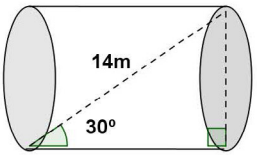
b)



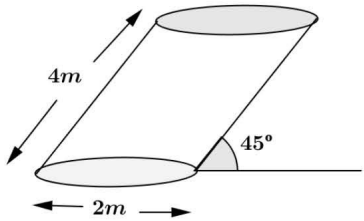
c)



d)



8)Calcule o volume do cilindro oblíquo a seguir.



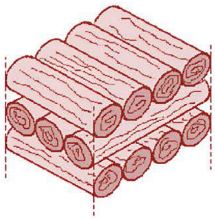
9)Uma refinaria utiliza um reservatório cilíndrico metálico de 12 metros de diâmetro e 10 metros de altura, para armazenar sua produção.

a) Qual a capacidade de armazenamento desse reservatório?

b) Quantos metros quadrados de matéria prima (metal) foram utilizados para sua confecção?

10)(ESPM – SP) As toras de madeira da pilha abaixo têm o mesmo diâmetro de 20 cm. O volume total de madeira dessa pilha é de, aproximadamente:

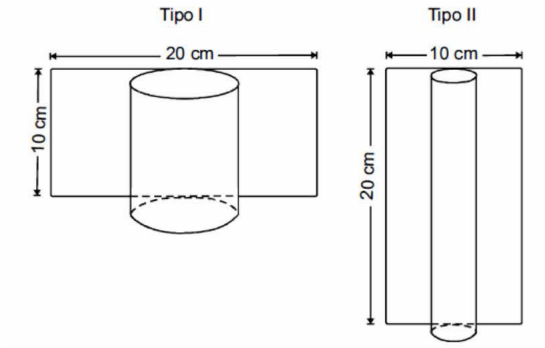
a) 0,14 m³
b) 0,16 m³
c) 0,18 m³
d) 0,21 m³
e) 0,23 m³



11)(ENEM) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.

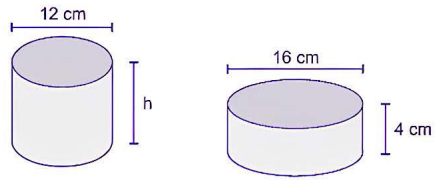
Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

a) o triplo.
b) o dobro.
c) igual.
d)a metade.
e)a terça parte.



12)(UFPR) As duas latas na figura abaixo possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual o valor aproximado da altura h?

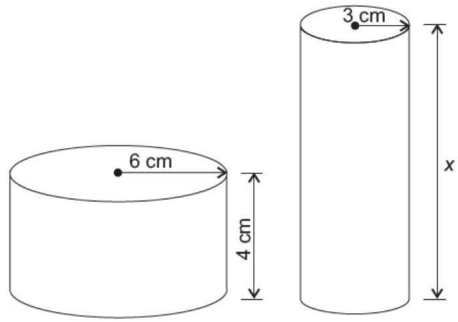
a) 5 cm
b) 6 cm
c) 6,25 cm
d) 7,11 cm
e) 8,43 cm



13)(ENEM) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme a figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V2.

A medida da altura desconhecida vale

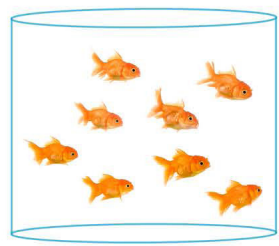
a) 8 cm.
b) 10 cm.
c) 16 cm.
d) 20 cm.
e) 40 cm.



Disponível em: www.cbra.org.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

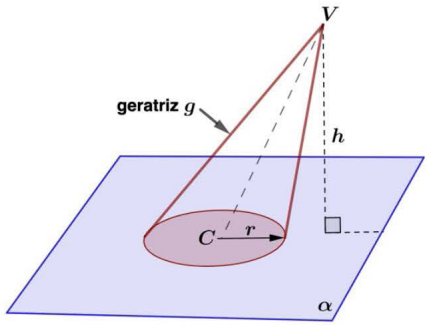
14)(ENEM) Um piscicultor cria uma espécie de peixe em um tanque cilíndrico. Devido às características dessa espécie, o tanque deve ter, exatamente, 2 metros de profundidade e ser dimensionado de forma a comportar 5 peixes para cada metro cúbico de água. Atualmente, o tanque comporta um total de 750 peixes. O piscicultor deseja aumentar a capacidade do tanque para que ele comporte 900 peixes, mas sem alterar a sua profundidade. Considere 3 como aproximação para π.

a) $\sqrt{30}-5$
b) $\frac{\sqrt{30}-5}{2}$
c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{5}{2}$
e) $\frac{15}{2}$



12.5. Cone

Definição 12.5.1: Denomina-se cone a união dos segmentos **g** (geratriz) com uma extremidade em um ponto V e a outra na circunferência da base.



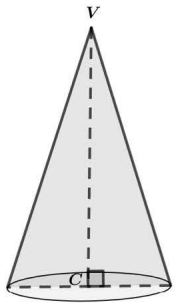
Elementos do cone:

- **Uma base:** Círculo de raio r e centro C.
- **Altura:** Distância de V ao plano da base.
- **Geratriz:** Segmentos g com uma extremidade em um ponto V e a outra na circunferência da base.

12.5.1. Classificação

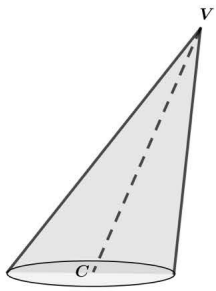
Um **cone** é **reto** quando o segmento $\overline{VC}$ forma um ângulo reto com o plano da base (figura 12.5.1.1), caso contrário, é um **cone oblíquo** (figura 12.5.1.2).

Um cone reto é dito **equilátero**, quando sua geratriz é igual a duas vezes o raio (figura 12.5.1.3).



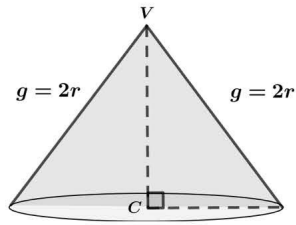
Cone reto

Figura 12.5.1.1



Cone oblíquo

Figura 12.5.1.2

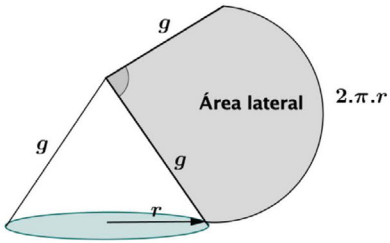


Cone equilátero

Figura 12.5.1.3

12.5.2. Área da superfície de um cone

Área lateral de um cone reto: Aplicando uma regra de três simples na figura abaixo, temos:



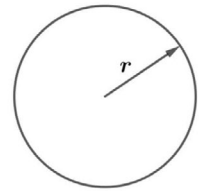
$2.\pi.g \longrightarrow \pi.g^2$

$2.\pi.r \longrightarrow A_l$

Desse modo,

$$A_l = \pi.r.g$$

Área da base: Corresponde a área da circunferência de raio r.



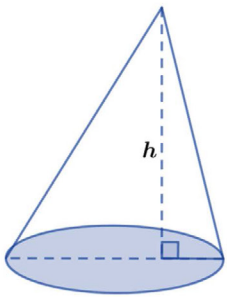
$$A_b = \pi.r^2$$

Área total: É a soma de todas as áreas do cone (área lateral + área da base).

$$A_T = A_l + A_b$$

12.5.3. Volume de um cone

O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.



$$V = \frac{1}{3}.A_b.h$$

Demonstração: Um cone (oblíquo ou não) pode ser fatiado em um número n elevado (suficientemente grande) de sólidos pequenos iguais, fazendo com que a parte x da circunferência da base se torne um segmento, e o pequeno sólido por sua vez, em uma pequena pirâmide (conforme a figura a seguir).

O volume de cada pequena pirâmide é

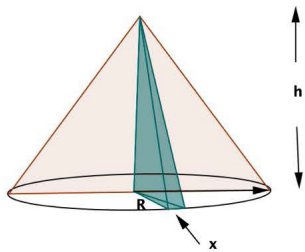
$$V_p = \frac{1}{3}.\frac{R.x}{2}.h = \frac{1}{3}.\frac{R.h.x}{2}.$$

As n pirâmides formam o volume do cone, então

$$V_{cone} = n.\frac{1}{3}.\frac{R.h.x}{2}.$$

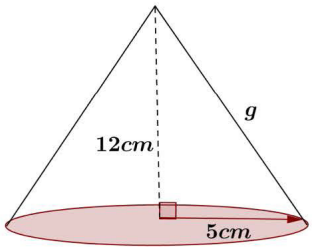
Como $n.x$ é o comprimento da circunferência da base, ou seja, $nx = 2\pi R$, concluímos que

$$V_{cone} = n.x.\frac{1}{3}.\frac{R.h}{2} = 2\pi R.\frac{1}{3}.\frac{R.h}{2} \Rightarrow \boxed{V_{cone} = \frac{1}{3}.\underbrace{\pi.R^2}_{\text{área da base}}.h}.$$



Cone fatiado em n pirâmides

1º exemplo: Calcule a área total e o volume de um cone reto, de raio 5cm e altura 12cm.



Solução: Na área lateral precisaremos da geratriz, então aplicando o teorema de Pitágoras, temos

$$g = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} \Rightarrow$$

$$g = \sqrt{169} \Rightarrow \boxed{g = 13cm}$$

$$A_l = \pi.r.g = \pi.5.13 \Rightarrow \boxed{A_l = 65\pi cm^2}.$$

$$A_b = \pi.r^2 = \pi.5^2 = \pi.25 \Rightarrow \boxed{A_b = 25\pi cm^2}.$$

$$A_t = A_l + A_b = 65\pi + 25\pi = 90\pi \Rightarrow \boxed{A_t = 90\pi cm^2}.$$

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h = \frac{1}{3}.25\pi.12 \Rightarrow \boxed{V = 100\pi\ cm^3}.$$

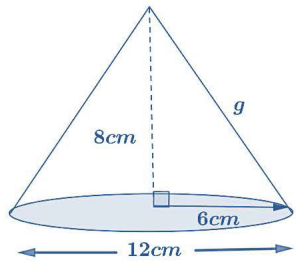
2º exemplo: Um chapéu para aniversário em forma de cone reto, foi confeccionado com 8 cm de altura e 12cm de diâmetro. Qual a quantidade mínima de material gasto neste chapéu?

Solução: O material gasto no chapéu corresponde a área lateral do cone, pois o chapéu não tem base. Para encontrar a geratriz podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$g = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} \Rightarrow$$

$$g = \sqrt{100} \Rightarrow \boxed{g = 10cm}.$$

$$A_l = \pi.r.g = \pi.6.10 \Rightarrow \boxed{A_l = 60\pi cm^2}.$$



Como $\pi \cong 3{,}14$: $A_l = 60.3{,}14 \cong 188{,}4\ cm^2$.

O material mínimo gasto foi de aproximadamente $188{,}4 cm^2$.

3º exemplo: Em quanto aumenta o volume de um cone, quando duplicamos o raio de sua base mantendo a mesma altura?

Solução: O volume inicial é $\boxed{V = \frac{1}{3}.A_b.h}$ (1).

$A'_b = \pi.r^2 = \pi.(2r)^2 \Rightarrow \boxed{A_b' = 4\pi r^2}$ *Área da nova base.*

O novo volume é

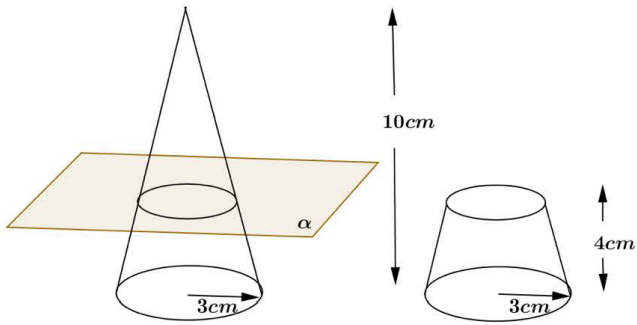
$$V' = \frac{1}{3}.A'_b.h \Rightarrow \boxed{V' = \frac{1}{3}.4\pi r^2.h} \ (2).$$

Ao dividir (1) por (2), encontramos

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3}.\pi.r^2.h}{\frac{1}{3}\pi.4r^2.h} = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{V' = 4V}.$$

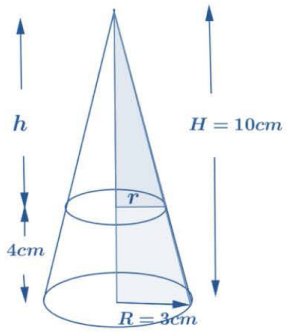
Resposta: O volume quadruplica.

4º exemplo (tronco de cone): Um cone reto de altura 10cm e raio 3cm, foi seccionado por um plano α paralelo a base e extraído o cone superior, conforme a figura a seguir. Calcule o volume do sólido restante.



Solução: Os triângulos formados com a altura, a geratriz e os raios, são semelhantes. Assim,

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} = k \Rightarrow r = \frac{3.(10-4)}{10} \Rightarrow \boxed{r = \frac{9}{5}\ cm}.$$



O volume do cone maior é

$$V = \frac{1}{3}4\pi r^2 H = \frac{1}{3}.\pi.3^2.10 \Rightarrow V = \frac{1}{3}.\pi.90 \Rightarrow \boxed{V = 30\pi\ cm^3}.$$

O volume do cone menor é

$$V' = \frac{1}{3}.A_b.h \Rightarrow V' = \frac{1}{3}.\pi.\left(\frac{9}{5}\right)^2.6 \Rightarrow \boxed{V' = \frac{162}{25}\pi cm^3}.$$

E o volume do tronco de cone é

$$V_{tronco} = V - V' \Rightarrow V_{tronco} = 30\pi - \frac{162}{25}\pi \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{588}{25}\pi cm^3}.$$

De uma maneira geral e similar ao que acontece com o tronco de pirâmides, vale as mesmas relações entre os cones (maior e menor).

- Relação entre os segmentos:

$\boxed{\frac{R}{r} = \frac{h_C}{h_c} = k}$. Onde k é a constante de proporcionalidade entre os segmentos.

- Relação entre áreas da base:

$\boxed{\frac{A_C}{A_c} = k^2}$. Onde A_C e A_c são, respectivamente, as áreas do cone inicial e do novo.

- Relação entre os volumes:

$\boxed{\frac{V}{V'} = k^3}$. Onde V e V′ são, respectivamente, o volume do cone inicial e do novo.

Assim, o exemplo anterior pode ser resolvido da seguinte maneira:

$$\frac{H}{h} = \frac{10}{10-4} = k \Rightarrow \boxed{k = \frac{5}{3}}.$$

$$\frac{V}{V'} = k^3 \Rightarrow \boxed{\frac{V}{V'} = \frac{125}{27}}$$

Como $V = 30\pi$ cm^3,

$$V' = \frac{27}{125}.30\pi \Rightarrow \boxed{V' = \frac{162}{25}\pi cm^3}.$$

O Volume do tronco de cone é

$$V_{tronco} = V - V' \Rightarrow V_{tronco} = 30\pi - \frac{162}{25}\pi \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{588}{25}\pi cm^3}.$$

De posse apenas das informações do tronco do cone, podemos utilizar, alternativamente, a fórmula:

$$V_{tronco} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R.r + r^2)$$

Para demonstrar essa fórmula, siga os mesmos passos da demonstração do tronco de pirâmide.

Onde R e r são, respectivamente, os raios superior e inferior do tronco, e h sua altura.

O exemplo anterior poderia ter sido resolvido utilizando essa fórmula:

$$V_{tronco} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r.R + r^2) = \frac{\pi.4}{3}\left(3^2 + 3.\frac{9}{5} + \left(\frac{9}{5}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$V_{tronco} = \frac{\pi.4}{3}\left(9 + \frac{27}{5} + \frac{81}{25}\right) = \frac{\pi.4}{3}\left(\frac{225 + 135 + 81}{25}\right) \Rightarrow \boxed{V_{tronco} = \frac{588}{25}\pi cm^3}.$$

EXERCÍCIOS 12.5

1)Calcule a área total e o volume de um cone reto de altura 8cm e raio da base igual a 6cm.

2)Calcule o volume de um cone oblíquo de altura 5m e raio da base igual a 3m.

3)O que acontece com o volume de um cone quando triplicamos o raio de sua base, mantendo a mesma altura?

4)(UEM – PR) Uma pessoa deseja fazer um chapeuzinho de aniversário com a forma de um cone circular reto de 12 cm de altura e 31 cm de perímetro da base. Para isso, precisa cortar uma figura plana em uma cartolina. Utilizando $\pi = 3,1$,

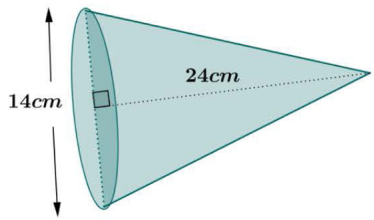
a) Desenhe o formato da figura a ser cortada (despreze as abas para colagem);

b) Coloque, nessa figura, as medidas necessárias para possibilitar o corte com precisão;

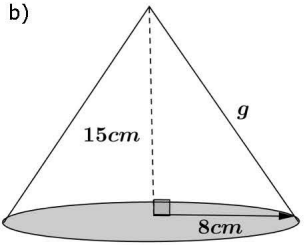
c) Calcule a área da figura.

5)Calcule a área total e o volume dos cones a seguir:

a)

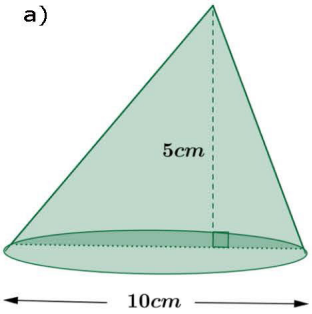


b)

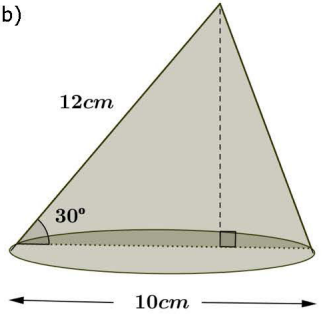


6)Qual o volume dos cones representados a seguir:

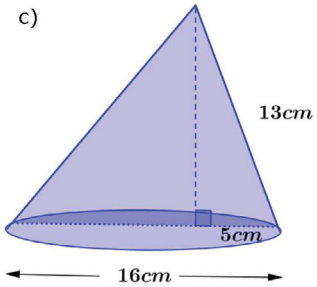
a)



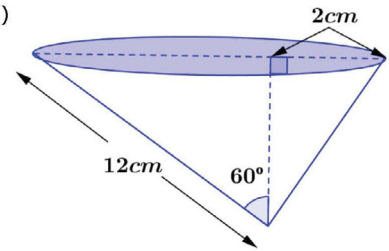
b)



c)



d)



7)Dois alunos compraram juntos um refrigerante em uma lanchonete da escola. O aluno A usou um copo conforme as dimensões da figura 1 e o aluno B outro copo com dimensões da figura 2. Um acusava o outro de ter tomado mais refrigerante. Sabendo que a quantidade de copos cheios tomados por cada um foi igual, quem tinha razão?

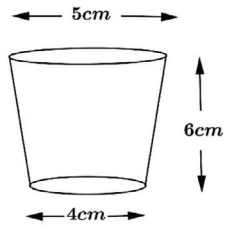


Figura 1

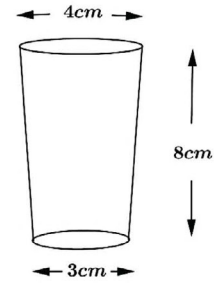


Figura 2

8)(ENEM) Uma empresa precisa comprar uma tampa para o seu reservatório, que tem a forma de um tronco de cone circular reto, conforme mostrado na figura.

Considere que a base do reservatório tenha raio r = $2\sqrt{3}$ m e que sua lateral faça um ângulo de 60° com o solo.

Se a altura do reservatório é 12 m, a tampa a ser comprada deverá cobrir uma área de:

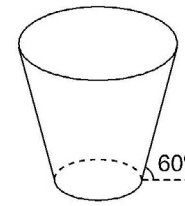
a)12πm²

b)108πm²

c)(12 + $2\sqrt{3}$)2πm²

d) 300πm²

e)(24 + $2\sqrt{3}$)2πm²

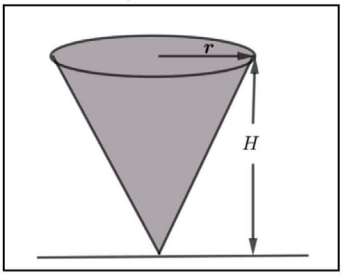


9)Um adubadora semeadora para tratores, tem um formato cilindro na parte superior e um cone na parte inferior. O cilindro possui diâmetro de 130cm, altura 60cm e adubadora possui altura total de 140cm. Calcule sua capacidade em litros. Use $\pi = 3$.



Fonte:https://www.mfrural.com.br/detalhe/345346/adubadora-mono-disco-vicon-giro-600)

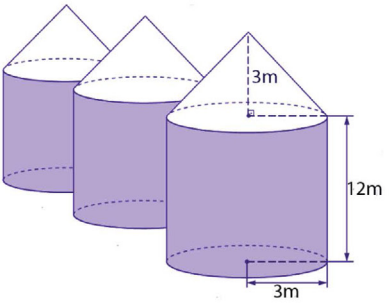
10)(UFRR) Na fazenda do Sr. Armando, o armazenamento de soja é feito em grandes silos. Como a safra deste ano superou as expectativas, foi necessário adquirir mais um silo para comportar os grãos. O silo atual tem a forma cilíndrica com eixo na vertical e uma altura de 5 m, com capacidade para 50 mil litros de soja. Estima-se que a safra deste ano ultrapasse a capacidade suportada em 60%. O novo silo adquirido tem a forma de um cone com vértice para baixo, com raio r e altura H, conforme mostra a figura.



Qual deverá ser a altura H (em metros) do novo silo para que o mesmo comporte exatamente o volume excedido e cujo raio r exceda o raio do silo antigo em 50%?

a) 5. b) 7. c) 8. d) 10. e) 4.

11) (ENEM) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposto por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.

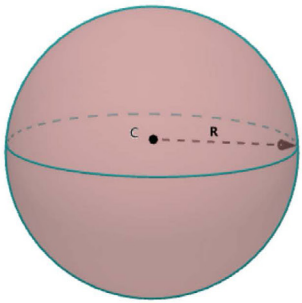


Utilize 3 como aproximação para π. O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

a) 6. b) 16. c) 17. d) 18. e) 21.

12.6. Esfera

Definição 12.6.1: Chama-se esfera de centro C e raio R, ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{CP}$ seja menor ou igual a R.



Elementos da esfera:

- **Centro C, raio R** e **diâmetro 2R**;
- **Superfície:** O conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{CP}$ é igual a R;
- **Secção:** Toda secção de uma esfera é um círculo.

12.6.1. Volume de uma esfera

$$V = \frac{4}{3}.\pi.R^3$$

Demonstração: O hemisfério superior da esfera pode ser fatiado em número n elevado (suficientemente grande) de sólidos pequenos (figura 12.6.1.1), de tal forma que podemos considerá-los como cilindros de altura x (figura 12.6.1.2).

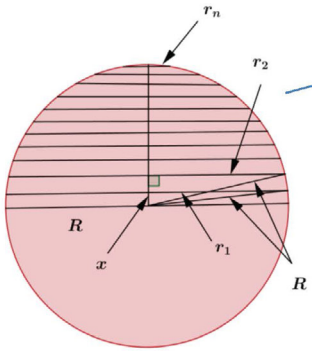


Figura 12.6.1.1



Figura 12.6.1.2

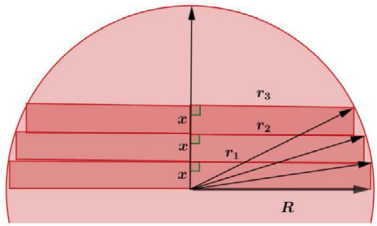


Figura 12.6.1.3

Aplicando o teorema de Pitágoras em todos os pequenos cilindros da figura 12.6.1.3, temos

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + {r_1}^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{{r_1}^2 = R^2 - x^2} \\ (2x)^2 + {r_2}^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{{r_2}^2 = R^2 - (2x)^2} \\ (3x)^2 + {r_3}^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{{r_3}^2 = R^2 - (3x)^2} \\ \ldots \\ (nx)^2 + {r_n}^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{{r_n}^2 = R^2 - (nx)^2} \end{array}\right\} (1)$$

O volume do hemisfério (metade da esfera) é a soma dos volumes de todos os cilindros individualmente,

$$\frac{V_E}{2} = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$$

$$\frac{V_E}{2} = \underbrace{\pi {r_1}^2 . x}_{\text{Área da base X altura}} + \underbrace{\pi {r_2}^2 . x}_{\text{Área da base X altura}} + \underbrace{\pi {r_3}^2 . x}_{\text{Área da base X altura}} + \cdots + \underbrace{\pi {r_n}^2 . x}_{\text{Área da base X altura}}$$

$$\frac{V_E}{2} = \pi x({r_1}^2 + {r_2}^2 + {r_3}^2 + \cdots + {r_n}^2)$$

Substituindo (1) nessa expressão, obtemos

$$\frac{V_E}{2} = \pi x.(R^2 - x^2 + R^2 - (2x)^2 + R^2 - (3x)^2 + \cdots + R^2 - (nx)^2)$$

$$\frac{V_E}{2} = \pi x.[nR^2 - (x^2 + 2^2x^2 + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^2)]$$

$$\boxed{\frac{V_E}{2} = \pi x.[nR^2 - x^2.(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)]}.$$

Mas, 1 + 2^2+ 3^2 + ... n^2 $= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$. Assim,

$$\frac{V_E}{2} = \pi x.\left(nR^2 - x^2.\underbrace{(1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)}_{\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}\right)$$

$$\boxed{\frac{V_E}{2} = \pi x.\left[nR^2 + x^2\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right]}.$$

Em contrapartida, $\underbrace{x + x + x \ldots x}_{n \text{ vezes}} = R \Rightarrow n.x = R \Rightarrow \boxed{x = \frac{R}{n}}$.

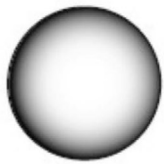
$$\frac{V_E}{2} = \pi\frac{R}{n}.\left[nR^2 - \left(\frac{R}{n}\right)^2.\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right] \Rightarrow \frac{V_E}{2} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{n^3}.\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)$$

$$\frac{V_E}{2} = \pi R^3 - \left(\frac{\pi R^3}{3} + \underbrace{\frac{\pi R^3}{2n}}_{zero} + \underbrace{\frac{\pi R^3}{6n^2}}_{zero}\right).$$

Devido o valor de n ser elevado, as expressões: $\frac{\pi R^3}{2n}$ e $\frac{\pi R^3}{6n^2}$ são nulas, o que resulta em

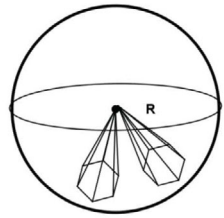
$$\frac{V_E}{2} = \frac{3\pi R^3 - \pi R^3}{3} \Rightarrow \boxed{V_E = \frac{4\pi R^3}{3}}.$$

12.6.2. Área da superfície de uma esfera



$$A_s = 4.\pi.R^2$$

Demonstração: Podemos dividir a esfera, conforme a figura a seguir, em um número n elevado de pirâmides iguais de base hexagonal. Como n é elevado, a área da base da pirâmide torna-se tão pequeno, que sua altura pode ser considerada como o raio R da esfera. Desse modo, somando os volumes de todas as pequenas pirâmides encontramos o volume da esfera.



Seja $A_1, A_2, \ldots A_n$ a área das bases dessas pirâmides, temos

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3}.(A_1 + A_2 + \cdots + A_n).R.$$

Como $A_1 + A_2 + \ldots A_n = A_s$ (a soma de todas as áreas é igual área da superfície da esfera), concluímos que

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1}{3}.A_s.R \Rightarrow \boxed{A_s = 4\,\pi.R^2}.$$

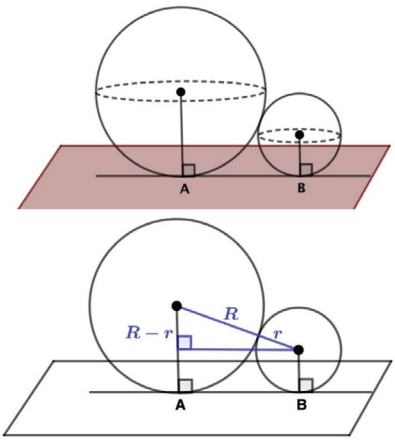
Exemplo: Calcule a área da superfície e o volume de uma esfera de raio 3cm.

Solução:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}.\pi.3^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}.\pi.27 \Rightarrow \boxed{V = 36\pi\ cm^3}.$$

$$A_s = 4\,\pi.R^2 \Rightarrow A_s = 4\,\pi.3^2 \Rightarrow \boxed{A_s = 36\pi\ cm^2}.$$

2º exemplo: Duas esferas de 9cm e 4cm de raio, respectivamente, estão encostadas uma na outra sobre uma mesa, conforme a figura. Quanto mede a distância AB?



Solução: Denominando de R o raio da esfera maior e r o raio da esfera menor, podemos traçar um triângulo retângulo, conforme a figura seguinte. Nessas circunstâncias, $R + r = 13$ cm é a hipotenusa, $R - r = 5$cm é um dos catetos e a distância AB é o outro cateto. Desse modo,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 13^2 = 5^2 + AB^2 \Rightarrow$$

$$AB^2 = 169 - 25 \Rightarrow AB^2 = 144 \Rightarrow$$

$$AB = \sqrt{144} \Rightarrow \boxed{AB = 12\ cm}.$$

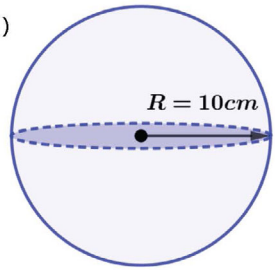
EXERCÍCIOS 12.6

1)Calcule a área da superfície e o volume de uma esfera de raio 4cm.

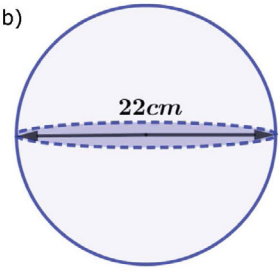
2)Calcule a área da superfície e o volume de uma esfera de raio 12m.

3)Calcule a área da superfície e o volume das esferas abaixo:

a)



b)



4)(ENEM) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

a) 1,33.
b) 6,00.
c) 12,00.
d) 56,52.
e) 113,04.

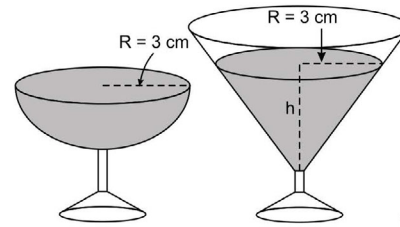
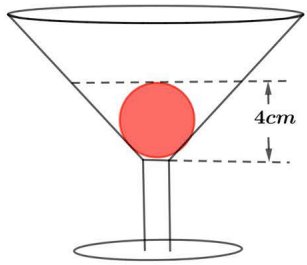


Figura 1 Figura 2

5)(ENEM) Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a:

a) 4. b)8. c) 16. d) 24. e) 32.

6) (FUVEST-GV) Um cálice com a forma de cone contém V cm³ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica com diâmetro de 2cm é colocada dentro do cálice. Supondo-se que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V.



7)(ENEM) A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada. A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a figura 2.



Figura 1

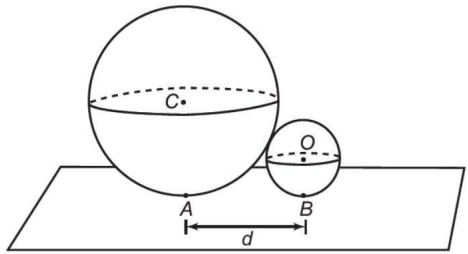


Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d.
Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

a) 1 b) $\frac{2\sqrt{10}}{5}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ d) 2 e) $\sqrt{10}$

CAPÍTULO

13

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

13. GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

A geometria analítica plana (ou geometria cartesiana plana) é uma parte da matemática que estuda as figuras planas no sistema cartesiano. Essa área de estudos estabelece conexões entre a geometria plana e a álgebra, proporcionando novas concepções, olhares e interpretações algébricas de objetos matemáticos. Por conseguinte, é um ramo da matemática primordial para o cálculo diferencial e integral, álgebra linear e outros conteúdos de nível superior.

Para dar maior ênfase a essas novas concepções, estudaremos a geometria analítica plana aqui, utilizando os conhecimentos sobre vetores, suas perspectivas, fórmulas e formas de pensamento, paralelamente às fórmulas e formas usuais, comumente estudadas nos livros do ensino médio.

13.1. Distância entre dois pontos

Dados dois pontos $\mathrm{A}\,(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$ e $\mathrm{B}\,(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B})$ no sistema de coordenadas cartesianas, a distância $\mathrm{D}_{A,B}$ entre os dois pontos é dado por:

$$\mathrm{D}_{A,B} = \sqrt{(x_\mathrm{A} - x_\mathrm{B})^2 + (y_\mathrm{A} - y_\mathrm{B})^2}$$

Demonstração:

Como os eixos do sistema de coordenadas cartesianas são perpendiculares, o triângulo da figura 13.1.1 é retângulo, e dessa forma, vale o teorema de Pitágoras.

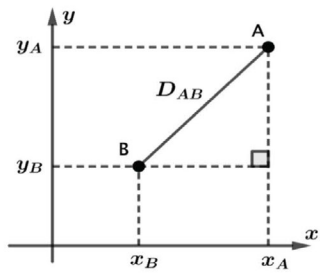


Figura 13.1.1

Convém observar que a ordem dos termos nas diferenças de abscissas e ordenadas não alteram o resultado.

1º exemplo: Vamos calcular a distância do ponto A(-2,5) ao ponto B(4,-3).

Solução:

$$D_{A,B} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + \big(5-(-3)\big)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-6)^2 + (5+3))^2} = \sqrt{36 + 8^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} \Rightarrow \boxed{D_{A,B} = 10\ u.c}.$$

Utilizamos a expressão "u.c" para abreviar "unidades de comprimento". Essa terminologia é utilizada quando não está mencionada a unidade de medida (cm, m, km, etc.).

2º exemplo: Vamos calcular a distância entre H(-12,2) e L(0,-3).

Solução:

$$D_{H,L} = \sqrt{(x_H - x_L)^2 + (y_H - y_L)^2} = \sqrt{(-12-0)^2 + \big(2-(-3)\big)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-12)^2 + (2+3))^2} = \sqrt{144 + 5^2} \Rightarrow \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} \Rightarrow \boxed{D_{H,L} = 13\ u.c}.$$

3º exemplo: Determine a abcissa de um ponto A(x, 5) equidistante (que está a mesma distância) de P(2,6) e Q(-3,1).

Solução: Se o ponto A é equidistante de P e Q, basta então, calcular as distâncias de A à P e de A à Q, e igualar os resultados.

$$D_{A,P} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 1}.$$

$$D_{A,Q} = \sqrt{\big(x_A - x_Q\big)^2 + \big(y_A - y_Q\big)^2} = \sqrt{(x-(-3))^2 + (5-1)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + 16}.$$

$$D_{A,P} = D_{A,Q} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 1} = \sqrt{(x+3)^2 + 16} \Rightarrow (x-2)^2 + 1 = (x+3)^2 + 16 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 + 6x + 9 + 16 \Rightarrow -4x + 5 = 6x + 25 \Rightarrow$$

$$-4x - 6x = 25 - 5 \Rightarrow -10x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{-10} \Rightarrow \boxed{x = -2}.$$

4º exemplo: Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo A(3,1), B(-1,1) e C(-1, 4).

Solução: Como o perímetro de qualquer polígono é a soma dos seus lados, vamos então, calcular as distâncias entre os vértices A e B, A e C, e por último B e C, e somar os resultados.

$$D_{A,B} = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-1)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16 + 0} = \sqrt{16} \Rightarrow \boxed{D_{A,B} = 4\ u.c}.$$

$$D_{A,C} = \sqrt{(X_A - X_C)^2 + (Y_A - Y_C)^2} = \sqrt{(3-(-1))^2 + (1-4)^2} \Rightarrow$$

$$D_{A,C} = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \Rightarrow \boxed{D_{A,C} = 5\ u.c}.$$

$$D_{B,C} = \sqrt{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2} = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (1-4)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{(-1+1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{D_{B,C} = 3\ u.c}.$$

Resposta: $4 + 5 + 3 = 12\ u.c$.

13.2. Ponto médio

O ponto médio M entre dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ é o ponto equidistante de A e de B, que pertence ao segmento $\overline{AB}$. As coordenadas desse ponto são dadas pela média aritmética das abscissas e pela média aritmética das ordenadas.

$$M\left(x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Demonstração:

Se x_M é o ponto equidistante de x_A e x_B, então:

$\boxed{x_A - x_M = x_M - x_B}$ (1) $\Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Se y_M é o ponto equidistante de y_A e y_B, então:

$\boxed{y_A - y_M = y_M - y_B}$ (2) $\Rightarrow y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

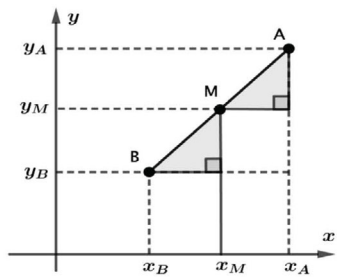


Figura 13.2.1

De acordo com os pontos A e B na figura 13.2.1, os dois triângulos retângulos em destaque possuem, conforme (1) e (2), os mesmos catetos, e de acordo com o teorema de Pitágoras, a mesma hipotenusa. Isso implica em $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, demonstrando ser M o ponto médio de $\overline{AB}$.

1º exemplo: Vamos calcular o ponto médio de A(-6,5) e B(10,-3).

Solução:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-6 + 10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5 + (-3)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \boxed{M\,(2,1)}.$$

2º exemplo: Determine as coordenadas de um ponto A, sabendo que M(-2,4) é o ponto de médio entre A e B(5,-3).

Solução:

$$\left.\begin{aligned} -2 &= \frac{x_A + 5}{2} \Rightarrow x_A + 5 = -4 \Rightarrow x_A = -9 \\ 4 &= \frac{y_A + (-3)}{2} \Rightarrow y_A - 3 = 8 \Rightarrow y_A = 11 \end{aligned}\right\} \boxed{A\,(-9,11)}.$$

EXERCÍCIOS 13.1

1)Calcule a distância entre os pontos:

a) A(0,1) e B(6,-7)

b) D(-3,-4) e X(-7,-1)

c) H(5,-11) e B(-7,-6)

d) G(2,-1) e B(3,-7)

e) A($\frac{2}{9}$, 1) e B(1,$\frac{1}{3}$)

2) Calcule o ponto médio dos seguintes pontos:

a) A(-34,10) e B(-22,14) b) C(0, 5) e D(-2,-3)

3) Determine a ordenada de um ponto A $(8, y)$ equidistante de P(10,4) e Q(14,-4).

4) Calcule o perímetro do triângulo ABC de vértices:

a) A(3,1), B(-1,1) e C(-1, 4). b) A(3,7), B(-3,-1) e C(-9,2).

5) Calcule o perímetro de um triângulo, cujos vértices são pontos médio do triângulo ABC, sendo A(2,4), B(10,4) e C(6, 8).

6) Classifique o triângulo ABC, de vértices A(0,-4), B(0,0) e C(4,0), quanto ao lado (ou seja, se é equilátero, isósceles ou escaleno). Desenhe-o no sistema de coordenadas.

7) Usando o sistema de coordenadas cartesianas, um topógrafo registrou a posição de um ponto A (6, 25) e um ponto B (22, 2) como sendo dois vértices não adjacentes de um terreno retangular. Qual a área desse terreno?

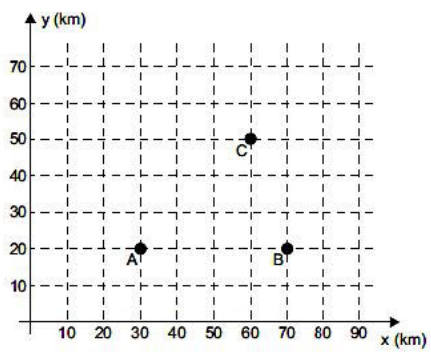
8) (FEI-SP) Num sistema de coordenadas cartesianas são dados os pontos A(0,0) e P $(3, h)$. Determine a alternativa cuja expressão representa a distância do ponto P ao ponto A em função de h.

a) d = $\sqrt{9+h^2}$ b) d = $h+3$ c) d = $3h$ d) d = $\sqrt{9+6h+h^2}$ e) d = $9+h$

9) (ENEM) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

A torre deve estar situada em um Local equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

a) (65; 35).
b) (53; 30).
c) (45; 35).
d) (50; 20).
e) (50; 30).



13.3. Vetores no plano

Há grandezas que ficam completamente definidas apresentando apenas o seu valor. A área de um retângulo, o perímetro de um polígono, a temperatura, por exemplo, não precisam de qualquer outra informação além de um número acompanhado de sua unidade de medida. Porém, existem outras grandezas que precisam de outras informações. A força, a velocidade, a pressão, por exemplo, precisam além do seu valor (que aqui denominamos de módulo), de uma direção (horizontal, vertical, diagonal, etc.) e de um sentido (da direita para esquerda, de cima para baixo, do ponto A para o ponto B, etc.). As grandezas que se definem apenas com o seu valor, denominamos de **grandezas escalares** e as grandezas que precisam de valor, direção e sentido, denominamos de **grandezas vetoriais**.

As grandezas vetoriais são assim denominadas porque são representadas por um vetor. O **Vetor** é definido como um segmento de reta que possui valor (tamanho) e orientação (direção e sentido), por isso dizemos também que **é um segmento de reta orientado**.

Os vetores servem para deslocar pontos ou efetuar translações, como veremos em conteúdos mais adiante. Veja agora, a sua definição formal.

Definição 13.3.1: Sejam os pontos A e B representados no sistema cartesiano conforme a figura 13.3.1. Um vetor pode ser representado pelo segmento de reta $\overline{AB}$ orientado no sentido de A à B e escrevemos $\overrightarrow{AB}$.

Outro vetor também pode ser representado em sentido contrário, de B à A (ver figura 13.3.2) e assim escrevemos $\overrightarrow{BA}$.

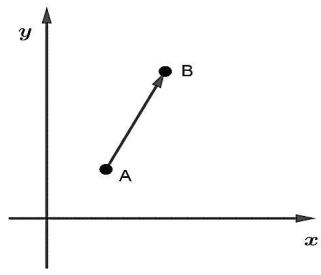


Figura 13.3.1

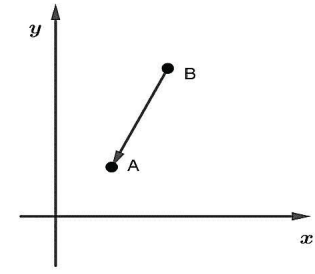


Figura 13.3.2

Qual a relação entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$? Podemos afirmar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$?

Para responder a essas perguntas, precisamos inicialmente de uma definição de equipolência entre vetores, que está a seguir.

Definição 13.3.2: Dizemos que dois vetores são **equipolentes** quando três condições são satisfeitas:

- Possui mesmo tamanho (comprimento);
- Mesma direção (paralelos ou colineares);
- E mesmo sentido.

Usamos o símbolo $\equiv$ para afirmar que vetores são equipolentes e $\not\equiv$ para afirmar que não são equipolentes.

Observação: A igualdade é um caso particular da equipolência. Para que um vetor seja considerado igual a outro, é necessário que os pontos inicial e final destes vetores coincidam.

Sendo assim $\overrightarrow{AB} \not\equiv \overrightarrow{BA}$ ($\overrightarrow{AB}$ não é equipolente a $\overrightarrow{BA}$), pois o sentido é contrário.

Na figura 13.3.3, todos os vetores são equipolentes, pois possuem mesmo tamanho, mesma direção (ou são colineares ou são paralelos) e mesmo sentido (veja as setas), assim: $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD} \equiv \overrightarrow{EF} \equiv \overrightarrow{HG} \equiv \overrightarrow{IJ}$.

Na figura 13.3.4 todos os vetores são diferentes (ou não equipolentes), assim escrevemos: $\overrightarrow{AB} \not\equiv \overrightarrow{CD} \not\equiv \overrightarrow{EF} \not\equiv \overrightarrow{HG} \not\equiv \overrightarrow{IJ}$.

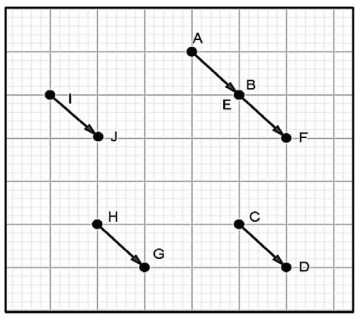


Figura 13.3.3 - Vetores equipolentes.

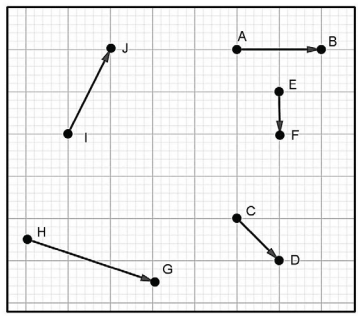


Figura 13.3.4 - Vetores diferentes

Definição 13.3.3: Um vetor no plano é um par ordenado de números reais (x, y). Os números x e y são denominados de **componentes** do vetor.

Exemplo: O vetor $\vec{u}$ que está representado na figura 13.3.5, é dado por $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1, 2)$. Onde O é o ponto inicial (início da seta) e A é o ponto final (ponta da seta).

Existem infinitos vetores equipolentes ao vetor $\vec{u} = (1, 2)$ no plano cartesiano, basta o ponto inicial ser (x, y) e ponto final ser da forma $(x + 1, y + 2)$. Veja a figura 13.3.6.

SAIBA MAIS!

A representação de um vetor que tem como ponto inicial a origem do sistema, denomina-se ***vetor posição****. Um exemplo dessa representação é o vetor da figura 13.3.5.*

Como exemplo, podemos pensar em um vetor $\vec{v}$ com ponto inicial em $(-3, 4)$ e ponto final em $(-3 + 1, 4 + 2) = (-2, 6)$. Esse vetor $\vec{v} = (-2, 6)$ é equipolente ao

vetor $\vec{u} = (1,2)$, ou seja, possui mesmo tamanho, direção e sentido (faça um desenho desse vetor no plano cartesiano e constate essa informação).

O bem da verdade, esse caso é apenas uma aplicação do seguinte teorema.

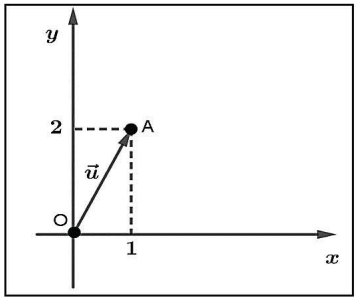


Figura 13.3.5

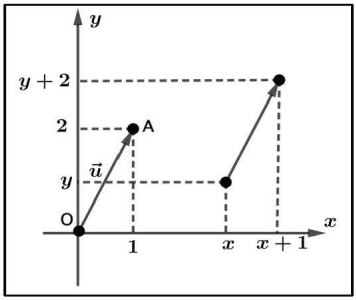


Figura 13.3.6

Teorema 13.3.1: Um vetor $\vec{u} = (a,b)$ é equipolente a qualquer vetor com ponto inicial (x,y) e ponto final $(x+a, y+b)$.

Demonstração:

◆ Mesmo sentido: Imediato.

◆ Mesma direção: Os ângulos θ_1 e θ_2 da figura 13.3.7 são congruentes. Pois

$$tg\theta_1 = \frac{b}{a} \text{ e } tg\theta_2 = \frac{\overbrace{y+b-y}^{diferença\ das\ ordenadas}}{\underbrace{x+a-x}_{diferença\ das\ abscissas}} = \frac{b}{a}.$$

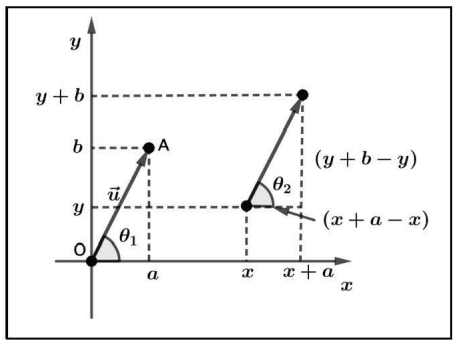


Figura 13.3.7

◆ Mesmo módulo (comprimento): Pelo teorema de Pitágoras aplicado na figura 13.3.7, temos

$$D_{0,A} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$D = \sqrt{(\underbrace{x+a-x}_{\substack{diferença\ das \\ abscissas}})^2 + (\underbrace{y+b-y}_{\substack{diferença\ das \\ ordenadas}})^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pode-se perceber que a equipolência entre esses vetores só foi possível devido a igualdade da diferença entre as abscissas e a igualdade da diferença entre as ordenadas. Essa constatação é o ponto chave que norteia e simplifica incrivelmente toda a teoria sobre vetores, iniciando pelas definições 13.3.4, 13.3.5 e 13.3.6, que estão a seguir.

Definição 13.3.4: Sejam dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano, um vetor $\vec{u}$ de componentes (x, y) é dado por:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x, y) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Por consequência dessa definição, dois vetores são equipolentes quando os seus componentes são iguais.

Exemplo: Vamos verificar quais dos vetores abaixo são equipolentes.

$\overrightarrow{u_1}$ ⇒ Ponto inicial: A $(1,3)$ e ponto final: B $(4,2)$

$\overrightarrow{u_2}$ ⇒ Ponto inicial: C $(-1,2)$ e ponto final: D $(-3,0)$

$\overrightarrow{u_3}$ ⇒ Ponto inicial: E $(101,50)$ e ponto final: F $(104,49)$

$\overrightarrow{u_4}$ ⇒ Ponto inicial: G $(2,2)$ e ponto final: H $(0,0)$

Solução:

$\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{AB} = (4-1, 2-3) = (3, -1)$

$\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{CD} = (-3-(-1), 0-2) = (-2, -2)$

$\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{EF} = (104-101, 49-50) = (3, -1)$

$\overrightarrow{u_4} = \overrightarrow{GH} = (0-2, 0-2) = (-2, -2)$

É preciso estar atento a ordem das diferenças entre as abcissas e a ordem da diferença das ordenadas dos pontos, pois elas definem o sentido do vetor.

Assim: $\overrightarrow{u_1} \equiv \overrightarrow{u_3}$ e $\overrightarrow{u_2} \equiv \overrightarrow{u_4}$ (veja a representação na figura 13.3.8).

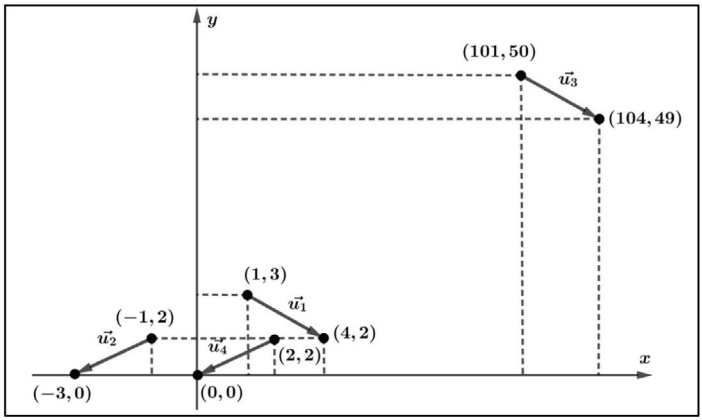


Figura 13.3.8

Definição 13.3.5: Sendo um vetor $\vec{u} = (x, y)$, o ângulo θ medido no lado positivo do eixo x e no sentido anti-horário é denominado de **ângulo de direção** desse vetor e é dado por:

$$tg\theta = \frac{y}{x} \qquad \text{Com } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } x \neq 0.$$

Exemplos:

- $\vec{u} = (-1,1)$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{-1} = -1$. Como $\vec{u}$ está no II quadrante $\Rightarrow \theta = 135°$ ou $\frac{3\pi}{4}$ rad (figura 13.3.9).

- $\vec{v} = (\sqrt{3},1)$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$. Como $\vec{v}$ está no I quadrante $\Rightarrow \theta = 60°$ ou $\frac{\pi}{6}$ rad (figura 13.3.10).

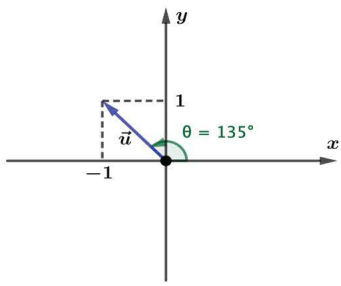


Figura 13.3.9

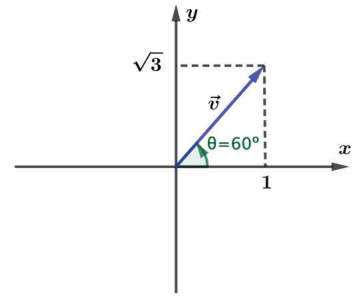


Figura 13.3.10

Quando o componente x do vetor é igual a zero, a $tg\theta$ não existe e θ assumirá dois valores possíveis:

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad ou 90°; se $x = 0$ e $y > 0$.
- $\theta = \frac{3\pi}{2}$ rad ou 270°; se $x = 0$ e $y < 0$.

Exemplos:

- $\vec{u} = (0,\sqrt{2})$ figura 13.3.11.
- $\vec{v} = (0,-2)$ figura 13.3.12.

É interessante observar que o ângulo de direção θ também nos fornece o sentido do vetor.

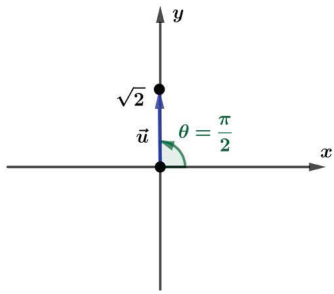


Figura 13.3.11

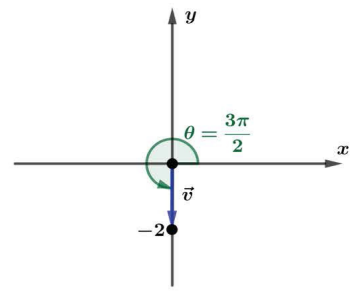


Figura 13.3.12

Quando o componente y do vetor é igual a zero, a $tg\theta$ será igual a zero e θ assumirá dois valores possíveis:

- $\theta = 0$ rad ou 0º se $y = 0$ e $x > 0$.
- $\theta = \pi$ rad ou 180º; se $y = 0$ e $x < 0$.

Exemplos:

- $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ figura 13.3.13.
- $\vec{v} = (-3,0)$ figura 13.3.14.

SAIBA MAIS!

O vetor (0,0) é denominado de vetor nulo. Esse vetor não possui ângulo de direção θ.

Qualquer vetor que começa e termina no mesmo ponto do plano cartesiano é um vetor nulo.

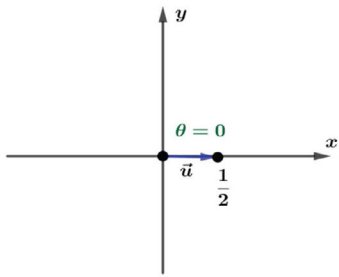


Figura 13.3.13

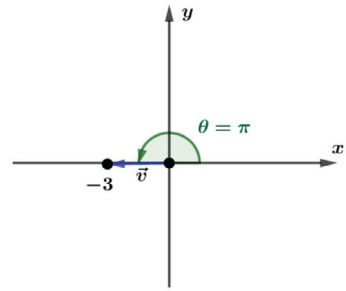


Figura 13.3.14

Outros exemplos:

- $\vec{u} = (7, -7)$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{-7}{7} = -1$. Como $\vec{u}$ está no IV quadrante $\Rightarrow \theta = 315°$ ou $\frac{7\pi}{4}$ rad (ver figura 13.3.15).

- $\vec{v} = (4, 3)$

$tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{4} = 0{,}75$. Como $\vec{u}$ está no I quadrante $\Rightarrow \theta = arctg(0{,}75) \Rightarrow \theta \cong 53{,}13°$ (ver figura 13.3.16).

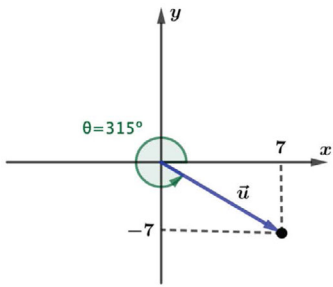


Figura 13.3.15

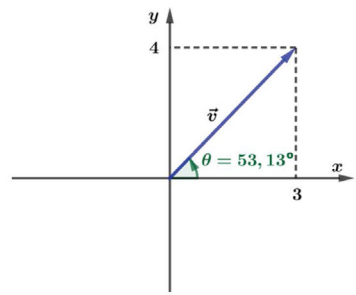


Figura 13.3.16

Definição 13.3.6: Sendo um vetor $\vec{u} = (x, y)$, o comprimento (ou tamanho) desse vetor é denominado de **módulo** e é dado por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A demonstração de que o módulo é o comprimento de um vetor é uma consequência do teorema de Pitágoras. Veja a demonstração do teorema 13.3.1.

Exemplos:

- $\vec{u} = (12, -5)$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$

A figura 13.3.17, mostra o comprimento desse vetor, usando o centímetro como unidade de medida.

- $\vec{v} = (-2, 1)$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \cong 2{,}24.$

A figura 13.3.18, mostra o comprimento desse vetor, usando o centímetro como unidade de medida.

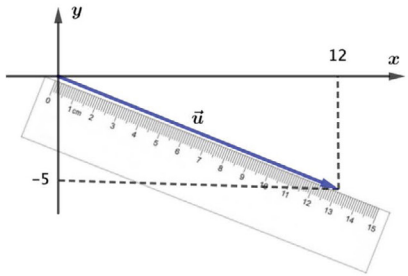


Figura 13.3.17

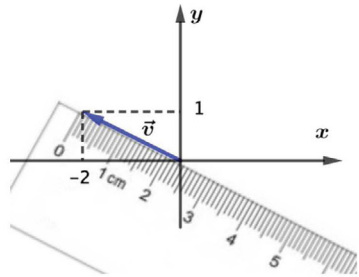


Figura 13.3.18

EXERCÍCIOS 13.2

1)Calcule os componentes (x, y) de cada vetor e verifique quais vetores são equipolentes:

$\overrightarrow{u_1}$ ⇒ Ponto inicial: A $(-1, 0)$ e ponto final: B $(3, 4)$;

$\overrightarrow{u_2}$ ⇒ Ponto inicial: C $(-11, 14)$ e ponto final: D $(-9, 15)$;

$\overrightarrow{u_3}$ ⇒ Ponto inicial: E $(33, 8)$ e ponto final: F $(35, 9)$;

$\overrightarrow{u_4}$ ⇒ Ponto inicial: G $(-4, -4)$ e ponto final: H $(0, 0)$.

2)Se um vetor tem ponto inicial: $A\,(-7,0)$ e ponto final: $B\,(2,7)$, então ele equipolente ao vetor:

a)$\vec{u} = (9,-7)$ b) $\vec{v} = (7,9)$ c) $\vec{w} = (9,7)$ d) $\vec{t} = (7,-9)$ e) $\vec{O} = (0,0)$

3)Se um vetor tem ponto inicial: $A\,(1,1)$ e ponto final: $B\,(5,2)$, então ele tem o mesmo módulo do vetor:

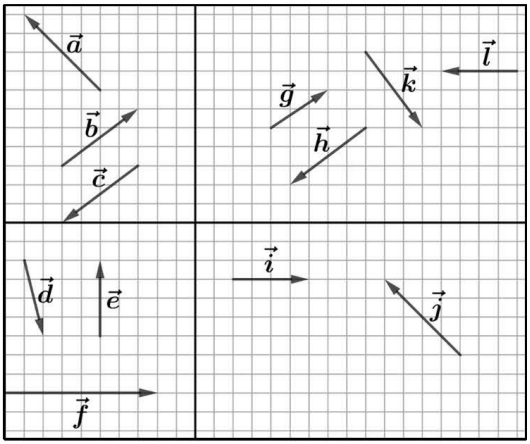
a)$\vec{u} = (0,-2)$ b) $\vec{v} = (1,4)$ c) $\vec{w} = (7,0)$ d) $\vec{t} = (5,-2)$ e) $\vec{O} = (5,2)$

4) Se a tangente do ângulo de direção de dois vetores são iguais, isso implica que:

a) São equipolentes;
b) Possuem mesmo sentido;
c) Possuem mesma direção;
d) Possuem mesmo módulo;
e) n.d.a

5) Identifique na figura a seguir, os vetores que são:

a) Equipolentes.
b) Possui mesma direção e sentido, porém módulos diferentes.
c) Possui mesmo módulo e direção, mas sentido contrário.



6)Calcule o ângulo de direção e o módulo de cada vetor abaixo. Represente-os no plano cartesiano.

a)$\vec{u} = (1,\sqrt{3})$
b)$\vec{v} = (-2,2)$
c) $\vec{k} = (10,-10)$
d)$\vec{w} = (2\sqrt{3},2)$
e)$\vec{t} = (5,-5\sqrt{3})$
f) $\vec{s} = (5,4)$

13.3.1. Operações com vetores

Definição 13.3.1.1 (soma de vetores): A soma de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$ definido por: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Exemplo: $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$.

$\vec{u} + \vec{v} = (-1, 2) + (2, 1) = (-1 + 2,\ 2 + 1) = (1, 3)$. Ver figura 13.3.1.1.

A interpretação geométrica dessa soma é dada pela regra do paralelogramo. Essa regra consiste em traçar um vetor equipolente a $\vec{u}$ e outro vetor equipolente a $\vec{v}$, de maneira que forme um paralelogramo (ver figura 13.3.1.2). A diagonal destacada no paralelogramo representa $\vec{u} + \vec{v}$.

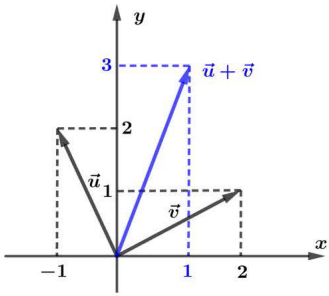


Figura 13.3.1.1

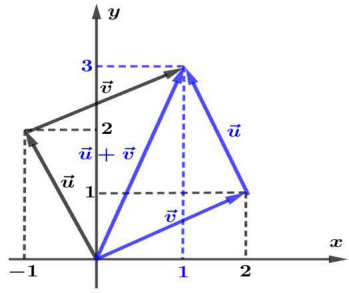


Figura 13.3.1.2

De uma forma geral, a soma geométrica de dois ou mais vetores é representado da seguinte maneira: o início se dá na origem do primeiro vetor e o fim no final (na ponta da seta) do último vetor. Veja na figura 13.3.1.6 um exemplo da soma $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}$.

Definição 13.3.1.2 (subtração de vetores): A subtração de dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ é o vetor $\vec{u} - \vec{v}$ definido por: $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$.

Exemplo: $\vec{u} = (-1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 1)$.

$\vec{u} - \vec{v} = (-1, 2) - (2, 1) = (-3, 1)$. Ver figura 13.3.1.3.

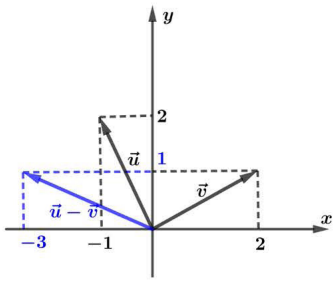


Figura 13.3.1.3

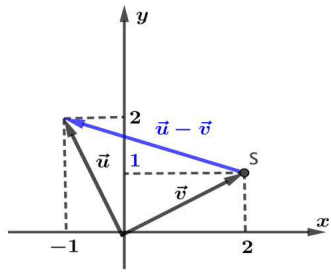


Figura 13.3.1.4

A interpretação geométrica dessa subtração está na figura 13.3.1.4, que também obedece a regra do paralelogramo, porém, formando a outra diagonal (ver figura 13.3.1.5).

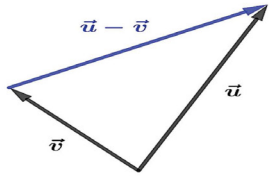


Figura 13.3.1.5

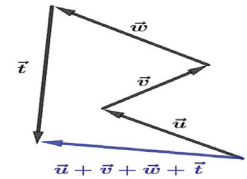


Figura 13.3.1.6

Definição 13.3.1.3 (vetor oposto): Se $\vec{u} = (x, y)$, então $(-x, -y)$ é o vetor oposto de $\vec{u}$ e denotamos de $-\vec{u}$.

Exemplo: $\vec{u} = (-5, 2) \Rightarrow -\vec{u} = (5, -2)$.

O vetor oposto tem mesmo módulo e direção, apenas sentido oposto ao vetor original (ver figura 13.3.1.7).

É evidente que a subtração $\vec{u} - \vec{v}$ é igual a soma de $\vec{u}$ com o oposto de $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, conforme a ilustração na figura 13.3.1.8.

Também é imediato que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$.

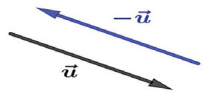


Figura 13.3.1.7

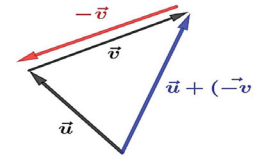


Figura 13.3.1.8

Definição 13.3.1.4 (produto de um escalar por um vetor): Sendo k número escalar (real) e $\vec{u} = (x, y)$, então o produto de k por $\vec{u}$ (x, y) é dado por:

$$k\vec{u} = (kx, ky)$$

Exemplos:

- $\vec{u} = (4, 6) \Rightarrow 5.\vec{u} = (5 \,.\, 4, 5 \,.\, 6) = (20, 30)$.
- $\vec{v} = (-1, 7) \Rightarrow -2.\vec{v} = (-2 \,.\, (-1), -2 \,.\, 7) = (2, -14)$.

Denominamos $k.\vec{u}$ como sendo um **vetor múltiplo escalar de $\vec{u}$**. O vetor $k.\vec{u}$ tem:

– Mesmo sentido do vetor $\vec{u}$ se k for positivo e sentido contrário a $\vec{u}$ se k for negativo;

– Mesma direção de $\vec{u}$, isto é, $\vec{u}$ e $k.\vec{u}$ são paralelos ou colineares;

– Possui módulo (ou tamanho) k vezes maior ou menor que o vetor $\vec{u}$.

Propriedades de vetores:

- Propriedade 1 (comutativa): $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$;
- Propriedade 2 (associativa): $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$;
- Propriedade 3 (elemento neutro da adição): $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$;
- Propriedade 4 (existência do oposto): $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$;
- Propriedade 5 (associativa para os escalares): $a.(b\vec{u})=(a.b).\vec{u}=\vec{0}$;
- Propriedade 6 (distributiva para os escalares): $k.(\vec{v}+\vec{w})=k\vec{v}+k\vec{w}$;
- Propriedade 7 (elemento neutro da multiplicação): $1.(\vec{u})=\vec{u}$.

As propriedades acima são facilmente demonstradas e ficarão a cargo do leitor.

Teorema 13.3.1.1: Todo e qualquer vetor $\vec{u}=(x,y)$, pode ser representado a partir de seu módulo $|\vec{u}|$ e ângulo de direção θ, da seguinte forma:

$$\vec{u}=(|\vec{u}|cos\theta,|\vec{u}|sen\theta)$$

Demonstração:

De acordo com a figura 13.3.1.9, temos

$$cos\theta=\frac{x}{|\vec{u}|}\Rightarrow \boxed{x=|\vec{u}|cos\theta}.$$

$$sen\theta=\frac{y}{|\vec{u}|}\Rightarrow \boxed{y=|\vec{u}|sen\theta}.$$

Substituindo em $\vec{u}=(x,y)$, encontramos

$$\vec{u}=(|\vec{u}|cos\theta\,,|\vec{u}|sen\theta).$$

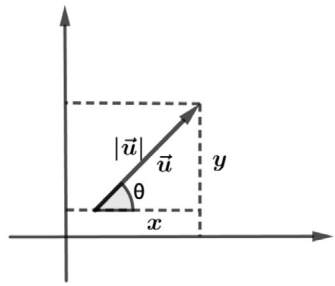


Figura 13.3.1.9

Exemplo: Sendo $\theta=45°$ e $|\vec{u}|=2$, esse vetor é

$$\vec{u}=(|\vec{u}|cos\theta,|\vec{u}|sen\theta)=(2.cos45°,2.sen45°)=(2.\frac{\sqrt{2}}{2},2.\frac{\sqrt{2}}{2})=(\sqrt{2},\sqrt{2}).$$

Definição 13.3.1.5 (vetor unitário ou versor): Denomina-se vetor unitário ou versor, um vetor cujo módulo é 1.

Exemplo: O vetor $\vec{u}=\left(\frac{15}{17},\frac{8}{17}\right)$ é unitário, pois

$$|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{15}{17}\right)^2+\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\sqrt{\frac{225+64}{289}}=\sqrt{1}=1.$$

Um caso especial de versores são: $\boldsymbol{i} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ e $\boldsymbol{j} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Esses versores (também denominados de vetores canônicos) formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, ou seja, qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser representado como uma combinação linear entre esses dois versores. Veja:

$$\vec{u} = (x, y) = x.(1,0) + y(0,1)$$

Exemplo: $\vec{u} = (3, -8) \Rightarrow \vec{u} = 3.\underbrace{(1,0)}_{i} - 8.\underbrace{(0,1)}_{j} = 3i - 8j.$

A forma $3i - 8j$ é uma outra maneira bastante utilizada em textos matemáticos para representar o vetor $(3, -8)$.

Teorema 13.3.1.2: Se $\vec{u} = xi + yj$ é um vetor não nulo, então o vetor $\hat{u}$ denominado de vetor unitário (ou versor), de mesma direção e sentido, porém módulo unitário, será dado por:

$$\hat{u} = cos\theta.i + sen\theta.j$$

Demonstração: Seja o vetor $\vec{u} = (x, y)$ de ângulo de direção θ e o vetor unitário $\hat{u}$ escrito na forma $\hat{u} = (cos\theta.\boldsymbol{i} + sen\theta.\boldsymbol{j})$.

Direção e sentido: de $\vec{u} \Rightarrow tg\theta = \frac{y}{x}$ e de $\hat{u} \Rightarrow tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{sen\theta}{cos\theta} \Rightarrow \boxed{\theta = \alpha}$.

Módulo: $|\hat{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{cos^2\theta + sen^2\theta} = 1.$

Exemplo: Ache o vetor unitário na mesma direção e sentido dos seguintes vetores.

- $\vec{u} = (10, 10)$

$$|\hat{u}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{2.100} \Rightarrow \boxed{|\hat{u}| = 10\sqrt{2}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\theta = \frac{x}{|\vec{u}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \\ sen\theta = \frac{y}{|\vec{u}|} \Rightarrow sen\theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right\} \boxed{\hat{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\right)}.$$

- $\vec{v} = (-24, 10)$

$$|\hat{u}| = \sqrt{(-24)^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} \Rightarrow \boxed{|\hat{u}| = 26}.$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\theta = \frac{x}{|\vec{u}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{-24}{26} = \frac{-12}{13}. \\ sen\theta = \frac{y}{|\vec{u}|} \Rightarrow sen\theta = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}. \end{array}\right\} \boxed{\hat{u} = \left(\frac{-12}{13}.\boldsymbol{i} + \frac{5}{13}.\boldsymbol{j}\right)}.$$

Utilizando os teoremas 13.3.1.1 e 13.3.1.2, podemos escrever qualquer vetor da seguinte maneira:

$$\vec{u} = |\vec{u}|\left(\underbrace{cos\theta.i + sen\theta.j}_{\hat{u}}\right)$$

Exemplo: Vamos expressar o vetor $\vec{u} = (2, -5)$ a partir do vetor unitário que está na mesma direção e sentido de $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$cos\theta = \frac{x}{|\vec{u}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$sen\theta = \frac{y}{|\vec{u}|} \Rightarrow cos\theta = \frac{-5}{\sqrt{29}}$$

$$\boxed{\vec{u} = \sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}.\boldsymbol{i} - \frac{5}{\sqrt{29}}.\boldsymbol{j}\right)}.$$

A expressão $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}.\boldsymbol{i} - \frac{5}{\sqrt{29}}.\boldsymbol{j}\right)$ do vetor acima é o vetor unitário $\hat{u}$ que tem mesma direção e sentido de $\vec{u}$.

EXERCÍCIOS 13.3

1)Calcule $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ e $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$ e represente-os no plano cartesiano.

a) $\overrightarrow{u_1} = (1, 5)$ e $\overrightarrow{u_2} = (-6, 0)$

b) $\overrightarrow{u_1} = (3, -1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (-2, 4)$

c) $\overrightarrow{u_1} = (-10, -20)$ e $\overrightarrow{u_2} = (10, 20)$

d) $\overrightarrow{u_1} = (-9, -8)$ e $\overrightarrow{u_2} = (-9, -8)$

2) Se $\overrightarrow{u_1} = (5, -6)$ e $\overrightarrow{u_2} = (3, -12)$, calcule:

a) $\overrightarrow{z_1} = 5\overrightarrow{u_1}$

b) $\overrightarrow{z_2} = -\overrightarrow{u_2}$

c) $\overrightarrow{z_3} = -3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2}$

d) $\overrightarrow{z_4} = -2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}$

3)Ache os vetores unitários (na mesma direção e sentido) dos seguintes vetores:

a) $\overrightarrow{u_1} = (-1, 1)$

b) $\overrightarrow{u_2} = (6, -8)$

c) $\overrightarrow{u_3} = 200i + 200\sqrt{3}j$

d) $\overrightarrow{u_4} = -21i - 20j$

4) Um vetor $\vec{u}$ tem módulo $|\vec{u}|$, então o vetor $k.\vec{u}$ (com $k \in \mathbb{R}$) tem módulo:

a) $k^2|\vec{u}|$ b) $|\vec{u}|^2$ c) $k + |\vec{u}|$ d) $k^2|\vec{u}|^2$ e) $k|\vec{u}|$

13.3.2. Produto escalar ou produto interno

Definição 13.3.2.1 (produto escalar ou interno): Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dois vetores de um espaço vetorial[6]. O produto escalar (ou produto interno) $\vec{u}.\vec{v}$ é dado por:

$$\vec{u}.\vec{v} = (x_1, y_1).(x_2, y_2) = x_1.x_2 + y_1.y_2$$

O produto escalar acima tem como resultado um número real e não um vetor.

Exemplo: Calcule o produto escalar entre os vetores $\vec{u} = i + 3j$ e $\vec{v} = -2i + 4j$.
Solução: $\vec{u}.\vec{v} = 1.(-2) + 3.4 = -2 + 12 = 10.$

Propriedades: Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3)$ vetores quaisquer de um espaço vetorial, então:

Propriedade 1 (comutativa): $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Propriedade 2 (distributiva): $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

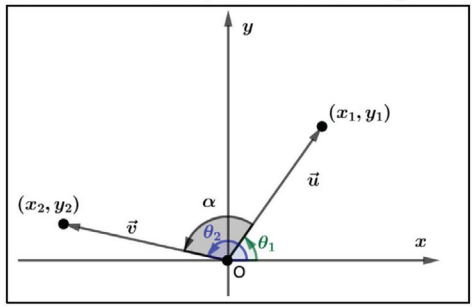
Teorema 13.3.2.1: Se $\vec{u} = (x, y)$, então: $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$

A demonstração desse teorema e das propriedades será cobrada nos exercícios.

Teorema 13.3.2.2: Se α for um ângulo entre os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha \qquad \text{Com } 0° \leq \alpha \leq 180°.$$

Demonstração: Sejam os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ vetores não nulos de um espaço vetorial e α for o ângulo entre esses vetores, conforme a figura a seguir.



Como $\alpha = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow$

$cos\alpha = cos(\theta_2 - \theta_1).$

Pela fórmula do arco da diferença:

$cos\alpha = cos\theta_2.cos\theta_1 + sen\theta_2.sen\theta_1$

$$cos\alpha = \frac{x_2}{|\vec{v}|}.\frac{x_1}{|\vec{u}|} + \frac{y_2}{|\vec{v}|}.\frac{y_1}{|\vec{u}|} \Rightarrow$$

[6] Pode-se entender como espaço vetorial, uma coleção de vetores que podem ser somados e multiplicados por números (escalares). Uma definição formal pode ser encontrada em álgebra linear no volume 4 dessa coleção.

$$cos\alpha = \frac{x_2.x_1 + y_2.y_1}{|\vec{v}|.|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{v}|.|\vec{u}|} \Rightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha}.$$

A expressão $|\vec{v}|.cos\alpha$ é definida como a **projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$**. Essa projeção, em seus dois casos possíveis, está exemplificada nas figuras 13.3.2.1 e 13.3.2.2 a seguir.

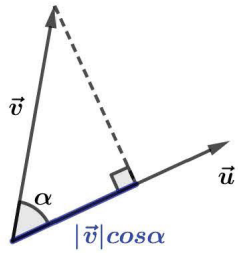


Figura 13.3.2.1

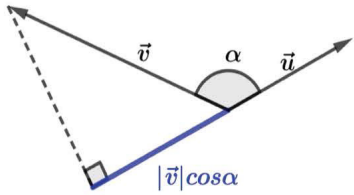


Figura 13.3.2.1

A partir dessa definição, podemos afirmar também que o produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$ pode ser dado pelo produto do módulo de $\vec{u}$ pela projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.\underbrace{|\vec{v}|.cos\alpha}_{Projeção\ escalar}$$

A partir do teorema 13.3.2.2 anterior, podemos estabelecer uma relação interessante entre dois vetores e o ângulo entre eles, em dois casos particulares: vetores múltiplos e vetores perpendiculares, conforme os dois teoremas a seguir.

Teorema 13.3.2.3: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são múltiplos se, e somente se, o ângulo entre eles é zero ($\alpha = 0$).

Vimos que se um vetor for múltiplo escalar do outro, então eles são paralelos ou colineares e obviamente, o ângulo entre eles é nulo (e vice-versa). De qualquer forma, vamos a demonstração algébrica desse fato.

Demonstração:

$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = k.\vec{v}.\vec{v} = k.|\vec{v}|^2 = k|\vec{v}|.|\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow \boxed{\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Substituindo em $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha$, temos

$$k.|\vec{v}|^2 = k.|\vec{v}|^2.cos\alpha \Leftrightarrow cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 0}.$$

Teorema 13.3.2.4: Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares (ou ortogonais) se, e somente se, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

1º exemplo: Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u} = i$ e $\vec{v} = \sqrt{3}i + j$.

Solução:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2} = 1.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 = 1.\sqrt{3} + 0.1 = \sqrt{3}.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha \Rightarrow \sqrt{3} = 1.2.cos\alpha \Rightarrow \boxed{cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Resposta: Como $0° \leq \alpha \leq 180°$, implica que $\alpha = 30°$.

Outra solução: $tg\theta_1 = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_1 = 0°}$.

$$tg\theta_2 = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_2 = 30°}.$$

$$\alpha = \theta_2 - \theta_1 = 30 - 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = 30°}$$

2º exemplo: Ache o ângulo entre os vetores $\vec{u} = 3i + 2j$ e $\vec{v} = -2i + 3j$.

Solução:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 = 3.(-2) + 2.3 = 0.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha \Rightarrow 0 = \sqrt{13}.\sqrt{13}.cos\alpha \Rightarrow \boxed{cos\alpha = 0}.$$

Resposta: $90°$ ou $\frac{\pi}{2}\ rad$ (perpendiculares).

3º exemplo: Ache o ângulo entre os vetores $\vec{u} = 12i - 4j$ e $\vec{v} = 3i - j$ e a projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}.$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 = 12.3 + (-4).(-1) = 36 + 4 = 40.$$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha \Rightarrow 40 = \sqrt{160}.\sqrt{10}.cos\alpha \Rightarrow 40 = \sqrt{1600}.cos\alpha \Rightarrow$$

$$40 = 40.cos\alpha \Rightarrow \boxed{cos\alpha = 1} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0°}.$$

O ângulo é nulo, então $\vec{u}$ é múltiplo escalar de $\vec{v}$. Verifique que, de fato, $\vec{u} = 4\vec{v}$.

A projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ é $|\vec{v}|.cos\alpha = \sqrt{10}.1 = \sqrt{10}$.

4º exemplo: Calcule o valor de b para que os vetores $\vec{u} = 2i - bj$ e $\vec{v} = i - j$, sejam:

a) Perpendiculares.

Solução: Para que sejam perpendiculares é preciso que $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Assim,

$$\vec{u}.\vec{v} = 2.1 + (-b).(-1) = 0 \Rightarrow 2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}.$$

b) Múltiplos ou paralelos.

Solução: Para que sejam múltiplos é preciso que $k\vec{u} = \vec{v}$. Dessa forma,

$$k.(2,-b) = (1,-1) \Rightarrow (2k,-kb) = (1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 2k = 1 \Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}. \\ -kb = -1 \Rightarrow \boxed{b = 2}. \end{cases}$$

EXERCÍCIOS 13.4

1) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, calcule $\vec{u}.\vec{v}$.

a) $\vec{u} = (2,0)$ e $\vec{v} = (-1,2)$

b) $\vec{u} = (-2,5)$ e $\vec{v} = (10,2)$

c) $\vec{u} = (\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ e $\vec{v} = (\frac{-5}{3},\frac{1}{2})$

d) $\vec{u} = -2i$ e $\vec{v} = i - 2j$

2) Ache o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e calcule a projeção escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

a) $\vec{u} = (0,1)$ e $\vec{v} = (-1,0)$

b) $\vec{u} = (2,4)$ e $\vec{v} = (6,2)$

c) $\vec{u} = (1,\frac{1}{2})$ e $\vec{v} = (-\frac{3}{2},\frac{1}{2})$

d) $\vec{u} = i$ e $\vec{v} = i + j$

e) $\vec{u} = i + \sqrt{3}j$ e $\vec{v} = -j$

f) $\vec{u} = 4i + 3j$ e $\vec{v} = 20i - 21j$

3) Calcule o valor de h para que os vetores $\vec{u} = 4i - 5j$ e $\vec{v} = 5i - hj$, sejam:

a) Perpendiculares.

b) Paralelos.

4) Demonstre que:

a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

b) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

c) $(\vec{u} + \vec{m}).(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w} + \vec{m}.\vec{v} + \vec{m}.\vec{w}$

d) $\vec{u}.\vec{u} = |\vec{u}|^2$

e) $c.(\vec{u}.\vec{v}) = (c\vec{v}).\vec{u}$

f) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$

g) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 - 2.\vec{u}.\vec{v} + |\vec{v}|^2$

h) Se $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}| + |\vec{w}|$ se $\vec{v} = k.\vec{w}$.

13.3.3. Aplicações vetoriais

Muitas fórmulas, teoremas e propriedades da geometria plana e analítica, podem ser demonstrados utilizando vetores.

1º exemplo: Vamos provar a fórmula do ponto médio entre dois pontos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B).

Demonstração: De acordo com a definição de ponto médio, os vetores $\overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{MB}$ da figura a seguir são equipolentes e o dobro de $\overrightarrow{AM}$ equivale a $\overrightarrow{AB}$. Logo,

$$2.\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$$

Denotando M (x_M, y_M), temos

$$2(x_M - x_A, y_M - y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

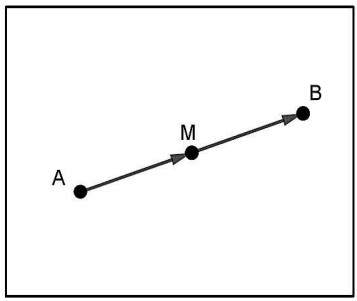
$$(2x_M - 2x_A, 2y_M - 2y_A) = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$$2x_M - 2x_A = x_B - x_A \Rightarrow 2x_M = x_B + x_A \Rightarrow$$

$$\boxed{x_M = \frac{(x_B + x_A)}{2}}$$

$$2y_M - 2y_A = y_B - y_A \Rightarrow 2y_M = y_B + y_A \Rightarrow$$

$$\boxed{y_M = \frac{(y_B + y_A)}{2}}.$$

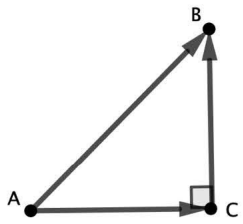


2º exemplo: Vamos demonstrar o teorema de Pitágoras utilizando vetores.

Demonstração: Pela figura a seguir, devemos mostrar que

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2$$

Sabe-se pela definição de soma que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.



Aplicando o produto interno de $\overrightarrow{AB}$ com ele mesmo, temos

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right).\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva,

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB}$$

Aplicando o teorema 13.3.2.1,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + 2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2$$

Como $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = 0$ (são perpendiculares), concluímos a demonstração.

3º exemplo: Vamos mostrar que as diagonais de um losango são perpendiculares.

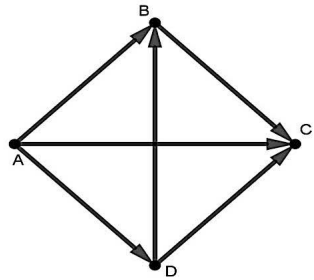
Demonstração: Pela figura a seguir, devemos mostrar que $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são

perpendiculares, ou seja, que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$.

De acordo com a definição geométrica de soma, temos que

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$



Fazendo o produto escalar

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}.$$

Os lados dos losangos são congruentes, assim

$$\overrightarrow{BC}\equiv\overrightarrow{AD}\equiv\overrightarrow{AB}.$$

Substituindo tudo por $\overrightarrow{AB}$, encontramos

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$$

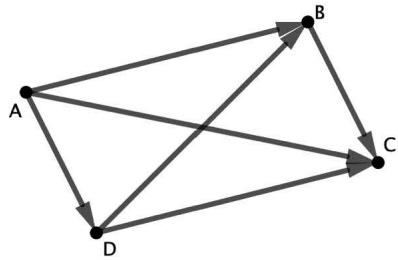
$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0.$$

4º exemplo: Vamos mostrar que a soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo é igual a soma dos quadrados de suas diagonais.

Demonstração:

Pela figura a seguir, temos

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$



Elevando ao quadrado, obtemos

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}(1).$$

A outra diagonal pode ser obtida por

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$$

Elevando também ao quadrado,

$$\boxed{\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=\left|\overrightarrow{DC}\right|^2-2.\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}(2).$$

Somando (1) e (2) sabendo que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, encontramos

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DC}\right|^2-2.\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BC}+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{DC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2}.$$

13.3.4. A área de um paralelogramo

Vamos aprender como calcular a área de um paralelogramo utilizando vetores.

Pela figura a seguir, a altura do paralelogramo é dado por: $|\overrightarrow{AB}|.sen\alpha$.

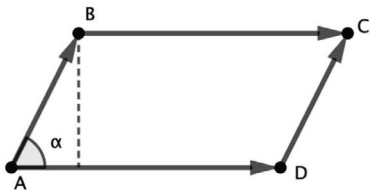
A área por: $A = |\overrightarrow{AD}|.|\overrightarrow{AB}|.sen\alpha$. O quadrado disso é:

$$A^2 = |\overrightarrow{AD}|^2.|\overrightarrow{AB}|^2.sen^2\alpha$$

$$A^2 = |\overrightarrow{AD}|^2.|\overrightarrow{AB}|^2.(1 - cos^2\alpha)$$

$$A^2 = |\overrightarrow{AD}|^2.|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AD}|^2.|\overrightarrow{AB}|^2.cos^2\alpha$$

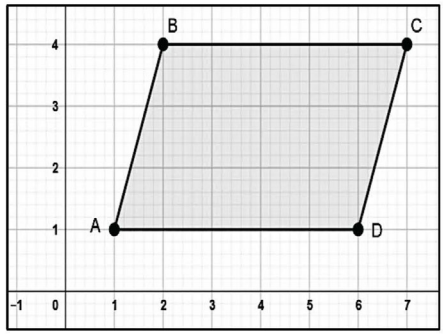
$$\boxed{A^2 = |\overrightarrow{AD}|^2.|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB})^2}$$



Em termos de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podemos escrever:

$$A^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

Exemplo: Calcular a área do paralelogramo que está na figura:



Solução: Podemos rapidamente encontrar a área desse paralelogramo utilizando a geometria plana, porém vamos utilizar vetores.

$\overrightarrow{AB} = (2,4) - (1,1) = (1,-3)$

$\overrightarrow{AD} = (6,1) - (1,1) = (5,0)$

$|\overrightarrow{AB}|^2 = (-3)^2 + 1^2 = 10$

$|\overrightarrow{AD}|^2 = 5^2 + 0^2 = 25$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 1.5 + 0 = 5$

$A^2 = |\overrightarrow{DC}|^2.|\overrightarrow{AB}|^2 - (\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB})^2$

$A^2 = 10.25 - 5^2 = 250 - 25 \Rightarrow A = \sqrt{225} \Rightarrow \boxed{A = 15\ u.a}$.

Na subseção 13.3.6 veremos uma forma mais prática de encontrar a área de qualquer paralelogramo ou até mesmo qualquer polígono convexo, utilizando os seus vértices.

13.3.5. A área de um triângulo

Como a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo, temos a partir da fórmula do paralelogramo da subseção anterior, que

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2}.$$

Podemos calcular a área de um triângulo a partir das coordenadas dos seus vértices sem utilizar vetores. Para demonstração, considere o desenvolvimento da fórmula anterior e inicialmente um triângulo com um de seus vértices na origem, conforme a figura 13.3.5.1. Assim,

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2} \Rightarrow 4A^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$

$$4A^2 = (x_1{}^2 + y_1{}^2)(x_2{}^2 + y_2{}^2) - (x_1.x_2 + y_1.y_2)^2$$

$$4A^2 = x_1{}^2.y_1{}^2 + y_1{}^2.x_2{}^2 - 2x_1.x_2.y_1.y_2$$

$$4A^2 = (x_1.y_2 - y_1.x_2)^2 \Rightarrow \boxed{A = \left|\frac{1}{2}(x_1.y_2 - y_1.x_2)\right|}.$$

Colocando os pontos em colunas numa matriz, tem-se

$$\boxed{A = \left|\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\ \right|}.$$

O valor de A será o módulo da diferença entre os produtos das diagonais da matriz acima.

Caso o triângulo não tenha um vértice na origem, precisamos fazer uma **translação**. Dizemos que uma figura sofre uma translação quando se desloca, sem se deformar paralelamente a uma direção fixada. Observe na figura 13.3.5.2 que o triângulo foi transladado na direção do vetor $\vec{w}$.

Ao escolher o ponto (x_3, y_3) na figura 13.3.5.2 a ser transladado para a origem, segundo o vetor $-\vec{w}$, as abscissas e as ordenadas dos outros vértices sofrerão acréscimos $-x_3$ e $-y_3$, respectivamente, e assim:

$$A = \left|\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}\ \right|.$$

Com manipulações algébricas convenientes, mostra-se que a matriz acima é equivalente a:

$$\boxed{A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\right|}$$

O valor de A é dado pelo módulo da diferença entre os produtos das diagonais: diagonais à direita (de azul) menos as diagonais à esquerda (de vermelho).

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}\right|$$

Isto é:

$$A = \left|\frac{1}{2}(x_3.y_1 + x_1.y_2 + x_2.y_3 - (x_1.y_3 + x_2.y_1 + x_3.y_2))\right|$$

Observação: A matriz pode iniciar por qualquer ponto, desde que, inicie e termine pelo mesmo ponto. A matriz a seguir foi iniciada e terminada por (x_2, y_2):

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_2 & x_1 & x_3 & x_2 \\ y_2 & y_1 & y_3 & y_2 \end{bmatrix}\right|.$$

E possui o mesmo valor, em módulo, que a anterior.

SAIBA MAIS!

A maioria dos livros didáticos do ensino médio, apresentam a matriz na forma:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Na intenção de utilizar determinantes. Questão de preferência apenas.

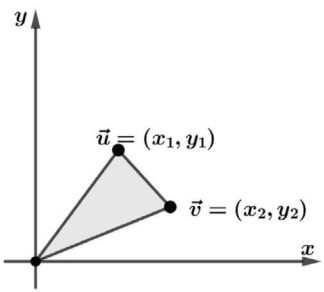


Figura 13.3.5.1

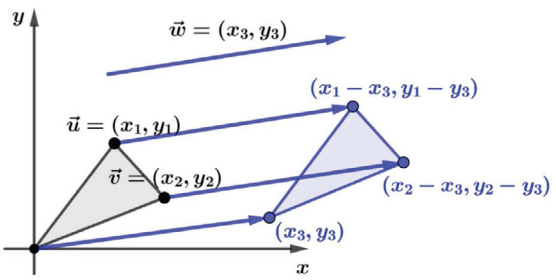
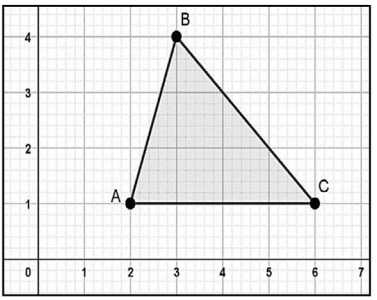


Figura 13.3.5.2 (translação)

Exemplo: Calcular a área do triângulo que está na figura.



Solução: Iniciando e terminando a matriz pelo ponto A, temos

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}.(2 + 24 + 3 - (6 + 3 + 8))\right| \Rightarrow$$

$$A = |-6| \Rightarrow \boxed{A = 6\ u.a}$$

Utilize a fórmula da área de um triângulo da geometria plana e confirme o resultado.

13.3.6. A área de um polígono convexo qualquer

Com o objetivo de justificar o método, vamos inicialmente pensar em um quadrilátero qualquer de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ e $D(x_4, y_4)$, conforme a figura 13.3.6.1.

Dividindo-o em dois triângulos, sua área será a soma das áreas desses triângulos.

$$A_{ABC} = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2}(x_1.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_1 - (x_2.y_1 + x_3.y_2 + x_1.y_3))\right|$$

$$A_{ACD} = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{bmatrix}\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2}(x_1.y_3 + x_3.y_4 + x_4.y_1 - (x_3.y_1 + x_4.y_3 + x_1.y_4))\right|$$

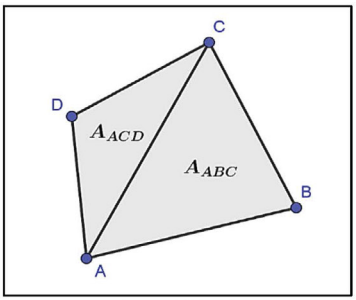


Figura 13.3.6.1

$$A = A_{ABC} + A_{ACD} = \left|\frac{1}{2}\left(\begin{matrix} x_1.y_2 + x_2.y_3 + x_3.y_1 - x_2.y_1 - x_3.y_2 - x_1.y_3 + x_1.y_3 \\ +x_3.y_4 + x_4.y_1 - x_3.y_1 - x_4.y_3 - x_1.y_4 \end{matrix}\right)\right|.$$

Essa expressão pode ser reescrita como:

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{bmatrix}\right|$$

Fórmula para a área de um quadrilátero.

Observe que os pontos na nova matriz ficaram ordenados, o que indica que devemos dispor pontos consecutivos e em um mesmo sentido (horário ou anti-horário). Na prática, devemos escolher um vértice como ponto de partida, percorrer todo o polígono em um mesmo sentido, até voltarmos ao vértice inicial.

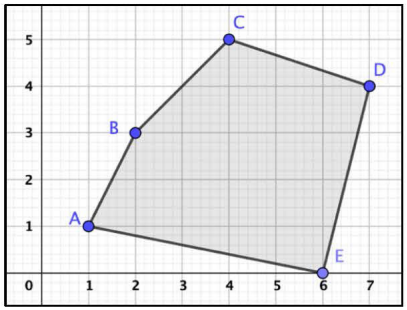
Esse artifício pode ser estendido a um pentágono, hexágono (demonstrações a cargo do leitor) ou qualquer outro polígono convexo de n lados, conhecendo os seus vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n):

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \cdots & x_{n-1} & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & \cdots & y_{n-1} & y_n & y_1 \end{bmatrix}\right|$$

As observações para o método continuam as mesmas para o quadrilátero:

- Os pontos dispostos ordenadamente devem ser consecutivos e em um único sentido;
- A matriz começa e termina pelo mesmo ponto escolhido;

Exemplo: Calcular a área do pentágono que está na figura.



Solução: Adotando o sentido anti-horário A, E, D, C, B, A, temos,

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_A & x_E & x_D & x_C & x_B & x_A \\ y_A & y_E & y_D & y_C & y_B & y_A \end{bmatrix}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(0 + 24 + 35 + 12 + 2 - (6 + 0 + 16 + 10 + 3)\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(73 - 35)\right| = \frac{38}{2} \Rightarrow \boxed{A = 19\ u.a}.$$

2º exemplo: Um paralelogramo possui vértices A(-3,4), B(1,7) e C(7,3). Sabendo que AB//CD, calcule o quarto vértice D e área desse paralelogramo.

Solução:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,7) - (-3,4) = (4,3)$.

$D = C - \overrightarrow{AB} = (7,3) - (4,3) \Rightarrow \boxed{D = (3,0)}$.

Veja que de fato, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, pois:

$(7,3) - (1,7) = (3,0) - (-3,4)$.

Para calcular a área, adotaremos o sentido horário,

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_D & y_A \end{bmatrix}\right|$$

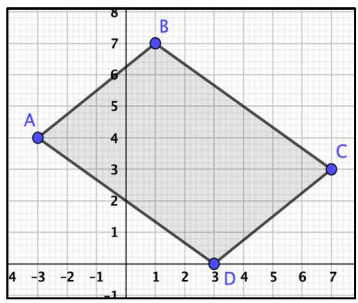
$$A = \left[\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 & 3 & -3 \\ 4 & 7 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right]$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(-21 + 3 + 0 + 12 - (4 + 49 + 9 - 0)\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(-6 - 62)\right| = \left|\frac{-68}{2}\right| \Rightarrow A = |-34|$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 34\ u.a}.$$

Esse paralelogramo está na figura ao lado.



Como você encontraria o quarto vértice e área desse paralelogramo, sem o uso de vetores? Veja a praticidade oportunizada pelos vetores nessa solução.

13.3.7. Teorema de Pick

Definição 13.3.7.1: Malha quadriculada (ou rede) é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Um exemplo de rede é o conjunto de pontos que está na figura 13.3.7.1.

Definição 13.3.7.2: Triângulo fundamental é um triângulo formado em uma malha quadriculada, cuja medida da base é 1 e altura também 1, ou seja, é um triângulo de área igual 1/2.

Qualquer polígono em uma malha quadriculada pode ser dividido em n triângulos fundamentais[7] (ver figura 13.3.7.2).

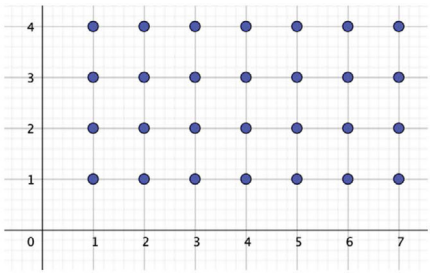


Figura 13.3.7.1

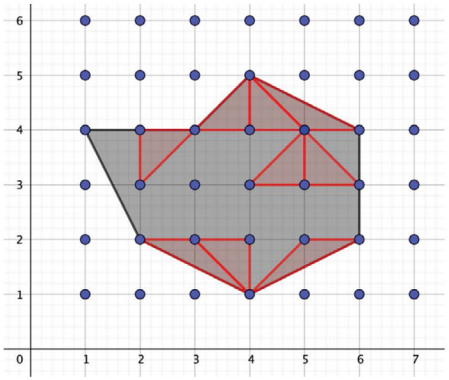


Figura 13.3.7.2

Teorema 13.3.7.1 (Teorema de Pick[8]): A área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma malha quadriculada é dada pela fórmula

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

Em que B é o número de pontos (de coordenadas inteiras) da malha quadriculada, situados sobre o contorno (borda) do polígono e I é o número de pontos (de coordenadas inteiras) da malha quadriculada, situados no interior do polígono.

Demonstração: Seja um polígono dividido em n triângulos fundamentais. A soma de todos os ângulos desses triângulos fundamentais é $S = n.180°$. Nomeando B' como o número de vértices desse polígono e B'' o número de pontos da rede que também estão sobre o bordo mas que não são vértices, temos: $B = B' + B''$.

[7] Caso o leitor não esteja convencido de tal afirmação, na fonte (LIMA, 1991) há uma demonstração completa de todos os lemas e corolários que permeiam o teorema de Pick.
[8] O nome desse teorema é em homenagem ao seu elaborador Georg Alexander Pick (1859-1942).

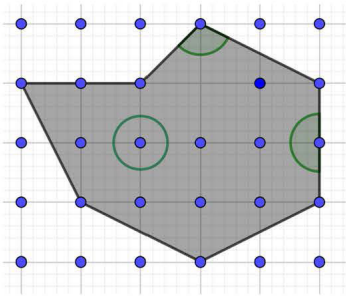
A soma de todos os ângulos internos, formado somente nos vértices é $(B'-2).180°$ (soma dos ângulos internos de um polígono) e a soma de todos os ângulos formados nos pontos do bordo que não são vértices é $B''.180°$ (ângulo raso – ver figura). Portanto, a soma S_{borda} dos ângulos internos que estão sobre a borda é

$$S_{borda} = (B'-2).180° + B''.180° = \underbrace{(B'+B'')}_{B}.180° - 2'.180° \Rightarrow$$

$$\boxed{S_{borda} = (B-2).180°}.$$

Por outro lado, a soma de todos os ângulos internos dos pontos internos ao polígono (ver figura) é dado por

$$S_{internos} = I.360°$$



Assim,

$$S = n.180° = S_{borda} + S_{internos}$$
$$n.180° = (B-2).180° + I.360°$$
$$n.180° = B.180° - 360° + I.360°$$
$$\boxed{n = B - 2 + 2I}.$$

Como n é a quantidade de triângulos fundamentais de área 1/2 que formam o polígono, então a área desse polígono é

$$A = \frac{n}{2} = \frac{B}{2} + I - 1.$$

Demonstrando o teorema.

O teorema de Pick tem excelente aplicação quando é possível (desenhar e) contar os pontos internos e os pontos sobre a borda de um polígono em uma malha quadriculada. Porém, só deve ser utilizado em polígonos de vértices inteiros.

Vamos refazer os últimos dois exemplos, utilizando agora o teorema de Pick.

Exemplo: Calcular a área do pentágono que está na figura.

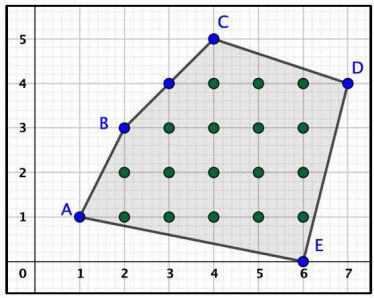
Solução: Conferindo os pontos de coordenadas inteiras na borda (de azul), temos: B = 6.

Conferindo os pontos internos de coordenadas inteiras (de verde), temos: I = 17.

Pelo teorema de Pick, encontramos

$$A = \frac{B}{2} + I - 1 \Rightarrow A = \frac{6}{2} + 17 - 1 \Rightarrow \boxed{A = 19\ u.a}.$$

Compare com o resultado anterior.



2º exemplo: Vamos calcular a área do paralelogramo a seguir.

Solução:

Conferindo os pontos de coordenadas inteiras na borda (de azul), temos: B = 6.

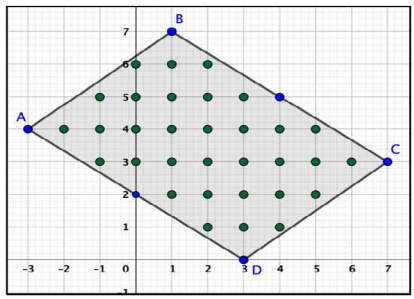
Conferindo os pontos internos de coordenadas inteiras (de verde), temos: I = 32.

Aplicando o teorema de Pick, encontramos

$$A = \frac{B}{2} + I - 1$$

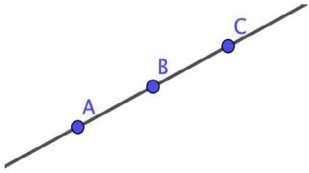
$$A = \frac{6}{2} + 32 - 1 \Rightarrow \boxed{A = 34\ u.a}.$$

Compare com o resultado anterior.



13.3.8. Pontos colineares

Dizemos que três pontos são colineares quando pertencem à uma mesma reta. É imediato que neste caso, os vetores formados pelos pontos dois a dois, são múltiplos, ou ainda que a área do triângulo com vértices nesse pontos, é nula.



Exemplo: Calcule o valor de b para que os pontos A(2,-2), B(b,0) e C(10,2) sejam colineares.

Solução: Se os três pontos são colineares, então $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{BC}$ (os vetores são múltiplos).

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b,0) - (2,-2) = (b-2,2)$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (10,2) - (b,0) = (10-b,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{BC} \Rightarrow (b-2,2) = k.(10-b,2) \Rightarrow$$

$$(b-2,2) = (10k-b,2k) \Rightarrow \begin{cases} b-2 = 10k-b & (1) \\ 2 = 2k & (2) \end{cases}.$$

De (2): $k = \frac{2}{2} = 1$, substituindo em (1), encontramos

$$b-2 = 10.1 - b \Rightarrow 2b = 10+2 \Rightarrow b = \frac{12}{2} \Rightarrow \boxed{b = 6}.$$

Outra solução: Se os pontos são colineares então a área entre os três pontos é nula, então

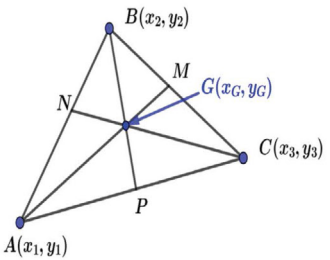
$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_A & x_B & x_C & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_A \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & b & 10 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}(0+2b-20-(-2b+0+4)\right| = \frac{1}{2}(4b-24) = 0 \Rightarrow b = \frac{24}{4} \Rightarrow \boxed{b = 6}.$$

13.3.9. Baricentro de um triângulo

O ponto G denominado de baricentro de um triângulo é o ponto de encontro das três medianas desse triângulo.

Considere um triângulo qualquer de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$, baricentro $G(x_G, y_G)$ e medianas[9] $\overline{AM}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CN}$, sabendo que o ponto G divide qualquer mediana em uma razão 2:1 (essa demonstração será exigida nos exercícios), temos



$$\overrightarrow{AG} = 2.\overrightarrow{GM}$$

$$(x_G - x_1, y_G - y_1) = 2.(x_M - x_G, y_M - y_G)$$

$$(x_G - x_1, y_G - y_1) = 2.(\tfrac{x_2+x_3}{2} - x_G, \tfrac{y_2+y_3}{2} - y_G)$$

$$x_G - x_1 = x_2 + x_3 - 2.x_G \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}}.$$

$$y_G - y_1 = y_2 + y_3 - 2.y_G \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{y_1 + y_2 + yx_3}{3}}.$$

$$G(x_G, y_G) \Rightarrow x_G = \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

1º exemplo: Vamos calcular o baricentro do triângulo formado pelos vértices A(-11, -5), B(12, 3) e C(11, 8).

Solução:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-11 + 12 + 11}{3} = \frac{12}{3} = 4.$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{-5 + 3 + 8}{3} = \frac{6}{3} = 2. \textit{Resposta: } \boxed{G(4,2)}.$$

2º exemplo: Calcule o baricentro do triângulo formado pelos vértices A(-2, 5), B(-4, 3) e C(8, 7), bem como, a medida da suas três medianas.

Solução:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-2 - 4 + 8}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{5 + 3 + 7}{3} = \frac{15}{3} = 5. \Rightarrow \boxed{G\,(\frac{2}{3}, 5)}.$$

As medianas são as distâncias de cada vértice ao ponto médio do lado oposto do triângulo. No triângulo a seguir, são os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CE}$.

[9] Mediana é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto do médio do lado oposto (conforme definição 10.2.4).

Cálculo do ponto médio E:

$$x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = 3.$$

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Cálculo do ponto médio D:

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{7+3}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

Cálculo do ponto médio F:

$$x_F = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{8-2}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$y_F = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Mediana $\overline{CE}$:

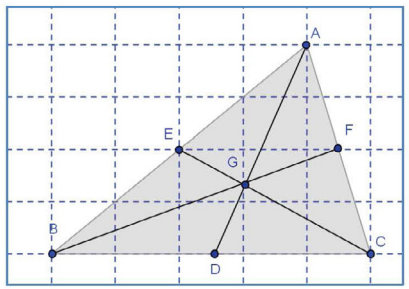
$$\overline{CE} = \sqrt{(x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2}$$

$$\overline{CE} = \sqrt{(8-(-3))^2 + (7-4)^2}$$

$$\overline{CE} = \sqrt{(11)^2 + (3)^2}$$

$$\overline{CE} = \sqrt{121 + 9}$$

$$\boxed{\overline{CE} = \sqrt{130}}.$$



Mediana $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-5)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{16}$$

$$\boxed{\overline{AD} = 4}.$$

Mediana $\overline{BF}$:

$$\overline{BF} = \sqrt{(x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2}$$

$$\overline{BF} = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-6)^2}$$

$$\overline{BF} = \sqrt{(-7)^2 + (3)^2}$$

$$\overline{BF} = \sqrt{49 + 9}$$

$$\boxed{\overline{BF} = \sqrt{58}}.$$

EXERCÍCIOS 13.5

1) Mostre que o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro e o seu valor é a metade desse terceiro lado.

2) Mostre que a soma de vetores cujos representantes formam um polígono fechado é nula.

3)Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

4)Seja um triângulo ABC qualquer de baricentro no ponto G. Mostre que o ponto G divide qualquer mediana na razão de 2:1. Por exemplo, seja M o ponto médio do lado BC, mostre que AG =2.GM.

5)Determine as coordenadas dos dois pontos que divide um segmento de reta AB em três partes iguais, sabendo que A = (1,3) e B=(-2, -3).

6) Se A = (2,-5) e B = (5,-2) são vértices consecutivos de um quadrado, calcule os dois outros possíveis vértices e sua área.

7) Transladando o vértice A = (2,-5) do quadrado da questão anterior para a origem do sistema, calcule as coordenadas dos outros pontos.

8)Calcule a área e as coordenadas do baricentro dos triângulos formado pelos vértices:

a) A (7,5), B(8,1) e C(2,3)
b) A (-2,-1), B(5,-3) e C(-3,-7)
c) A (-11,-3), B(-16,-8) e C(14,-6)

9)Calcule o baricentro e as medidas das medianas de um triângulo de vértices A = (1, 1), B = (3, 11) e C = (17, 3).

10)Calcule a área dos polígonos formado pelos vértices:

a) A (-4,6), B(-2,2), C(4,0) e D(8,4)
b) A (-7,12), B(-12,9), C(-8,3) e D(-2,7)
c) A (-8,6), B(-6,-4), C(2,-6), D(8,-2) e E(4,8)
d) A (2,2), B(4,6), C(8,10), D(12,12), E(16,8) F(14,4) G(10,2) e H(6,0)

11)Use o teorema de Pick para encontrar a área do polígono formado pelos vértices:

a) A (1,1), B(3,4) e C(5,3)
b) A (-2,2), B(2,5), C(8,-1) e D(4,-2)
c) A (-2,-2), B(-1,0), C(1, 1), D(3,0), E(4,-2), F(2,-3) e G(0,-3).

12)Explique porque o teorema de Pick não se aplica ao triângulo de vértices A (0,0), B(2,3) e C(3, $\frac{3}{2}$).

13)Um paralelogramo possui vértices A(2,4), B(-2,6) e C(10,12). Calcule o quarto vértice e área desse paralelogramo.

14)Qual o valor de k, para que os pontos (-3, 2), (3, 0) e (k, -1) sejam colineares?

15)Qual o valor de k, para que os pontos (-2, 7), (0, 2) e (k, -8) sejam colineares?

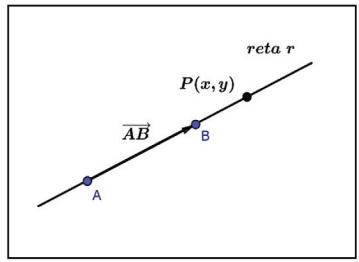
16) Para calcular a área de uma fazenda um topográfico usou um aplicativo de smartphone para cálculo de área através do GPS. Sabendo que o terreno é poligonal e os vértices acusados pelo aplicativo foram (-250,0), (0,200), (250,100) e (200,50). Qual a área da fazenda acusada no aplicativo? Explique porque, neste caso, o teorema de Pick é aplicável, mas inviável.

13.4. Retas no plano

No decorrer desta seção, vamos relembrar métodos e aplicar outros que possibilitem encontrar a equação de uma reta.

Começaremos com um método usando vetores.

Se uma reta passa pelos pontos A, B e um ponto genérico $P\ (x, y)$, então ela tem mesma direção do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{AP}$ é múltiplo de $\overrightarrow{AB}$. Ver figura ao lado.



Assim,

$$\overrightarrow{AP} = t.\overrightarrow{AB}.$$

Denominando $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, temos: $P - A = t.\vec{v}$.

$$P = A + t.\vec{v}$$

Essa é a **equação vetorial ou paramétrica de uma reta**.

O vetor $\vec{v}$ é chamado vetor diretor da reta e t é o parâmetro (variável) da equação. Sendo $P = (x, y)$, $A = (x_A, y_A)$ e $\vec{v} = (a, b)$, podemos escrever:

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t.(a, b)$$

Exemplo: Vamos calcular a equação paramétrica da reta que passa pelos pontos $A(2, 3)$ e $B(4, 4)$.

Solução: $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,4) - (2,3) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (2,1)} \Rightarrow$vetor diretor.

$$(x, y) = (x_A, y_A) + t.(a, b)$$

$$\boxed{(x, y) = (2,3) + t.(2,1)}.$$

Para encontrar qualquer ponto pertencente a essa reta basta escolher um valor para o parâmetro t. Exemplos:

$t = 0 \Rightarrow (2,3) + 0.(2,1) = (2,3)$

$t = 1 \Rightarrow (2,3) + 1.(2,1) = (4,4)$

$t = -2 \Rightarrow (2,3) - 2.(2,1) = (0,1)$

$t = 100 \Rightarrow (2,3) + 100.(2,1) = (202,103)$

Todos esses pontos pertencem à reta.

O ponto da equação vetorial de uma reta pode ser tanto o ponto inicial quanto o ponto final do vetor diretor. Nesse exemplo, podemos escrever também:

$$(x, y) = (4,4) + t.(2,1).$$

Além disso, podemos utilizar o vetor diretor $\overrightarrow{BA}$ em vez de $\overrightarrow{AB}$. Isto é:

$$(x, y) = (4,4) + t.(-2,-1).$$

Em todos os casos, a equação vetorial representará a mesma reta.

Podemos também, isolar o parâmetro t da equação paramétrica e encontrar a equação reduzida e a equação geral.

Equação reduzida: É o nome da equação da reta escrita na forma $y = mx + n$, onde m é o ceficiente angular e n o coeficiente linear da reta.

Equação geral: É o nome da equação da reta escrita na forma $ax + by + c = 0$, onde a, b e c são denominados apenas de coeficientes.

No exemplo anterior, a partir da equação paramétrica $(x,y) = (4,4) + t.(2,1)$, temos as seguintes equações:

$$(x,y) = (4,4) + (2t,t) \Rightarrow (x,y) = (4+2t, 4+t) \Rightarrow \begin{cases} x = 4+2t & (1) \\ y = 4+t & (2) \end{cases}$$

De (2), temos que $y = 4 + t \Rightarrow t = y - 4$. Substituindo em (1), encontramos

$$x = 4 + 2t \Rightarrow x = 4 + 2(y-4) \Rightarrow x = 4 + 2y - 8 \Rightarrow x = 2y - 4.$$

Equação geral: $\boxed{x - 2y + 4 = 0}$.

Isolando y encontramos a equação reduzida: $\boxed{y = \frac{x}{2} + 2}$.

Outro método para calcular a equação de uma reta a partir de dois pontos (A e B), foi utilizado na unidade 6 - sobre função afim (volume 1). O método lá abordado é justificado pela área nula entre três pontos colineares, sendo um deles (x, y) e os outros dois, os pontos dados. Da seguinte maneira:

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & x_A & x_A & x \\ y & y_B & y_B & y \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} x & x_A & x_A & x \\ y & y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0}$$

Aplicando esse método no exemplo anterior, temos para A (2,3) e B(4,4):

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & x \\ y & 3 & 4 & y \end{vmatrix} = 0$$

$2y \quad 12 \quad 4x \quad 3x \quad 8 \quad 4y$

$$3x + 8 + 4y = 2y + 12 + 4x \Rightarrow 3x + 8 + 4y - 2y - 12 - 4x = 0 \Rightarrow \boxed{-x + 2y - 4 = 0}.$$

Equação geral: $\boxed{-x + 2y - 4 = 0}$ e a equação reduzida: $\boxed{y = \frac{x}{2} + 2}$.

2º exemplo: Calcular a equação paramétrica, geral e reduzida da reta que passa pelos pontos C(-101,-100) e D(-102,-99).

Solução:

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-101,-100) - (-102,-99) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (1,-1)} \Rightarrow$vetor diretor.

$$(x,y) = (x_C, y_C) + t.(a,b)$$

$$\boxed{(x,y) = (-101,-100) + t.(1,-1)}.$$

$$\begin{vmatrix} x & -101 & -102 & x \\ y & -100 & -99 & y \end{vmatrix} = 0$$

$-101y \quad 10200 \quad -99x \quad -100x \quad 9999 \quad -102y.$

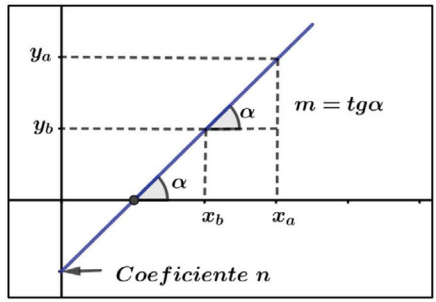
$$-101y + 10200 - 99x = -100x + 9999 - 102y \Rightarrow \boxed{x + y + 201 = 0}.$$

Equação geral: $\boxed{x + y + 201 = 0}$ e a equação reduzida: $\boxed{y = -x - 201}$.

13.4.1. Coeficiente angular de uma reta

O coeficiente angular m de uma reta é dada de forma imediata pela equação reduzida $y = mx + n$. Usando dois pontos A e B dessa reta e resolvendo o sistema encontramos

$$\boxed{m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.}$$



Essa expressão é equivalente a

$$tg\alpha = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}.$$

Assim,

- O coeficiente angular m é a tangente do ângulo entre a reta e o eixo x:

$$\boxed{m = tg\alpha}.$$

- A reta intersecta o eixo y no coeficiente n.

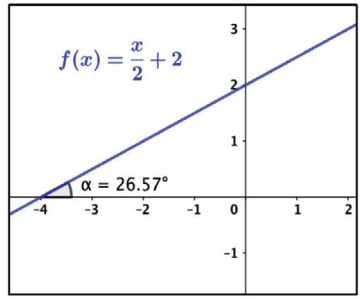
Com efeito, se $y = mx + n$ para $x = 0 \Rightarrow y = n$.

No exemplo anterior, temos

$$y = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha \cong 26{,}57°}.$$

E como $\boxed{n = 2}$, a reta intersecta o eixo y no ponto $(0, 2)$. Ver figura ao lado.



Exemplo: Calcular a equação paramétrica, geral e reduzida da reta que passa pelos pontos $A(-3,4)$ e $B(0,1)$ e o ângulo entre a reta e o eixo x.

Solução: $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,1) - (-3,4) = \boxed{\vec{v} = (3,-3)}$ vetor diretor.

$(x,y) = (x_A, y_A) + t.(a,b) \Rightarrow \boxed{(x,y) = (-3,4) + t.(3,-3)}$.

$(x,y) = (-3 + 3t, 4 - 3t)$.

Equação paramétrica: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 4 - 3t \end{cases}$

Somando as duas equações: $x + y = 1$.

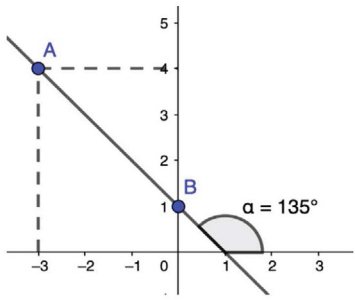
Equação geral: $\boxed{x - y - 1 = 0}$.

Equação reduzida: $\boxed{y = -x + 1}$.

O ângulo entre a reta e o eixo x é:

$tg\alpha = m \Rightarrow tg\alpha = -1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 135°}$.

Veja o gráfico da reta e o ângulo na figura ao lado.



13.4.2. Posição relativa de retas

Nesta subseção, verificar-se-á as condições pelas quais duas retas são perpendiculares, paralelas, coincidentes ou somente concorrentes.

Teorema 13.4.2.1: Duas retas r e s **são perpendiculares** e indicamos por $r \perp s$ se, e somente se, o produto escalar de seus vetores diretores $\vec{u} = (x_r, y_r)$ e $\vec{v} = (x_s, y_s)$ for zero.

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow (x_r, y_r).(x_s, y_s) = 0} \quad (1).$$

Esse teorema é uma consequência do teorema 13.3.2.4 já demonstrado.

Esse teorema é indicado para equações de retas na forma paramétrica .

Exemplo: As retas $r: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$ são perpendiculares, pois:

$\vec{u} = (2,3)$, $\vec{v} = (3,-2)$ e $\vec{u}.\vec{v} = (2,3).(3,(-2) = 6 - 6 = 0.$

Continuando o desenvolvimento de (1), dispomos de:

$$x_r.x_s + y_r.y_s = 0 \Leftrightarrow x_r.x_s = -y_r.y_s \Leftrightarrow -1 = \frac{y_r}{x_r}.\frac{y_s}{x_s}.$$

Como: $tg\theta_r = \frac{y_r}{x_r} = m_r$ e $tg\theta_s = \frac{y_s}{x_s} = m_s$, então $\boxed{m_r.m_s = -1}$.

Esses passos demonstram o teorema a seguir.

Teorema 13.4.2.2: Duas retas r e s **são perpendiculares** se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares for igual a -1.

Esse teorema é ideal para retas com equações na forma reduzida.

Exemplo: As retas $r: y = 2x + 1$ e $s: y = -\frac{1}{2}x + 1$ são perpendiculares, pois

$m_r = 2$ e $m_s = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_r.m_s = -1.$

Agora, vamos a uma interessante relação entre os coeficientes da equação geral de uma reta e o seu vetor diretor.

Se $\vec{u} = (x_t, y_t)$ é o vetor diretor de uma reta, então o seu ângulo de direção será dado por $tg\theta = \frac{y_t}{x_t} = m$. Substituindo na equação reduzida, obtemos

$$y = mx + n \Rightarrow y = \frac{y_t}{x_t}x + n$$

$$x_t y = y_t x + x_t.n \Rightarrow \boxed{-y_t x + x_t y - x_t.n = 0}.$$

Como a equação geral é na forma $ax + by + c = 0$, isso implica que

$$\boxed{a = -y_t} \text{ e } \boxed{b = x_t}.$$

Por outro lado, seja um vetor por $\vec{n} = (a, b)$ formado pelos os dois primeiros coeficientes da equação geral da reta. Então

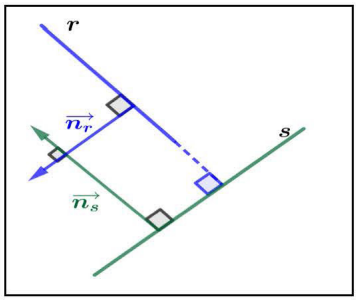
$$\vec{u}.\vec{n} = (x_t, y_t).(a, b) \Rightarrow \vec{u}.\vec{n} = (x_t, y_t).(-y_t, x_t)$$

$$\vec{u}.\vec{n} = -x_t.y_t + y_t.x_t = 0 \Rightarrow \vec{u} \text{ e } \vec{n} \text{ são perpendiculares.}$$

Denominamos o vetor $\vec{n} = (a, b)$ de **vetor normal** à reta, isto é, perpendicular à reta $ax + by + c = 0$.

Diante do exposto, temos em mãos mais uma ferramenta para saber se duas retas são ou não perpendiculares a partir da equação geral de cada uma reta, ratificada pelo teorema a seguir.

Teorema 13.4.2.3: Duas retas $\boxed{r: a_r x + b_r y + c_r = 0}$ e $\boxed{s: a_s x + b_s y + c_s = 0}$ de vetores normais $\overrightarrow{n_r} = (a_r, b_r)$ e $\overrightarrow{n_s} = (a_s, b_s)$ respectivamente, são perpendiculares se, e somente se, $\overrightarrow{n_r}.\overrightarrow{n_s} = \mathbf{0}$.



Demonstração:

$$\overrightarrow{n_r}.\overrightarrow{n_s} = 0 \Leftrightarrow (a_r, b_r).(a_s, b_s) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_r.a_s + b_r.b_s = 0 \Leftrightarrow a_r.a_s = -b_r.b_s \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{\left(\frac{-b_r}{a_r}\right)}_{m_r}.\underbrace{\left(\frac{-b_s}{a_s}\right)}_{m_s} = -1 \Leftrightarrow \boxed{m_r.m_s = -1}.$$

A figura ao lado ilustra melhor esse teorema.

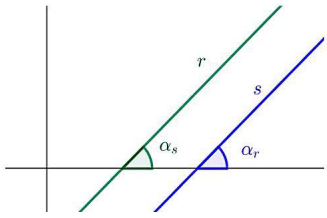
Exemplo: Qual a posição relativa das retas $2x - y - 2 = 0$ e $-x - 2y + 11 = 0$?

Solução: $\overrightarrow{n_r} = (2, -1)$ e $\overrightarrow{n_s} = (-1, 2)$.

$\overrightarrow{n_r}.\overrightarrow{n_s} = (2, -1).(-1, 2) \Rightarrow \overrightarrow{n_r}.\overrightarrow{n_s} = -2 + 2 = 0 \Rightarrow r$ e s são perpendiculares.

Teorema 13.4.2.4: Duas retas $\boxed{r: a_r x + b_r y + c_r = 0}$ e $\boxed{s: a_s x + b_s y + c_s = 0}$ de vetores normais $\overrightarrow{n_r} = (a_r, b_r)$ e $\overrightarrow{n_s} = (a_s, b_s)$, respectivamente, **são paralelas** e indicamos por $r \,//\, s$ se, e somente se, $\overrightarrow{n_r} = k.\overrightarrow{n_s}$ (vetores múltiplos) e $c_r \neq k.c_s$. Caso $c_r = k.c_s$, as retas serão **coincidentes** e indicamos por $r = s$.

Demonstração: Duas retas r e r são paralelas quando o ângulo entre as retas e o eixo x são congruentes (ver figura).



O que implica em

$$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow tg\alpha_r = tg\alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s.$$

Se as equações reduzidas forem $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, então para retas não coincidentes é necessário que $n_r \neq n_s$.

No caso das equações gerais $r: a_r x + b_r y + c_r = 0$ e $s: a_s x + b_s y + c_s = 0$, se os vetores normais $\overrightarrow{n_r} = (a_r, b_r)$ e $\overrightarrow{n_s} = (a_s, b_s)$ forem múltiplos, temos:

$$\overrightarrow{n_r} = k.\overrightarrow{n_s} \Leftrightarrow (a_r, b_r) = k.(a_s, b_s) \Leftrightarrow k = \frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s}.$$

O que implica em:

$$\frac{-a_r}{b_r} = \frac{-b_s}{a_s} \Leftrightarrow m_r = m_s.$$

E nesse caso, se $c_r = k.c_s$, haverá multiplicidade nas equações gerais e as retas serão coincidentes, caso contrário ($c_r \neq k.c_s$) serão paralelas.

Por consequência, caso as equações de cada reta estiver na forma paramétrica, temos:

- Vetores diretores múltiplos e nenhum ponto em comum: **retas paralelas**.
- Vetores diretores múltiplos e um ponto em comum: **retas coincidentes**.

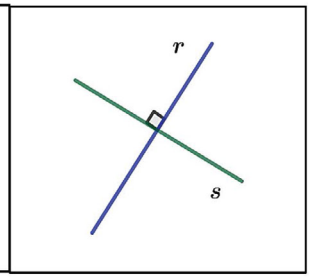
A demonstração para esse caso fica a cargo do leitor.

Retas concorrentes: Duas retas são apenas **concorrentes** (r x s) e não perpendiculares, se nenhum dos casos anteriores for identificado.

A seguir está um resumo de todas as informações sobre a posição relativa de retas.

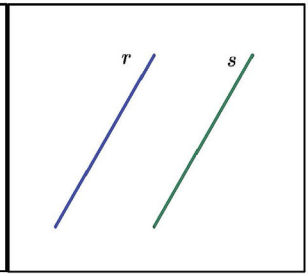
Perpendiculares r ⊥ s

- Equação reduzida: Se o produto dos coeficientes angulares for igual a -1;
- Equação geral: Se os vetores normais às retas forem perpendiculares;
- Equação paramétrica: Se os vetores diretores forem perpendiculares (produto escalar igual a zero).



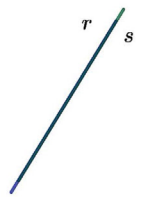
Paralelas r // s

- Equação reduzida: Se os coeficientes angulares forem iguais e os coeficientes lineares diferentes;
- Equação geral: Se os vetores normais às retas forem múltiplos e os coeficientes c de cada reta terem multiplicidade diferente das dos vetores diretores;
- Equação paramétrica: Se os vetores diretores forem múltiplos entre si e as retas não terem ponto em comum.



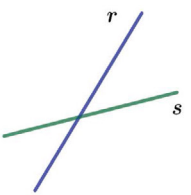
Coincidentes r = s

- Equação reduzida: Se os coeficientes angulares forem iguais e os coeficientes lineares também;
- Equação geral: Se os vetores normais às retas forem múltiplos e os coeficientes c de cada reta terem mesma multiplicidade das dos vetores diretores;
- Equação paramétrica: Se os vetores diretores forem múltiplos entre si e as retas terem um ponto em comum.



Concorrentes e não perpendiculares r x s

- Na equação reduzida: Se os coeficientes angulares forem diferentes e o produto entre eles for diferente de -1;
- Na equação geral: Se os vetores normais às retas forem não múltiplos e não perpendiculares;
- Equação paramétrica: Se os vetores diretores não forem múltiplos entre si e não perpendiculares.



Exemplo: Verifique a posição relativa das retas abaixo (se são perpendiculares, paralelas, coincidentes ou somente concorrentes - não perpendiculares).

a) $\begin{cases} r: y = -2x + 5 \\ s: y = -2x + 1 \end{cases} \Rightarrow m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$. O que significa que são **paralelas**.

b) $\begin{cases} r: 3x - y - 7 = 0 \\ s: 6x - 2y + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_r} = (3,-1) \\ \overrightarrow{n_s} = (6,-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{n_s} = 2.\overrightarrow{n_r}$ e as equações não são proporcionais. Logo, as retas são **paralelas**.

c) $\begin{cases} r: 2x - y - 2 = 0 \\ s: 6x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Dividindo s por 3 $\Rightarrow \begin{cases} r: 2x - y - 2 = 0 \\ s: 2x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ **Coincidentes.**
(Observe que as equação são proporcionais).

d) $\begin{cases} r: -x + y + 1 = 0 \\ s: x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m_r = 1}\ e\ \boxed{m_s = -1} \Rightarrow m_r \neq m_s \Rightarrow$ Não são paralelas.
Porém, $m_r . m_s = -1$. As retas são, portanto, **perpendiculares**.

e) $\begin{cases} r: -2x + 5y + 7 = 0 \\ s: 3x + y - 5 = 0. \end{cases} \Rightarrow \boxed{m_r = 2/5}\ e\ \boxed{m_s = -3} \Rightarrow m_r \neq m_s.$
As retas não são paralelas. E além disso, $m_r . m_s \neq -1$. Essas retas são, portanto, **concorrentes e não perpendiculares**.

Podemos aplicar também o conceito de vetor normal na transformação de equação de uma reta da forma geral para a forma paramétrica. Inicialmente, é necessário calcular um vetor perpendicular ao vetor normal, sugerimos a inversão dos componentes e a troca de sinal. Em outras palavras, se $\vec{n} = (a, b)$, então $\vec{v} = (-b, a)$ ou $\vec{v} = (b, -a)$. Em seguida, podemos escolher qualquer ponto inicial pertencente à reta, atribuindo valores arbitrários para x ou y. Recomendamos também a opção $x = 0$ ou $y = 0$.

Exemplo: Vamos transformar a equação da reta $x - 2y - 4 = 0$ em uma equação paramétrica.

Solução:

$\vec{n} = (a, b) = (1, -2) \Rightarrow \vec{v} = (2, 1)$ (observe que trocou-se a por b e o sinal de b)

$x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow P(0, -2)$

$(x, y) = P + t.\vec{v} \Rightarrow \boxed{(x, y) = (0, -2) + t.(2,1)}$.

Outra solução: Escolher dois pontos quaisquer da reta.

Para $x = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow P(0, -2)$.

Para $x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow Q(2, -1)$.

$\overrightarrow{PQ} = (2 - 0, -1 - (-2)) = (2, 1)$.

$(x, y) = P + t.\vec{v} \Rightarrow \boxed{(x, y) = (0, -2) + t.(2,1)}$.

EXERCÍCIOS 13.6

1)Calcule a equação paramétrica, reduzida e geral da reta que passa pelos pontos:

a) A(-2, 0) e B(-4, 10)

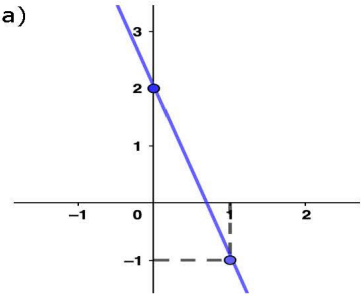
b) X(4, 4) e Y(0, 0)

c) C(0, -7) e D(5, 8)

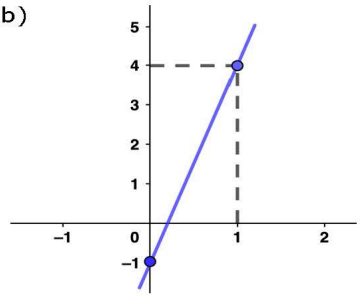
d) E(-3, 2) e F(6, -5)

2)Calcule a equação paramétrica, geral e reduzida da reta de cada gráfico:

a)



b)



3)Calcule a equação geral e reduzida a partir da equação paramétrica:

a) $(x, y) = (0,0) + t.(1,0)$

b) $(x, y) = (0, 2) + t.(-2, 0)$

c) $(x,y) = (-1,3) + t.(-2,-2)$

d) $(x,y) = (0,\frac{3}{4}) + t.(1,\frac{1}{2})$

4)Calcule a equação paramétrica a partir das equação a seguir.

a) $2x - y + 8 = 0$ c) $y = -2x$

b) $x + y + 1 = 0$ d) $y = 8x - 2$

5) Verifique a posição relativa das retas abaixo (se são perpendiculares, paralelas, coincidentes ou somente concorrentes e não perpendiculares):

a) $5x - 7y + 8 = 0$ *e* $10x - 14y + 16 = 0$

b) $-x - 2y + 1 = 0$ *e* $x - y - 1 = 0$

c) $11x - 22y + 121 = 0$ *e* $-2x - y + 16 = 0$

d) $y = 5x + 12$ *e* $10x - 2y + 8 = 0$

e) $x + y + 1 = 0$ *e* $2x + 2y + 2 = 0$

f) $y = 5$ *e* $x = 2$

6)Calcule o valor de m, para que as retas $y = mx + 8$ e $-4x + 2y - 19 = 0$, sejam:

a) Paralelas

b) Perpendiculares

13.4.3. Interseção de duas retas

As retas concorrentes possuem um ponto em comum e esse ponto satisfaz as duas equações concomitantemente. Dessa forma, para encontrá-lo, basta resolver um sistema de equações montado a partir das equação das retas.

Exemplo: Quais as coordenadas do ponto de interseção das retas $x - y - 4 = 0$ e $2x + y + 1 = 0$?

Solução: O sistema: $\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$.

Somando as duas equações membro a membro, temos

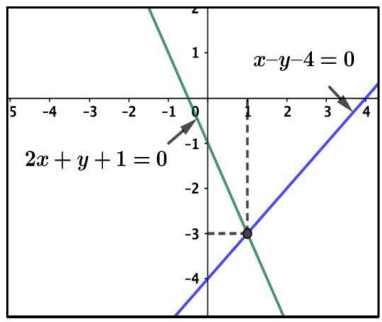
$$3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}.$$

Substituindo na 1ª equação, encontramos

$x - y - 4 = 0 \Rightarrow 1 - y - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{y = -3}$.

Resposta: (1,-3).

Veja na figura que de fato esse é o ponto de encontro das retas.



13.4.4. Equação da reta que passa por um ponto

Por um ponto passam infinitas retas. No entanto, dada uma segunda condição adicional, além desse ponto, essa reta passa a ser única.

Exemplo: Determine a equação da reta que passa por P(-2, 5) e é paralela à reta $6x - 2y + 8 = 0$.

Solução: $\vec{n} = (a, b) = (6, -2) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (2, 6)} \Rightarrow$ Vetor diretor da reta.

$\boxed{(x, y) = (-2, 5) + t.(2, 6)} \Rightarrow (x, y) = (-2 + 2t, 5 + 6t) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t & (1) \\ y = 5 + 6t & (2) \end{cases}$.

Isolando t em (1): $x = -2 + 2t \Rightarrow x + 2 = +2t \Rightarrow t = \frac{x+2}{2}$.

Substituindo em (2): $y = 5 + 6t \Rightarrow y = 5 + 6\left(\frac{x+2}{2}\right) \Rightarrow$

$$y = 5 + 3x + 6 \Rightarrow \boxed{-3x + y - 11 = 0} \Rightarrow \text{Equação geral.}$$

Outra solução: $6x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow -2y = -6x - 8 \Rightarrow y = 3x + 4 \Rightarrow \boxed{m = 3}$.

Como a reta que queremos é paralela à essa, então o seu coeficiente angular também é 3, ou seja, pode ser escrita como: $y = 3x + n$.

Substituindo o ponto: (-2, 5): $y = 3x + n \Rightarrow 5 = 3(-2) + n \Rightarrow n = 5 + 6 \Rightarrow \boxed{n = 11}$.

$$y = 3x + 11 \Rightarrow \boxed{-3x + y - 11 = 0} \Rightarrow \text{Equação geral.}$$

2º exemplo: Determine a equação da reta que passa por P(1, 1) e é perpendicular à reta $x - 2y + 4 = 0$

Solução:

$\vec{n} = (a, b) = (1, -2) \Rightarrow$ Vetor normal à reta (perpendicular).

$\boxed{(x, y) = (1,1) + t.(1, -2)} \Rightarrow (x, y) = (1 + t, 1 - 2t) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t & (1) \\ y = 1 - 2t & (2) \end{cases}$.

Somando a (2) o dobro de (1) membro a membro:

$$y + 2x = 3 \Rightarrow \boxed{2x + y - 3 = 0} \Rightarrow \text{Equação geral.}$$

Segunda solução: Inicialmente determinemos o coeficiente angular da reta.

$$x - 2y + 4 = 0 \Rightarrow -2y = -x - 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow \boxed{m_r = \frac{1}{2}}.$$

Como a reta que queremos é perpendicular à essa, então o seu coeficiente angular é:

$$m_r.m_s = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}.m_s = -1 \Rightarrow \boxed{m_s = -2}.$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = -2x + n.$$

Substituindo o ponto: (1,1), temos

$$y = -2x + n \Rightarrow 1 = -2.1 + n \Rightarrow n = 1 + 2 \Rightarrow \boxed{n = 3}$$

$$y = -2x + 3 \Rightarrow \boxed{2x + y - 3 = 0} \Rightarrow \text{Equação geral.}$$

EXERCÍCIOS 13.7

1)Quais as coordenadas do ponto de interseção das retas $2x - 5y - 13 = 0$ e $-2x + y + 9 = 0$?

2)Quais as coordenadas do ponto de interseção da reta $6x - 7y + 10 = 0$, com a bissetriz dos quadrantes ímpares?

3)Qual é a equação da reta que passa pelo ponto A(1,1) e é paralela à reta $y = -2x + 1$?

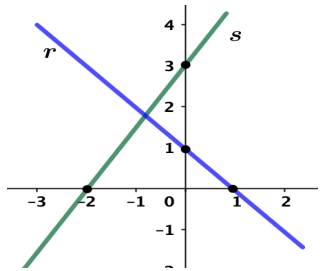
4)Determine a equação da reta que passa pelo ponto (-5,4) e é perpendicular à reta $2x - y + 7 = 0$.

5) Seja r a reta que passa pelos pontos (0,1) e (1,0). Calcule a equação da reta s que passa pelo ponto (1,2) e é perpendicular à reta r.

6)Qual a posição relativa das retas $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$ e $\frac{x}{7} = \frac{y}{3}$?

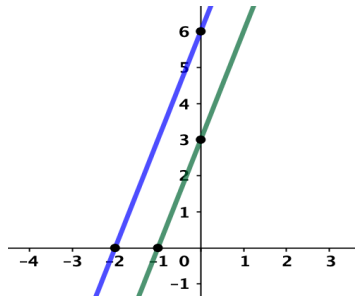
7) (V.UNIF.RS) As reta r e s da figura intersectam-se no ponto de ordenada:

a)$\frac{2}{3}$ b)$\frac{5}{3}$ c)$\frac{7}{4}$ d)$\frac{9}{5}$ e)$\frac{11}{6}$



8) Pode-se afirmar sobre o sistema de equações formado pelas equações das duas retas que estão na figura, que:

a) Não tem solução
b) Tem como solução o ponto (-100,-100).
c) Tem como solução o ponto (100,100).
d) Tem infinitas soluções.
e) Tem duas soluções.

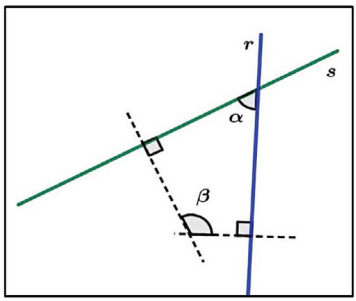


13.4.5. Ângulo entre retas

Vamos demonstrar duas fórmulas que podem ser utilizadas para cálculo de ângulo entre duas retas.

A primeira delas é utilizando o vetor normal de cada reta.

De acordo com a figura ao lado,



$$\beta + \alpha + 90° + 90° = 360° \ (quadrilátro)$$

$$\beta + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - \beta \Rightarrow$$

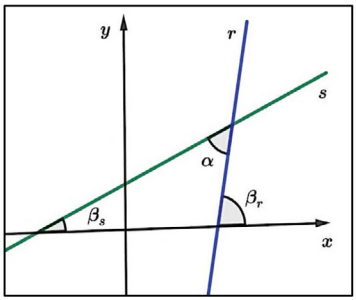
$$cos(180° - \beta) \Rightarrow \boxed{|cos\,\alpha| = |cos\,\beta|}$$

Como o ângulo entre vetores pode ser calculado a partir de $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha$, temos

$$|cos\alpha| = \frac{\overrightarrow{n_r}.\overrightarrow{n_s}}{|\overrightarrow{n_r}|.|\overrightarrow{n_s}|}.$$

Outra forma seria utilizando os coeficientes angulares de cada reta.

Pela figura ao lado, dispomos de



$$180° - \beta_r = 180° - \alpha - \beta_s \Rightarrow \beta_r = \alpha + \beta_s \Rightarrow$$

$$\alpha = \beta_r - \beta_s \Rightarrow tg\alpha = tg(\beta_r - \beta_s).$$

Da trigonometria, temos

$$tg\alpha = tg(\beta_r - \beta_s) = \left|\frac{tg\beta_r - tg\beta_s}{1 + tg\beta_r.tg\beta_s}\right|.$$

Como $tg\beta_r = m_r$ e $tg\beta_s = m_s$, concluímos que

$$tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r.m_s}\right|.$$

Exemplo: Qual o ângulo entre as duas retas $2x + 3y - 6 = 0$ e $5x + y = 0$?

Solução: $\overrightarrow{n_r} = (a, b) = (2,3) \Rightarrow$ Vetor normal à reta r (perpendicular).

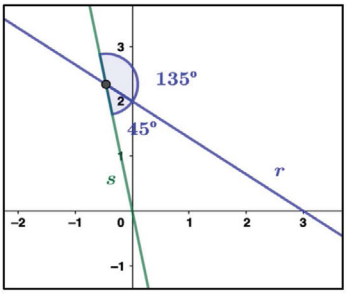
$\overrightarrow{n_s} = (a', b') = (5,1) \Rightarrow$ Vetor normal à reta s (perpendicular).

$$|\overrightarrow{n_r}| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$|\overrightarrow{n_s}| = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$$

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_r}.\overrightarrow{n_s}}{|\overrightarrow{n_r}|.|\overrightarrow{n_s}|} = \frac{(2,3).(5,1)}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} = \frac{10 + 3}{\sqrt{13}.\sqrt{26}} \Rightarrow$$

$$cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{13}.\sqrt{2}.\sqrt{13}} = \frac{13}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Assim, $\alpha = 45°$ é o menor ângulo e $\alpha = 135°$ o maior ângulo. Veja o gráfico na figura ao lado.

Segunda solução:

$$r: 2x + 3y - 6 = 0 \Rightarrow 3y = 6 - 2x \Rightarrow y = -\frac{2x}{3} + 2 \Rightarrow \boxed{m_r = -\frac{2}{3}}.$$

$$s: 5x + y = 0 \Rightarrow y = -5x \Rightarrow \boxed{m_s = -5}.$$

$$tg\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}\right| = \frac{-\frac{2}{3} - (-5)}{1 - \frac{2}{3}.(-5)} = \frac{\frac{13}{3}}{1 + \frac{10}{3}} = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{13}{3}} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = 1}.$$

Desse modo, $\alpha = 45°$ é o menor ângulo e $\alpha = 135°$ o maior ângulo.

2º exemplo: Calcule a equação das retas que formam um ângulo de 45º com a reta $x + 3y - 11 = 0$ e passam pelo (2, 1).

Solução:

$$r: x + 3y - 11 = 0 \Rightarrow 3y = -11 - x \Rightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{m_r = -\frac{1}{3}}.$$

$$tg45° = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}\right| \Rightarrow tg45° = \left|\frac{-\frac{1}{3} - m_s}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right).m_s}\right| \Rightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{-\frac{1}{3} - m_s}{1 - \frac{m_s}{3}} \quad (1º\ caso) \\ -1 = \dfrac{-\frac{1}{3} - m_{s'}}{1 - \frac{m_{s'}}{3}} \quad (2º\ caso) \end{cases}$$

$$\textbf{1º caso} \Rightarrow 1 = \frac{-\frac{1}{3} - m_s}{1 - \frac{m_s}{3}} \Rightarrow -\frac{1}{3} - m_s = 1 - \frac{m_s}{3} \Rightarrow$$

$$-1 - 3m_s = 3 - m_s \Rightarrow -2m_s = 4 \Rightarrow \boxed{m_s = -2}.$$

O que torna a equação da reta s na forma: $y = -2x + n$. Substituindo o ponto (2, 1), dispomos de

$$y = -2x + n \Rightarrow 1 = -2.2 + n \Rightarrow \boxed{n = 5} \Rightarrow \boxed{y = -2x + 5}\ reta\ s.$$

$$\textbf{2º caso} \Rightarrow -1 = \frac{-\frac{1}{3} - m_{s'}}{1 - \frac{m_{s'}}{3}} \Rightarrow -1 + \frac{m_{s'}}{3} = -\frac{1}{3} - m_{s'} \Rightarrow$$

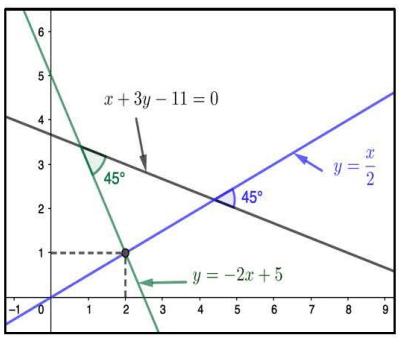
$$-3 + m_{s'} = -1 - 3m_{s'} \Rightarrow 4m_{s'} = 2 \Rightarrow \boxed{m_{s'} = \frac{1}{2}}.$$

A equação da reta s' é então: $y = \frac{1}{2}x + n'$. Substituindo o ponto (2, 1), temos

$$y = \frac{1}{2}x + n' \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}.2 + n' \Rightarrow \boxed{n = 0} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x}\ reta\ s''.$$

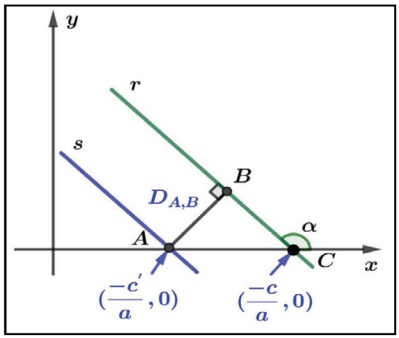
Veja no gráfico ao lado, que de fato as duas retas formam um ângulo de 45° com a reta $x + 3y - 11 = 0$ e ambas passam pelo ponto (2, 1).



13.4.6. Distância de um ponto a uma reta

Primeiramente vamos calcular a distância entre as duas retas paralelas $r: ax + by + c = 0$ e $s: ax + by + c' = 0$.

Considerando sem perda de generalidade duas retas paralelas decrescentes e suas interseções com o eixo x, conforme a figura a seguir. A distância de A a C é



$$D_{A,C} = \frac{-c - (-c')}{a} \Rightarrow \boxed{D_{A,C} = \frac{c' - c}{a}} \quad (1).$$

Quanto aos ângulos,

$$A\hat{C}B = 180° - \alpha \Rightarrow tg(A\hat{C}B) = tg(180° - \alpha) \Rightarrow$$

$$\boxed{tg(A\hat{C}B) = tg\alpha}.$$

Porém, segundo o triângulo ABC,

$$tg(A\hat{C}B) = \frac{D_{A,B}}{D_{B,C}}$$

Como $tg\alpha$ corresponde ao coeficiente angular da reta r, isto é, $tg\alpha = -\frac{a}{b}$. Isso nos dá

$$\frac{D_{A,B}}{D_{B,C}} = \frac{-a}{b} \Rightarrow \boxed{D_{B,C} = \frac{b.D_{A,B}}{-a}} \quad (2).$$

Por fim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC e substituindo (1) e (2), encontramos

$$(D_{A,B})^2 = (D_{A,C})^2 - (D_{B,C})^2 \Rightarrow (D_{A,B})^2 = \left(\frac{c' - c}{a}\right)^2 - \left(\frac{b.D_{A,B}}{-a}\right)^2$$

$$(D_{A,B})^2 = \frac{(c' - c)^2 - b^2(D_{A,B})^2}{a^2} \Rightarrow a^2(D_{A,B})^2 + b^2(D_{A,B})^2 = (c' - c)^2 \Rightarrow$$

$$(a^2 + b^2)(D_{A,B})^2 = (c' - c)^2 \Rightarrow \boxed{D_{AB} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}} (3).$$

Essa é a fórmula que calcula a distância entre duas retas paralelas.

Para calcular a distância de um ponto $X(x_0, y_0)$ à uma reta $r: ax + by + c = 0$, podemos pensar em X como um ponto pertencente a reta paralela $s: ax + by + c' = 0$, onde $c' = -ax_0 - bx_0$ e aplicar a equação (3), isto é

$$D_{X,r} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-ax_0 - bx_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

O que equivale a

$$\boxed{D_{X,r} = \frac{|ax_0 + bx_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$$

1º exemplo: Vamos calcular a distância entre as retas paralelas $r: x + y - 2 = 0$ e $s: x + y + 2 = 0$.

Solução:

$$D = \left|\frac{c' - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{-2-2}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{D = 2\sqrt{2}\ u.c}.$$

2º exemplo: Vamos calcular a distância do ponto X(1,1) à reta $-3x + 4y + 1 = 0$

Solução:

$$D_{X,r} = \left|\frac{-3.1 + 4.1 + 1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{9+16}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{25}}\right| \Rightarrow \boxed{D_{X,r} = \frac{2}{5}\ u.c}.$$

3º exemplo: Calcular a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo cujos vértices são A(0,0), B(-3,0) e C(6,8).

Solução: Calculemos a equação geral da reta $\overline{AC}$:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 6 & x \\ y & 0 & 8 & y \end{vmatrix} = 0$$

$0 \quad 0 \quad 8x \quad 0 \quad 0 \quad 6y$

$6y = 8x \Rightarrow -8x + 6y = 0$

$$D_{B,r} = \left|\frac{-8\,(-3) + 6.0}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2}}\right| = \left|\frac{24+0}{\sqrt{64+36}}\right| = \left|\frac{24}{\sqrt{100}}\right| = \frac{24}{10} \Rightarrow \boxed{D_{B,r} = 2{,}4\ u.c}.$$

A altura relativa ao lado $\overline{AC}$ mede 2,4 u.c.

Outra solução:

A área de um triângulo, de acordo com a geometria plana, pode ser dada por

$$A = \frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{2}.$$

Porém,

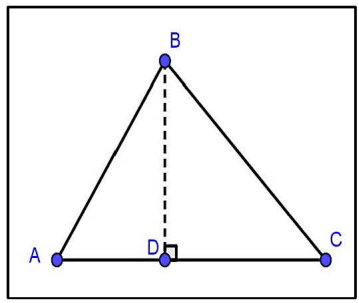
$\overline{AC} = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{36+64} = 10.$

E

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{bmatrix}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}\right|$$

$$A = \frac{1}{2}|-24| = |-12| \Rightarrow \boxed{A = 12\ u.a}.$$



Substituindo, encontramos

$$A = \frac{\overline{AC}.\overline{BD}}{2} \Rightarrow 12 = \frac{10.\overline{BD}}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{BD} = 2{,}4\ u.c}.$$

EXERCÍCIOS 13.8

1)Calcule o menor ângulo entre as retas:

a) $3x + 2y + 2 = 0$ e $-x + 2y + 5 = 0$

b) $3x - y - 7 = 0$ e $x - y - 9 = 0$

c) $3x - y - 1 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$

d) $3\sqrt{3}x - 9y + 3 = 0$ e $5\sqrt{3}x - 5y + 4 = 0$

2)Qual o ângulo entre as retas $x = -2$ e $x - \sqrt{3}y + 4 = 0$?

3)Calcule a equação das retas que formam um ângulo de 45º com a reta $6x + 2y + 5 = 0$ e passam pelo passam pelo $(-1, 0)$.

4)Qual a distância da reta $-12x + 5y + 1 = 0$ à origem?

5)Qual a distância de P(0,7) à reta $x + y + 1 = 0$?

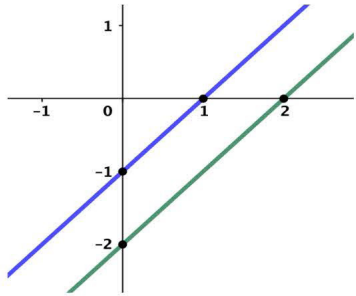
6)Qual a distância de P(-1,1) à reta $x = 5$?

7)Qual a distância entre as retas $7x + 24y - 1 = 0$ e $7x + 24y + 1 = 0$?

8)(UNIFOR-CE) A distância do ponto P(0,-4) à reta bissetriz dos quadrantes pares é:

a) $2\sqrt{3}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\sqrt{2}$

9)Calcule a distância entre as retas no gráfico:



10)Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ do triângulo cujos vértices são: A(0,-4), B(1,1) e C(6,4).

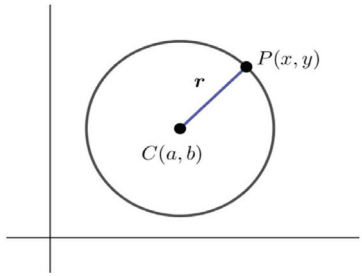
11)Calcule a equação das retas que distam $\frac{\sqrt{2}}{2}$ da reta $x + y - 1 = 0$ e são paralelas à ela.

12)Sejam as retas: $\begin{cases} r: x + y - 1 = 0 \\ s: 2x - y + 4 = 0 \\ t: 4x - y - 4 = 0 \end{cases}$. Se o ponto A é encontro das retas r e s, o ponto B é o encontro das retas r e t, e o ponto C é o encontro das retas s e t. Calcule a área do triângulo ABC e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

13.5. Circunferência

Nesta seção, iremos estudar a circunferência no plano cartesiano.

Vimos em geometria plana, que circunferência é o conjunto de todos os pontos de um plano que estão a uma mesma distância não nula de um ponto fixo, denominado centro. Cada segmento de reta que une o centro da circunferência a um de seus pontos é chamado raio(**r**).



Assim, considerando uma circunferência de centro $C(a,b)$ e raio r, temos, de acordo com a fórmula da distância entre dois pontos, a seguinte equação reduzida:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Ao desenvolver essa equação encontramos a equação geral:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

1º exemplo: Vamos calcular a equação reduzida e geral de uma circunferência de raio 2 e centro (2,-3).

Solução:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-(-3))^2 = 2^2$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4} \Rightarrow \text{(Equação reduzida).}$$

Desenvolvendo, temos

$$x^2 - 2x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 4 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0} \Rightarrow \text{(Equação geral).}$$

2º exemplo: Vamos calcular a equação reduzida e geral de uma circunferência de raio 5 e centro na origem.

Solução:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = 25} \Rightarrow \text{(Equação reduzida).}$$

Como não há o que desenvolver, $x^2 + y^2 = 25$ é também a equação geral.

13.5.1. Reconhecimento de equação de circunferência

Nesta subseção, estudar-se-á em quais situações uma equação proposta representa ou não a equação de uma circunferência.

Exemplo: Verifique qual(is) das equações abaixo representa a equação de uma circunferência.

a) $2x^2 + 2y^2 - 4 = 0$

Solução: Sim, trata-se da equação de uma circunferência, pois dividindo ambos os membros por 2, dispomos de: $x^2 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$. Comparando-a com a equação reduzida $x^2 + y^2 = r^2$, vemos que é uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro na origem.

b) $x^2 + 3y^2 - x - y - 1 = 0$

Solução: Não é equação de uma circunferência, pois segundo a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, os termos x^2 e y^2 precisam ter coeficientes iguais (mesmo multiplicando ou dividindo por qualquer número). Não é o caso.

c) $x^2 + y^2 + 2xy + 11x - y - 1 = 0$

Solução: Não, comparando-a com a equação geral, o termo xy não existe.

d) $3x^2 + 3y^2 + 12x - 6y + 15 = 0$

Solução:

Dividindo a equação por 3, temos: $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

Calculando o centro:

$$-2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$-2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Da equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, podemos extrair o valor do raio comparando o número 5 com a expressão $a^2 + b^2 - r^2$, esses precisam ser iguais. Assim:

$$a^2 + b^2 - r^2 = 5$$

Pondo os valores de a e b, dispomos de:

$$(-2)^2 + 1^2 - r^2 = 5 \Rightarrow 4 + 1 - r^2 = 5 \Rightarrow \boxed{r = 0}$$

Como o raio é zero, a equação não representa uma circunferência.

e) $2x^2 + 2y^2 - 4x - 6y - 1 = 0$

Solução:

Dividindo a equação por 2, temos: $x^2 + y^2 - 2x - 3y - \frac{1}{2} = 0$.

Calculando o centro,

$$-2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -1}.$$

$$-2b = -3 \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}.$$

A expressão $a^2 + b^2 - r^2$ da equação geral precisa ser igual ao termo $-\frac{1}{2}$. Logo

$$a^2 + b^2 - r^2 = -\frac{1}{2}.$$

Substituindo a e b, encontramos

$$(-1)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - r^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{9}{4} - r^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{13}{4} - r^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = -\frac{13}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{-13+2}{4} = \frac{-11}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{-11}{4}} \nexists \text{ em } \mathbb{R}.$$

Como não existe raio, a equação não representa uma circunferência.

f) $4x^2 + 4y^2 - 8x - 60 = 0$

Solução: Dividindo a equação por 4, temos: $x^2 + y^2 - 2x - 15 = 0$.

Calculando o centro,

$$-2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = 1}.$$

$$-2b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0.}$$

Como $a^2 + b^2 - r^2 = -15$, substituindo a e b, encontramos

$$1^2 + 0^2 - r^2 = -15 \Rightarrow -r^2 = -16 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = \sqrt{16} \Rightarrow \boxed{r = 4}.$$

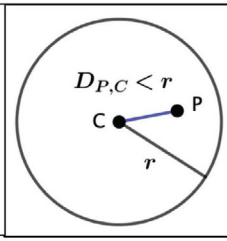
Trata-se de um circunferência de centro $(1, 0)$ e raio 4.

13.5.2. Posição relativa de ponto e circunferência

Há três casos a considerar:

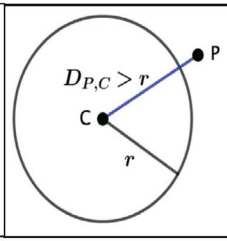
O ponto é interno à circunferência

Um ponto P é interno à uma circunferência, quando a distância desse ponto P ao centro C dessa circunferência é menor que o raio r. E claro, as coordenadas desse ponto não satisfaz a equação da circunferência.



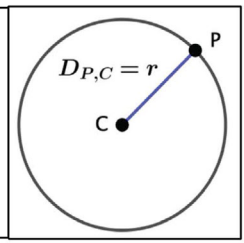
O ponto é externo à circunferência

Um ponto P é externo à uma circunferência, quando a distância desse ponto P ao centro C da circunferência é maior que o raio r. As coordenadas desse ponto também não satisfaz a equação da circunferência.



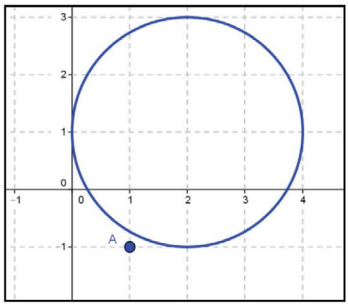
O ponto pertence à circunferência

É imediato que um ponto P qualquer pertencente a uma circunferência, satisfaz a sua equação e, evidentemente, a distância desse ponto P ao centro C dessa circunferência tem o mesmo valor do seu raio r.



Exemplo: Vamos verificar a posição relativa do ponto A(1,-1) em relação à circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

Solução: O centro da circunferência (2,1) e raio 2.



A distância do centro ao ponto A é:

$$D_{A,C} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$D_{A,C} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-1))^2}$$

$$D_{A,C} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4}$$

$$D_{A,C} = \sqrt{5} \cong 2{,}23.$$

Como a distancia é maior que o raio, o ponto exterior a circunferência. Veja a figura.

2º exemplo: Verificar a posição relativa do ponto A(2,-3) em relação a circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$.

Solução: Comparando-a com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, temos

$$-2a = -8 \Rightarrow \boxed{a = 4}.$$

$$-2b = 6 \Rightarrow \boxed{b = -3}.$$

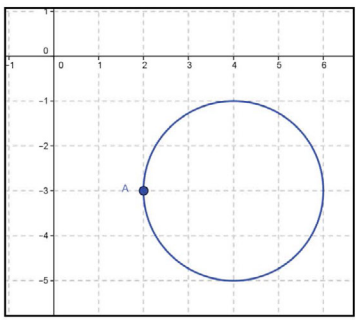
Como $a^2 + b^2 - r^2 = 21$, substituindo a e b, encontramos:

$$4^2 + (-3)^2 - r^2 = 21 \Rightarrow 16 + 9 - r^2 = 21 \Rightarrow r^2 = 25 - 21 \Rightarrow \boxed{r = 2}.$$

$$D_{A,C} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow$$

$$D_{A,C} = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{(2)^2 + 0)^2} \Rightarrow D_{A,C} = \sqrt{4} \Rightarrow D_{A,C} = 2.$$

Como $D_{A,C} = r$, o ponto pertence a circunferência.



Veja a figura ao lado e observe que de fato o ponto pertence à circunferência e satisfaz a sua equação.

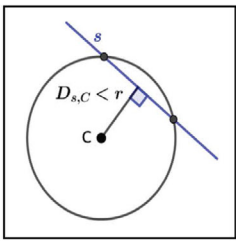
$$x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$$

$$2^2 + (-3)^2 - 8.2 + 6(-3) + 21 = 0$$

$$4 + 9 - 16 - 18 + 21 = 0 \Rightarrow \boxed{0 = 0}.$$

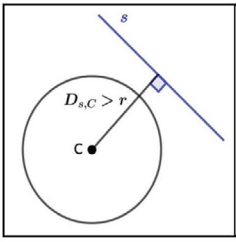
13.5.3. Posição relativa de reta e circunferência

Nesta subseção, iremos verificar as condicionantes para que uma reta seja secante, tangente ou exterior à uma circunferência. Veja os três casos:



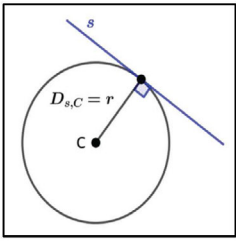
A reta é secante à circunferência

Nesse caso, a distância da reta s ao centro C da circunferência é menor que o raio r. Existem dois pontos de interseção que satisfazem a ambas equações, da reta e da circunferência.



A reta é exterior à circunferência

Nesse caso, a distância da reta s ao centro C da circunferência é maior que o raio r. Não existem pontos de interseção que satisfazem a ambas equações, da reta e da circunferência.



A reta é tangente à circunferência

Nesse caso, a distância da reta s ao centro C da circunferência é igual ao raio r. Existe um único ponto de interseção que satisfaz à ambas equações, da reta e da circunferência.

1º exemplo: Verifique a posição relativa entre a reta $8x + 6y + 6 = 0$ e a circunferência $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$.

Solução:

Solução 1: O centro da circunferência é (2, -2) e o raio é 1. A distância do centro à reta é

$$D_{r,C} = \left|\frac{8.2 + 6.(-2) + 6}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right| = \left|\frac{16 - 12 + 6}{\sqrt{64 + 36}}\right| = \left|\frac{10}{\sqrt{100}}\right| = 1.$$

Como a distância entre a reta e o centro é igual ao raio da circunferência, então a reta é tangente à circunferência.

Solução 2: Isolando uma das incógnitas da reta.

$$8x + 6y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{8}{6}x - \frac{6}{6} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{3}x - 1}\ (1).$$

E substituindo na equação da circunferência,

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + (-\frac{4}{3}x - 1 + 2)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 - 4x + 4 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{25}{9}x^2 - \frac{20}{3}x + 4 = 0} \Rightarrow$$

$$\frac{25}{9}x^2 - \frac{20}{3}x + 4 = 0 \Rightarrow \left(a = \frac{25}{9}, b = -\frac{20}{3}, c = 4\right).$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\frac{20}{3})^2 - 4.\frac{25}{9}.4 \Rightarrow \Delta = \frac{400-400}{9} \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}.$$

Como $\Delta = 0$, temos apenas um ponto de interseção. Portanto, a reta é tangente à circunferência.

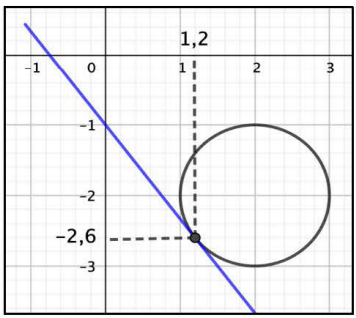
Calculando o ponto de interseção:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-\left(-\frac{20}{3}\right) \pm 0}{2.\frac{25}{9}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{50}{9}} = \frac{18}{15} \Rightarrow \boxed{x = 1{,}2}.$$

Substituindo $x = 1{,}2$ em (1), obtemos

$$y = -\frac{4}{3}x - 1 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}.1{,}2 - 1 \Rightarrow \boxed{y = -2{,}6}.$$

Veja no gráfico da figura ao lado que o ponto de interseção é de fato $(1{,}2;\ -2{,}6)$.



2º exemplo: Calcule os pontos de interseção da reta $x + y = 0$ com a circunferência $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 = 0$.

Solução: Como devemos calcular as coordenadas dos pontos e não a posição relativa somente, devemos então substituir a equação da reta na equação da circunferência.

Isolando uma variável na equação da reta : $\boxed{x = -y}$ (1)

Substituindo na equação da circunferência:

$$x^2 + 4x + y^2 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow (-y)^2 + 4(-y) + y^2 + 2y - 4 = 0$$

$$2y^2 - 2y - 4 = 0\ (\div 2) \Rightarrow \boxed{y^2 - y - 2 = 0} \Rightarrow (a = 1; b = -1 \text{ e } c = -2).$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-2) = 1 + 8 \Rightarrow \boxed{\Delta = 9}.$$

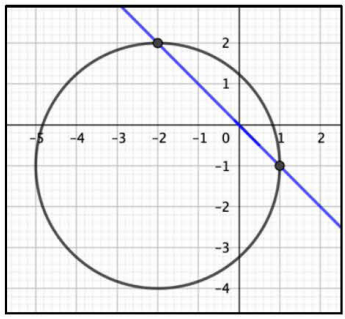
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} y' = \frac{-1+3}{2} = 2 \\ y'' = \frac{-1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Para $y = 2$, encontramos em (1), que $x = -2 \Rightarrow (-2, 2)$.

Para $y = -1$, encontramos $x = 1 \Rightarrow (1, -1)$.

Desta forma, a reta é secante e os pontos de interseção são (-2, 2) e (1, -1).

Veja o gráfico da circunferência e da reta, com os pontos de interseção na figura ao lado.



3º exemplo: Verifique a posição relativa entre a reta $x + y - 1 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$.

Solução:

Solução 1: Comparando $x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$ com a equação geral $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, vemos que

$$-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}.$$

$$-2b = 4 \Rightarrow \boxed{b = -2}.$$

Como $a^2 + b^2 - r^2 = 2$, substituindo a e b, obtemos

$$0^2 + 2^2 - r^2 = 2 \Rightarrow 4 - r^2 = 2 \Rightarrow r^2 = 4 - 2 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{2}}.$$

$$D_{r,C} = \left|\frac{0 + (-2) - 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-3}{\sqrt{2}}\right| = \frac{3 . \sqrt{2}}{\sqrt{2} . \sqrt{2}} = \frac{3 . \sqrt{2}}{2}.$$

Como a distância da reta ao centro da circunferência é maior que o raio, então a reta é externa à circunferência.

Solução 2: Isolando uma das incógnitas da reta

$$x + y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1 - y} \quad (1).$$

Substituindo na equação da circunferência $x^2 + y^2 + 4y + 2 = 0$, obtemos

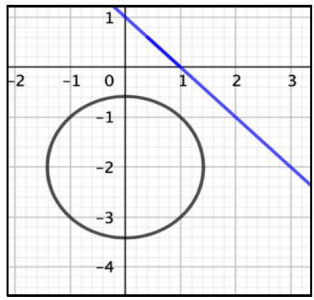
$$(1 - y)^2 + y^2 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$2y^2 + 2y + 3 = 0 \Rightarrow (a = 2, b = 2, c = 3).$$

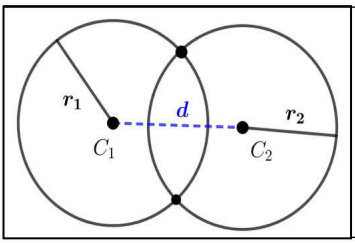
$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4.2.3 = 4 - 24 \Rightarrow \boxed{\Delta = -20}.$$

Como $\Delta < 0$, não existe solução e consequentemente, não existe ponto de interseção. Assim, a reta é exterior à circunferência. Veja o gráfico.



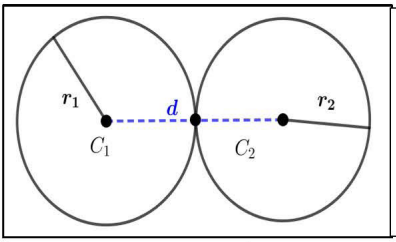
13.5.4. Posição relativa entre duas circunferências

Considerando duas circunferências de centros C_1 e C_2, raios r_1 e r_2, respectivamente, e sendo d a distância entre seus centros, temos os seguintes casos possíveis:



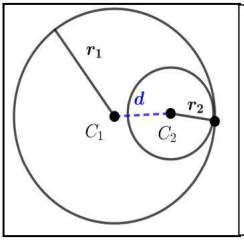
Circunferências secantes

Há dois pontos em comum que satisfazem as duas equações das circunferências. Neste caso, a distância d entre os centros de cada circunferência está dentro do intervalo: $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$.



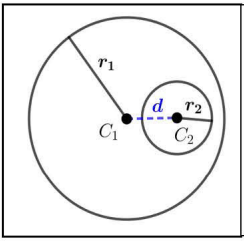
Circunferências tangentes externas

Há um único ponto em comum (que satisfaz as duas equações das circunferências) e $d = r_1 + r_2$.



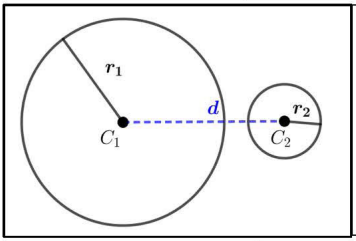
Circunferências tangentes internas

Há um único ponto em comum (que satisfaz as duas equações das circunferências) e $d = |r_1 - r_2|$.



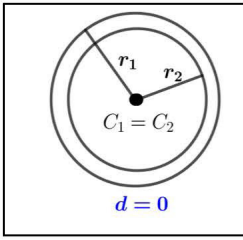
Circunferências sem ponto comum internas

Não há ponto em comum e $d < |r_1 - r_2|$.



Circunferências sem ponto comum externas

Não há ponto em comum e $d > r_1 + r_2$.



Circunferências concêntricas

Possui mesmo centro (ou centro coincidentes) e, por consequência, $d = 0$.

Exemplo: Verifique a posição relativa entre as circunferências $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ e $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$.

Solução:

Dados da primeira circunferência: $C_1 = (1,2)$ *e* $r_1 = \sqrt{5}$.

Dados da segunda circunferência:

$$-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}.$$

$$-2b = -2 \Rightarrow \boxed{b = 1}.$$

Como $a^2 + b^2 - r^2 = -8$, substituindo a e b, encontramos

$$0^2 + 1^2 - r^2 = -8 \Rightarrow 1 - r^2 = -8 \Rightarrow r^2 = 8 + 1 \Rightarrow r = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{r = 3}.$$

Assim, $C_2 = (0, 1)$ e $r_2 = 3$.

Agora, vamos calcular a distância d entre os centros e comparar com a soma e diferença dos raios.

$$d = \sqrt{(1 - 0)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \cong 3{,}16.$$

$$|r_1 - r_2| = |\sqrt{5} - 3| = |\sqrt{5} - 3| \cong 0{,}76.$$

$$r_1 + r_2 = \sqrt{5} + 3 \cong 5{,}23.$$

Como $0{,}76 < d < 5{,}23$, as retas são secantes e possuem dois pontos em comum.

Para encontrar esse pontos em comum, devemos montar um sistema de equações com as equações das duas circunferências. Para isso, vamos desenvolver a primeira equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 + 4 - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0}.$$

O sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$ equivale a: $\begin{cases} -x^2 - y^2 + 2x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 2x + 4y = 0 \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2y - 8 = 0 \end{cases} +$$

$$2x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{x + y - 4 = 0} \ (3).$$

Em seguida, devemos isolar uma incógnita em (3): $x = -y + 4$, e substituir em uma das equações do sistema. Substituindo em (2), encontramos

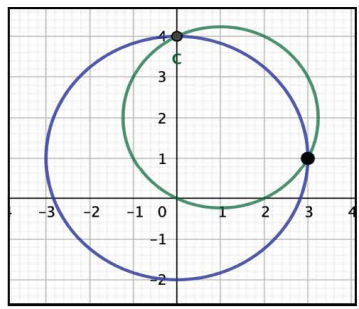
$$x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow (-y + 4)^2 + y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$y^2 - 8y + 16 + y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y^2 - 10y + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{y^2 - 5y + 4 = 0}.$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (a = 1, b = -5, c = 4).$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4.1.4 = 25 - 16 \Rightarrow \boxed{\Delta = -20}.$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} y' = \dfrac{5 + 3}{2} = 4 \\ y'' = \dfrac{5 - 3}{2} = 1 \end{cases}.$$



Substituindo em (3) e inicialmente para $y = 4$:

$$x = -y + 4 \Rightarrow x = -4 + 4 \Rightarrow \boxed{x = 0} \Rightarrow (0, 4).$$

Para $y = 1 \Rightarrow x = -y + 4 \Rightarrow$

$$x = -1 + 4 \Rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow (3, 1).$$

Veja os pontos de interseção na figura.

2º exemplo: Calcule o(s) ponto(s) de interseção das circunferências $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6y - 27 = 0$.

Solução:

O sistema: $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 - 6y - 27 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Mudando todos os sinais da primeira equação : $\begin{cases} -x^2 - y^2 - 2y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6y - 27 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\cancel{x^2} - \cancel{y^2} - 2y + 3 = 0 \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6y - 27 = 0 \end{cases} +$$

$$-8y - 24 = 0 \Rightarrow y = \frac{24}{-8} \Rightarrow \boxed{y = -3} \ (3).$$

Podemos substituir em qualquer das equações. Substituindo na equação (1),

$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + (-3)^2 + 2.(-3) - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$.

Existe portanto, um único ponto de interseção $(0, -3)$ e, desse modo, as circunferências são tangentes. O que não sabemos é se são tangentes externas ou internas. Vamos aos cálculos.

Dados da circunferência (1):

$$-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}.$$

$$-2b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -1}.$$

Como $a^2 + b^2 - r^2 = -3$, substituindo a e b, temos

$0^2 + (-1)^2 - r^2 = -3 \Rightarrow 1 - r^2 = -3 \Rightarrow r^2 = 3 + 1 \Rightarrow r = \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{r = 2}$.

Logo: $C_1 = (0, -1)$ *e* $r_1 = 2$.

Dados da circunferência (2):

$$-2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}.$$

$$-2b = -6 \Rightarrow \boxed{b = 3}.$$

Como $a^2 + b^2 - r^2 = -27$, substituindo a e b, dispomos de

$0^2 + 3^2 - r^2 = -27 \Rightarrow 9 - r^2 = -27 \Rightarrow r^2 = 27 + 9 \Rightarrow r = \sqrt{36} \Rightarrow \boxed{r = 6}$.

Dessa forma: $C_2 = (0, 3)$ *e* $r_2 = 6$.

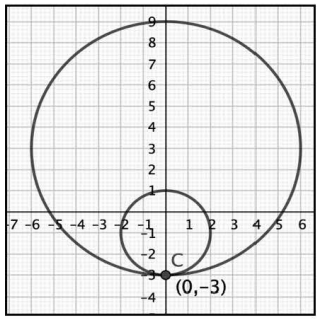
Por fim, vamos calcular a distância d entre os centros e comparar com a soma ou subtração dos raios.

$$d = \sqrt{(0 - 0)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

$$|r_1 - r_2| = |2 - 6| = |-4| = 4.$$

Como $d = |r_1 - r_2|$, as circunferências são tangentes internas.

Essa informação é confirmada pelo gráfico dessas circunferências na figura ao lado.

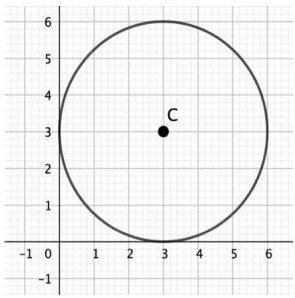


EXERCÍCIOS 13.9

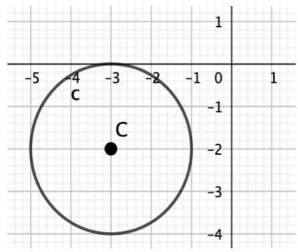
1) Calcular a equação reduzida e geral da circunferência de raio 4 e centro (1,-3).

2) Calcular a equação reduzida e geral das circunferências a seguir.

a)



b)



3) Determine as coordenadas do centro e a medida do raio das circunferências abaixo:

a) $(x-4)^2 + (y+11)^2 = 64$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 8x + 8y - 34 = 0$

4) Qual a equação reduzida e geral da circunferência de centro (3,-3) que passa por (3,0)?

5) Verifique qual(is) das equações abaixo representa uma circunferência:

a) $x^2 + y^2 = 4$

b) $2x^2 + 2y^2 + 7x + 11y - 31 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 14x + 11yx = 0$

d) $x^2 + y^2 + x + y + 4 = 0$

6) Verifique a posição relativa dos respectivos pontos e respectivas circunferências, de cada item.

a) $A(2,2)$ e $x^2 + y^2 = 4$

b) $B(0,-4)$ e $x^2 + y^2 - 9 = 0$

c) $C(3,-4)$ e $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$

d) $D(\frac{3}{2},1)$ e $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$

7) Verifique a posição relativa entre as respectivas retas e circunferências de cada item.

a) $x = 1\ e\ x^2 + y^2 - x - 4y + 3 = 0$

b) $12x + 5y - 9 = 0\ e\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 19 = 0$

c) $-2x + y - 10 = 0\ e\ x^2 + y^2 - 6x - 16y + 64 = 0$

d) $-x + y + 1 = 0\ e\ x^2 + y^2 - 3x - 22y + 69 = 0$

e) $x + y - 8 = 0\ e\ x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

8) Calcule os pontos de interseção da reta $-x + y - 8 = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$.

9) Calcule os pontos de interseção da reta $x + y - \sqrt{2} = 0$ com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$.

10) Verifique a posição relativa entre as duas circunferências de cada item e calcule o(s) ponto(s) de interseção se forem tangentes ou secantes.

a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5\ e\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

b) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13\ e\ (x+3)^2 + (y-1)^2 = 5$

c) $x^2 + (y-7)^2 = 20\ e\ (x+7)^2 + (y-1)^2 = 13$

d) $(x-4)^2 + (y-9)^2 = 16\ e\ (x-4)^2 + (y-10)^2 = 25$

e) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 15 = 0\ e\ (x+2)^2 + (y-7)^2 = 36$

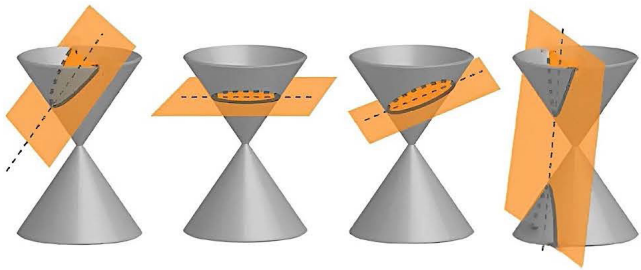
13.6. Cônicas

As cônicas são curvas obtidas a partir da secção de um cone por um plano. São elas: a elipse, a parábola e a hipérbole.

A **elipse** corresponde a secção de um cone por um plano não paralelo à geratriz e não paralelo ao eixo desse cone. Um caso particular ocorre quando essa secção é feita por um plano horizontal, assim, a elipse torna-se um **círculo**.

A **parábola** corresponde a secção de um cone por um plano paralelo a geratriz de um cone. Enquanto, a **hipérbole** corresponde a secção de um cone por um plano paralelo ao seus eixos.

As secções correspondes às curvas, estão representadas, respectivamente, na figura a seguir.



13.6.1. Elipse

Uma curva elíptica pode ser traçada em uma folha de papel. Para isso, fixe as extremidades de um pedaço de barbante de tamanho adequado ao papel e maior que a distância entre os dois pontos F_1 e F_2 que estão na figura. Em seguida, posicione a caneta mantendo o barbante esticado e tracejando em torno dos pontos F_1 e F_2. A curva descrita será uma elipse (conforme figura 13.6.1.1).

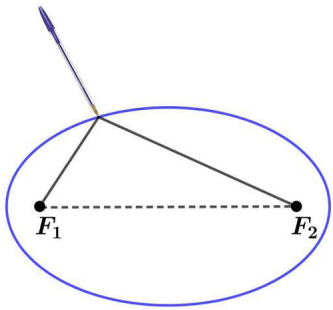


Figura 13.6.1.1

Para entender as propriedades e conhecer os elementos dessa curva, iremos estudá-la em um plano cartesiano, que, a priori, terá seu centro coincidindo com a origem.

Elementos (conforme figura 13.6.1.2):

Focos: F_1 e F_2; origem: O; eixo maior:$\overline{AA'} = 2a$; eixo menor:$\overline{BB'} = 2b$ e distância focal:$\overline{F_1F_2} = 2c$.

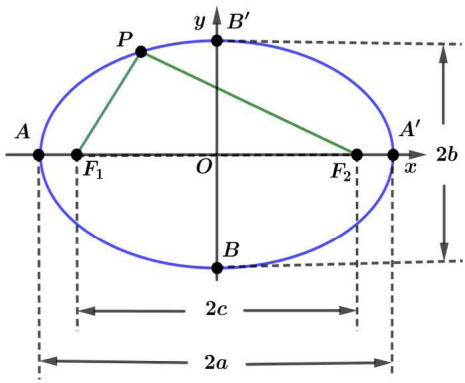


Figura 13.6.1.2

Vamos mostrar que, em uma elipse, a soma das distâncias de qualquer ponto a cada um dos seus focos é constante e igual a $2a$.

Quando o ponto P está sobre A′, temos que: $2c + 2\overline{F_2A'} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$.

Quando o ponto P está sobre A: $2c + 2\overline{F_1A} = \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$.

Então, $\overline{F_1A} = \overline{F_2A'}$.

Porém, $c + \overline{F_1A} = a$, consequentemente, $2c + 2\overline{F_2A'} = 2a$, isto é

$$\boxed{\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a}.$$

Há uma relação entre a, b e c, que pode ser demonstrada quando o ponto P está sobre B′ (ver figura 13.6.1.3). O triângulo destacado é retângulo, então vale o teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

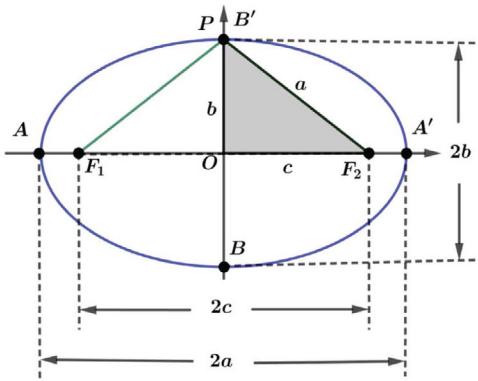
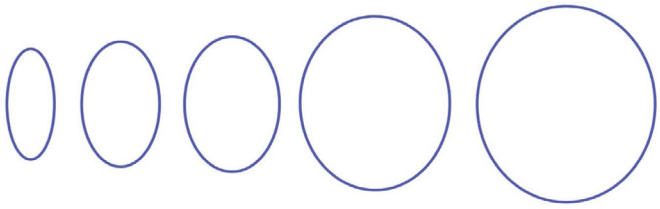


Figura 13.6.1.3

Algumas elipses podem ser mais achatadas, enquanto outras mais próximas de uma circunferência. Um número que mede essa característica, chama-se excentricidade e ($0 < e < 1$) e é dado por

$$e = \frac{c}{a}$$

Quando a excentricidade se aproxima de zero, a elipse fica mais arredondada, se aproximando de uma circunferência.



Equação da Elipse: Observe na figura 13.6.1.3 que $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ e o ponto $P = (x, y)$. Ao aplicar a definição característica de uma elipse $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ e a fórmula da distância entre dois pontos, obtemos

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$2xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - 2xc \Rightarrow 4a^2 - 4xc = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a^2 - xc = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow \frac{a^2 - xc}{a} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left(\frac{a^2 - xc}{a}\right)^2 = (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} a^2 = x^2 . \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow a^2b^2 - a^2c^2 = b^2x^2 + a^2y^2$$

$$a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{b^2} = b^2x^2 + a^2y^2 \Rightarrow a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2 \Rightarrow dividindo\ por\ a^2b^2$$

$$\frac{a^2b^2}{a^2b^2} = \frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Se o eixo maior estiver sobre o eixo y, conforme figura 13.6.1.4, de forma análoga demonstra-se que:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

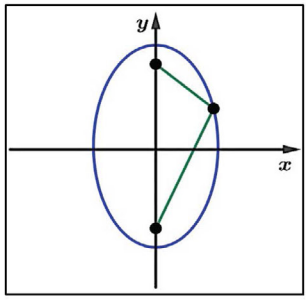


Figura 13.6.1.4

Caso o centro da elipse não seja a origem, basta fazer uma translação da equação para o centro desejado. Supondo que o centro seja (x_0, y_0), as equações ficam assim:

- Se o eixo maior for paralelo ao eixo das abscissas (figura 13.6.1.5):

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

◆ Se o eixo maior for paralelo ao eixo das ordenadas (figura 13.6.1.6):

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}+\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1$$

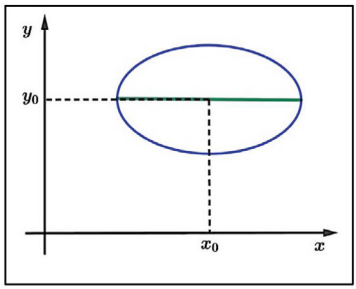


Figura 13.6.1.5

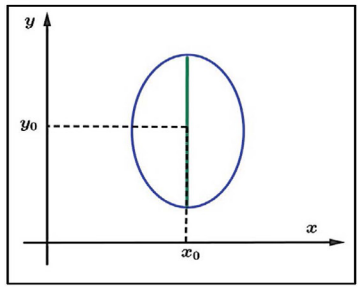


Figura 13.6.1.6

Área de uma Elipse: Utilizamos a fórmula a seguir para o cálculo de área de uma elipse.

$$A=\pi ab$$

A demonstração dessa fórmula está no volume 4 dessa coleção.

Uma circunferência, conforme já mencionado, é um caso particular de uma elipse. Ela equivale a uma elipse de excentricidade $e=\frac{c}{a}$ nula, ou seja, no caso em que $c=0$. Para comprovação desse fato, observe que quando $c=0$, implica em $a^2=b^2+c^2$ e em $a=b=r$ (raio). Assim, todas as fórmulas referentes à elipse tornam-se iguais às fórmulas de uma circunferência. Veja:

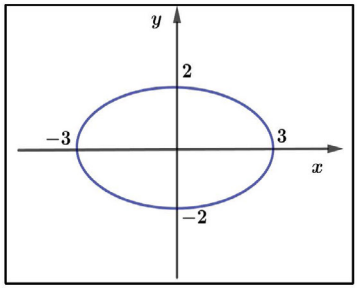
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\Rightarrow a=b=r\ \Rightarrow \frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=1\ \Rightarrow \boxed{x^2+y^2=r^2}.$$

$$A=\pi ab\Rightarrow a=b=r\ \Rightarrow\ \boxed{A=\pi r^2}.$$

Agora, vamos as aplicações.

Exemplo: Calcule a equação da elipse da figura e as coordenadas dos focos.

Solução:



Os parâmetros são: $a=3$ e $b=2$.

A equação é:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1}.$$

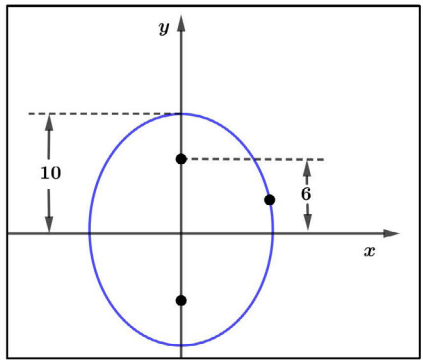
E os focos são:

$3^2=2^2+c^2\Rightarrow 9=4+c^2\Rightarrow c^2=5\Rightarrow\boxed{c=\sqrt{5}}$.

$F_1=(-\sqrt{5},0)$, $F_2=(\sqrt{5},0)$.

2º exemplo: Calcule a equação da elipse da figura e a excentricidade.

Solução:



Os parâmetros são: $c = 6$ e $a = 10$.

Calculando b:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10^2 = b^2 + 6^2$$

$$100 = b^2 + 36 \Rightarrow b^2 = 100 - 36$$

$$b^2 = 64 \Rightarrow b^2 = \sqrt{64} \Rightarrow \boxed{b = 8}.$$

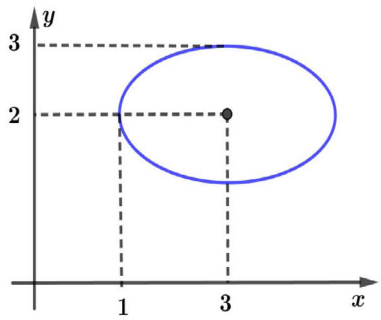
Como o eixo maior é paralelo ao eixo y, a equação é:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{10^2} + \frac{x^2}{8^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1}.$$

Quanto a excentricidade, temos: $e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{6}{10} \Rightarrow \boxed{e = 0{,}6}$.

3º exemplo: Calcule a equação, a excentricidade, as coordenadas do foco e área da elipse da figura.

Solução:



Os parâmetros são

$$a = 3 - 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}.$$

$$b = 3 - 2 \Rightarrow \boxed{b = 1}.$$

Calculando c,

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2^2 = 1^2 + c^2 \Rightarrow$$

$$4 = c^2 + 1 \Rightarrow c^2 = 4 - 1 \Rightarrow$$

$$c^2 = 3 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{3}}.$$

Como a abscissa do centro da elipse é 3, os focos são

$$F_1 = (3 - \sqrt{3}, 2) \; e \; F_2 = (3 + \sqrt{3}, 2)$$

A excentricidade é

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{e \cong 0{,}86}.$$

Uma vez que o eixo maior é paralelo ao eixo x e o centro não é a origem $(3, 2)$, temos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{1^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1}.$$

A área dessa elipse é dada por

$$A = \pi ab = \pi . 2 . 1 \Rightarrow \boxed{A = 2\pi \, u.a}.$$

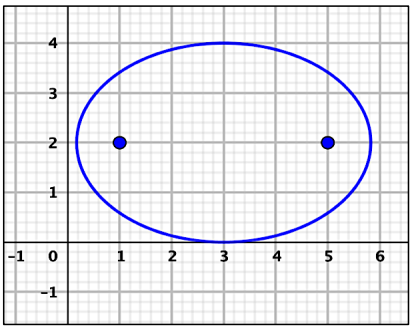
EXERCÍCIOS 13.10

1)Uma elipse tem eixo maior medindo 26 cm e eixo menor medido 10cm. Calcule a distância focal e a excentricidade dessa elipse.

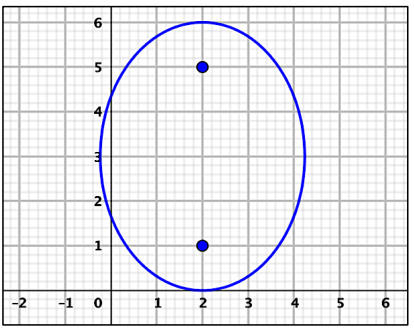
2)Uma elipse centrada na origem, possui eixo maior de 29cm que está sobre o eixo y e eixo menor de 20cm. Calcule a excentricidade, as coordenadas do foco e a equação dessa elipse.

3)Calcule a equação das elipses abaixo, sabendo que os pontos em destaque são os focos.

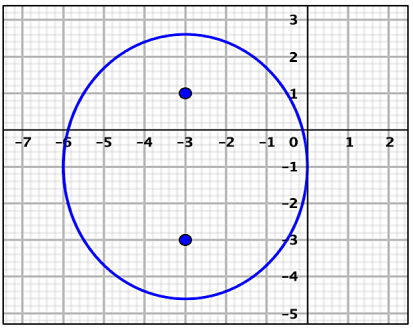
a)



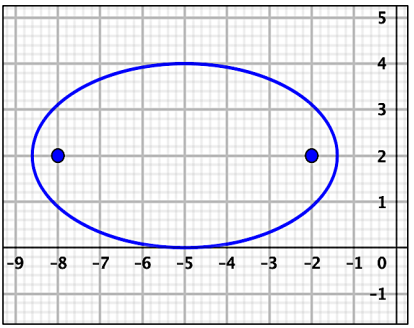
b)



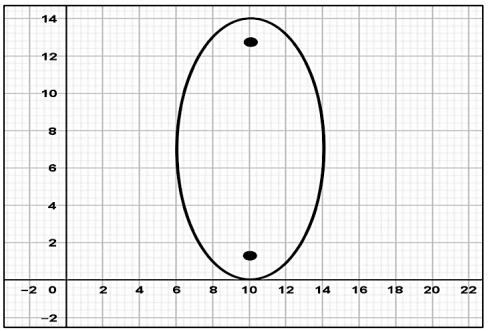
c)



d)



4)Calcule as coordenadas dos focos e área da elipse a seguir.

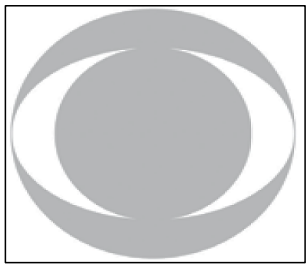


5)Uma elipse possui excentricidade de 0,6 e eixo menor medindo 16 cm. Calcule o tamanho do eixo maior e a distância focal.

6)(UFV – MG) Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno da Terra. Considerando a Terra como um ponto na origem do sistema de coordenadas, a equação da órbita do satélite é dada por $9x^2 + 25y^2 - 288x - 1296 = 0$, onde x e y são medidos em milhares de quilômetros. Nessas condições, é correto afirmar que:

a) a menor distância do satélite à Terra é 16000 km.
b) a distância do ponto (16, 12) da órbita do satélite à Terra é 28000 km.
c) a maior distância do satélite à Terra é 36000 km.
d) a órbita do satélite passa pelo ponto de coordenadas (0, 36).
e) a excentricidade da órbita do satélite é 3/4.

7)(UERJ) O logotipo de uma empresa é formado por duas circunferências concêntricas tangentes a uma elipse, como mostra a figura abaixo. A elipse tem excentricidade 0,6 e seu eixo menor mede 8 unidades. A área da região por ela limitada é dada por a ·b· π, em que a e b são as medidas dos seus semieixos. Calcule a área da região definida pela cor cinza.



8)(UEL-PR) Em uma praça dispõe-se de uma região retangular de 20m de comprimento por 16m de largura para construir um jardim. A exemplo de outros canteiros, este deverá ter a forma elíptica e estar inscrito nessa região retangular. Para aguá-lo, serão colocados dois aspersores nos pontos que correspondem aos focos da elipse. Qual será a distância entre os aspersores?

a) 4m b) 6m c) 8m d) 10m e) 12m

9)(ENEM) Uma elipse é uma seção plana de um cilindro circular reto, em que o plano que intersecta o cilindro é oblíquo ao eixo do cilindro (Figura 1). É possível construir um sólido de nome elipsoide que, quando seccionado por três planos perpendiculares entre si, mostram elipses de diferentes semieixos a, b e c, como na Figura 2. O volume de um elipsoide de semieixos a, b e c é dado por V=4/3πabc.

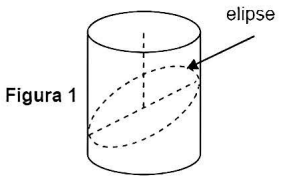


Figura 1

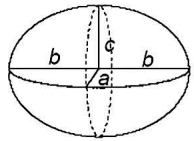


Figura 2

Considere que um agricultor produz melancias, cujo formato é aproximadamente um elipsoide, e ele deseja embalar e exportar suas melancias em caixas na forma de um paralelepípedo retângulo. Para melhor acondicioná-las, o agricultor preencherá o espaço vazio da caixa com material amortecedor de impactos (palha de arroz/serragem/bolinhas de isopor). Suponha que sejam a, b e c, em cm, as medidas dos semieixos do elipsoide que modela as melancias, e que sejam $2a$, $2b$ e $2c$, respectivamente, as medidas das arestas da caixa. Nessas condições, qual é o volume de material amortecedor necessário em cada caixa?

a) $V = 8abc$ cm³

b) $V = \frac{4\pi}{3}abc$ cm³

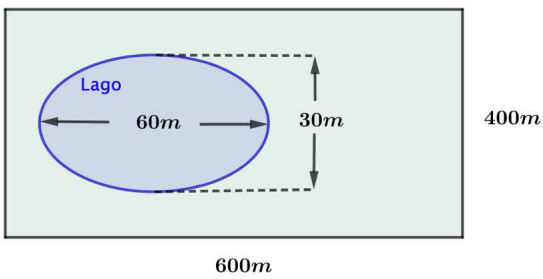
c) $V = abc(8+\frac{4\pi}{3})$ cm³

d) $V = abc\ (8 - \frac{4\pi}{3})$ cm³

e) $V = abc\ (\frac{4\pi}{3} - 8)$ cm³

10) Em meio à uma fazenda retangular de medidas 400m por 600m, existe um lago em forma de elipse, conforme a figura, cujos eixo maior e menor são 60m e 30m. Por questões técnicas, um agricultor pretender plantar um certo cultivo na área não alagada, para isso ele tem disponível (considere $\pi \cong 3{,}1$):

a) 20 ha
b) 180000m²
c) 24,4 ha
d) 240000m²
e) 234.420m²



13.6.2. Hipérbole

Hipérbole é uma curva plana formada por todos os pontos tais que, o módulo da diferença de suas distâncias a dois pontos fixos dados (F_1 e F_2) é constante e igual a $2a$ (figura 13.6.2.1 e figura 13.6.2.2).

$$\boxed{\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a}$$

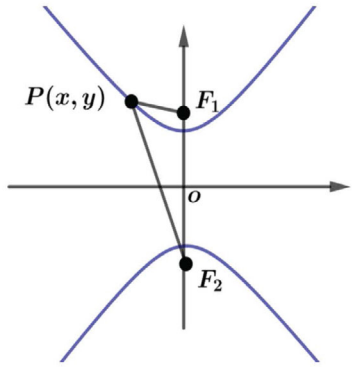


Figura 13.6.2.1

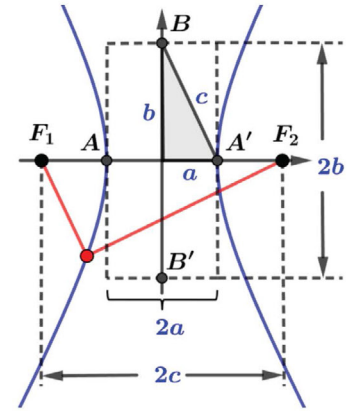


Figura 13.6.2.2

Quanto aos elementos, de acordo com a figura 13.6.2.2, temos:

- Focos: F_1 e F_2
- Origem: O
- Eixo real: $\overline{AA'} = 2a$
- Eixo imaginário: $\overline{BB'} = 2b$
- Distância focal: $\overline{F_1F_2} = 2c$

Como os eixos real e imaginário são perpendiculares, vale o teorema de Pitágoras, conforme a figura 13.6.2.2.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

A hipérbole possui um parâmetro denominado de abertura das assíntotas ou abertura da hipérbole. Essa abertura está representada pelo ângulo θ na figura 13.6.2.3.

A excentricidade também é dado por e ($0 < e < 1$):

$$\boxed{e = \frac{c}{a}}$$

Como $c > a$, a excentricidade da hipérbole é um número maior do que 1.

Quando $a = b$ dizemos que a hipérbole é **equilátera**, nesse caso, a excentricidade é igual a $\sqrt{2}$ (verifique!).

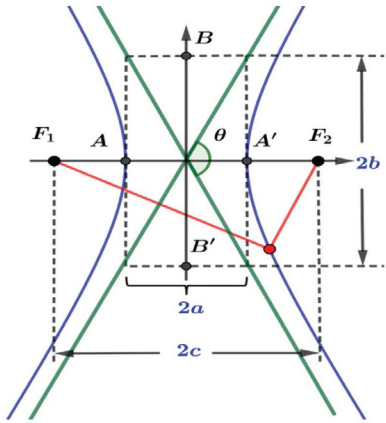


Figura 13.6.2.3

Equação da hipérbole: De forma análoga à que se demonstrou para a equação da elipse, podemos demonstrar a equação hipérbole (a cargo do leitor).

Se os focos tiverem sobre o eixo x (figura 13.6.2.4): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Se os focos tiverem sobre o eixo y (figura 13.6.2.5): $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

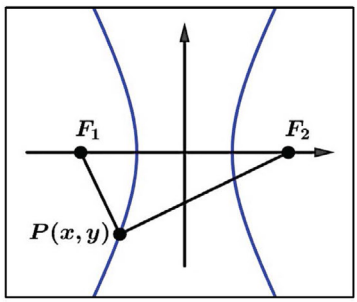


Figura 13.6.2.4

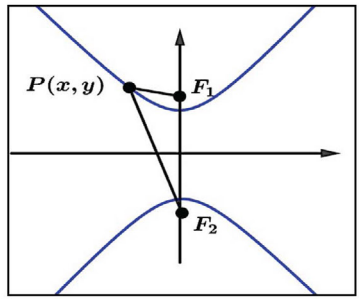


Figura 13.6.2.5

Caso o centro (x_0, y_0) da hipérbole não for a origem, basta fazer uma translação da equação para o centro desejado, conforme a seguir.

– Se a reta que contém os focos for paralelo ao eixo das abscissas, temos

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

– Se a reta que contém os focos for paralelo ao eixo das ordenadas, temos

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1.$$

Exemplo: Uma hipérbole centrada na origem, tem eixo real sobre o eixo x medindo 24cm e eixo imaginário medindo 8cm. Escreva a equação dessa hipérbole e determine as coordenadas do foco.

Solução:

Os parâmetros são $2a=24 \Rightarrow \boxed{a=12}$ e $2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}$.

$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{4^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{16}=1}.$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12^2+4^2 \Rightarrow c^2=144+16 \Rightarrow c=\sqrt{160} \Rightarrow \boxed{c=4\sqrt{10}}.$$

$$F_1=(-4\sqrt{10},0) \text{ e } F_2=(4\sqrt{10},0).$$

2º exemplo: Calcular a excentricidade e a equação da hipérbole abaixo.

Solução:

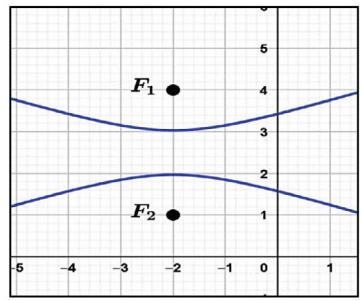
A distância focal: $2c=3 \Rightarrow c=3/2$.

Eixo real: $2a=1 \Rightarrow a=1/2$.

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3/2}{1/2} \Rightarrow \boxed{e=3}.$$

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^2 \Rightarrow$$

$$b^2=\frac{9}{4}-\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{b=\sqrt{2}}.$$



Pela figura, o centro da hipérbole é C(-2, 5/2) e assim,

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{(x+2)^2}{(\sqrt{2})^2}=1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{(y-5/2)^2}{\frac{1}{4}}-\frac{(x+2)^2}{2}=1}.$$

EXERCÍCIOS 13.11

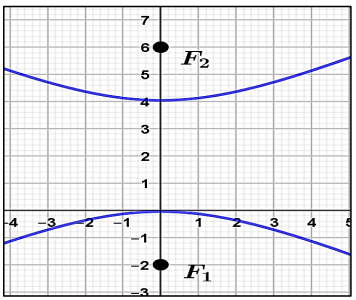
1)Uma hipérbole centrada na origem, tem eixo real sobre o eixo x medindo 24cm e eixo imaginário medindo 10cm. Escreva a equação dessa hipérbole e determine as coordenadas do foco.

2)Uma hipérbole centrada na origem, tem eixo real sobre o eixo y medindo 30cm e eixo imaginário medindo 16cm. Escreva a equação dessa hipérbole e determine as coordenadas do foco.

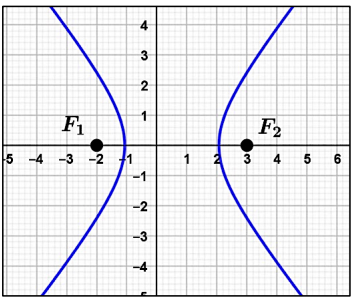
3)Calcule a distância focal, a excentricidade e a equação de uma hipérbole equilátera cujos focos estão sobre os pontos (0, 6) e (0, –6).

4)Calcule a equação das seguintes hipérboles:

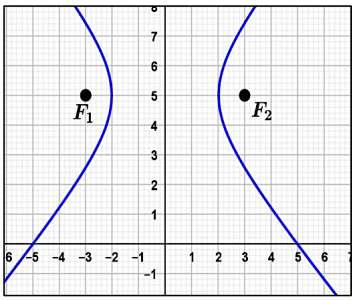
a)



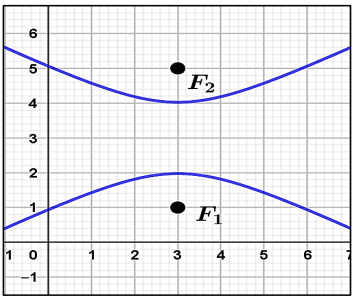
b)



c)



d)



13.6.3. Parábola

Parábola é uma curva formada por todos os pontos do plano cuja distância a um ponto fixo F (Foco) é igual à distância a uma reta dada d denominada diretriz (ver figura 13.6.3.1). Então :$\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{PP'}}$.

Elementos (acompanhe pela figura 13.6.3.1): Foco: F, origem: V, vértice: V, reta diretriz: d, eixo de simetria: $\overline{\mathrm{VF}}$ e parâmetro: p.

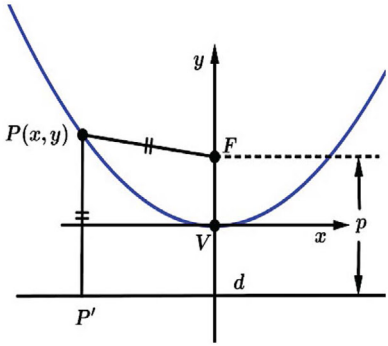


Figura 13.6.3.1

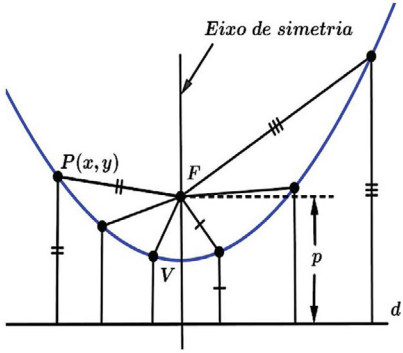


Figura 13.6.3.2

Qualquer ponto sobre a parábola está situada a mesma distância do foco à diretriz (ver figura 13.6.3.2).

De acordo com essa definição, vamos encontrar a equação da parábola cujo centro é o vértice. Se o vértice coincide com a origem, então o foco é $F(0,\frac{p}{2})$ e $P'(x,-\frac{p}{2})$, substituindo na definição $\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{PP'}}$, temos

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-\frac{p}{2})^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+\frac{p}{2})^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4}} = \sqrt{y^2+py+\frac{p^2}{4}}$$

$$x^2+y^2-py+\frac{p^2}{4} = y^2+py+\frac{p^2}{4} \Rightarrow x^2-py = +py.$$

$$\boxed{y=\frac{1}{2p}x^2}$$

Essa é a equação da parábola com origem no vértice e concavidade para cima. De forma equivalente, demonstra-se a equação com a concavidade para baixo:

$$\boxed{y=-\frac{1}{2p}x^2}$$

Em ambos os casos, a equação da reta diretriz é dada por:

$$y + \frac{p}{2} = 0$$

Ver figuras 13.6.3.3 e 13.6.3.4.

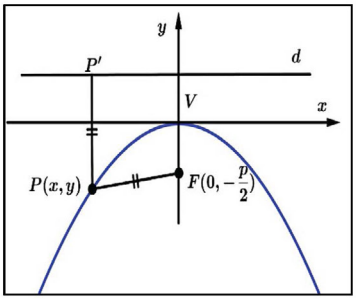


Figura 13.6.3.3

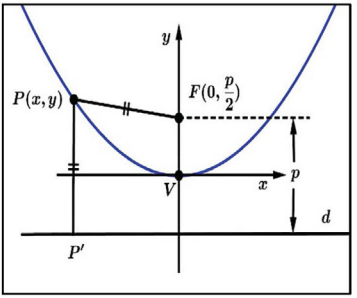


Figura 13.6.3.4

Caso a concavidade seja para a direita (figura 13.6.3.5), basta utilizar a equação com concavidade para cima e trocar y por x na equação da parábola e na equação da diretriz:

$$\boxed{x = \frac{1}{2p}y^2} \Leftarrow equação\ da\ parábola.$$

$$\boxed{x + \frac{p}{2} = 0} \Leftarrow equação\ da\ diretriz.$$

Caso a concavidade seja para a esquerda (figura 13.6.3.6), basta utilizar a equação com concavidade para baixo e trocar y por x na equação da parábola e na equação da diretriz:

$$\boxed{x = -\frac{1}{2p}y^2} \Leftarrow equação\ da\ párbola$$

$$\boxed{x - \frac{p}{2} = 0} \Leftarrow equação\ da\ diretriz$$

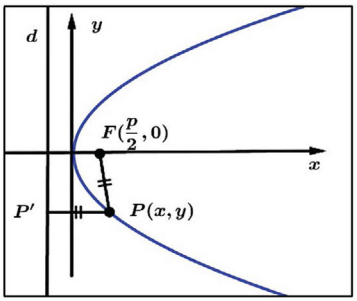


Figura 13.6.3.5

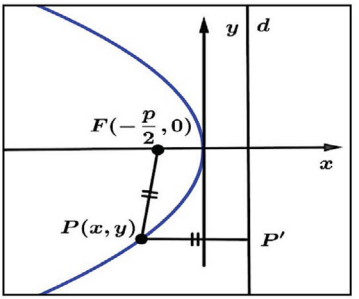


Figura 13.6.3.6

Caso o vértice não seja origem e sim um ponto (x_0, y_0) com $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$, basta fazer a translação para esse ponto e em todas as equações anteriores, ou seja, substituir x por $(x - x_0)$ e y por $(y - y_0)$.

Veja como fica, por exemplo, a equação de uma parábola com concavidade para cima, cujo vértice está sobre o ponto (x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2$$

Ver figura 13.6.3.7.

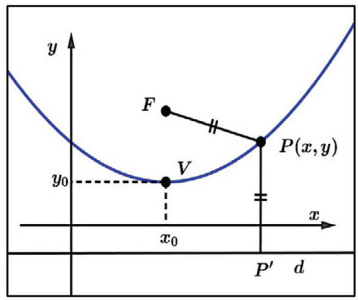


Figura 13.6.3.7

13.6.4. A parábola e a função quadrática

Vimos na unidade 7 que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Vamos a demonstração.

Comparando a fórmula de uma parábola $y - y_0 = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2$ com forma canônica $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, vemos que a função quadrática é uma parábola de:

- Parâmetro: $a = \frac{1}{2p} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2a}}$.
- Diretriz: $y - y_v + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow y = -\frac{p}{2} + y_v \Rightarrow y = -\frac{1}{4a} + -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \boxed{y = \frac{-\Delta - 1}{4a}}$.

Quanto ao foco, basta ver que a abcissa do foco é a mesma abscissa do vértice, logo: $x = -\frac{b}{2a}$. E a ordenada do foco é $y = -\frac{\Delta}{4a} + \frac{p}{2} \Rightarrow y = \frac{-\Delta + 1}{4a}$. Logo,

- Foco: $\boxed{F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta + 1}{4a}\right)}$.

Vimos também na seção 7.2 – volume 1, sobre função quadrática, a propriedade receptora e refletora da parábola e suas aplicações. Para demonstrar essa propriedade, é suficiente provar que na figura 13.6.4.1, os ângulos α e β são congruentes. Para isso, vamos mostrar apenas que as retas t e f são perpendiculares, isto é, que $m_f . m_t = -1$. Pois, como o triângulo da figura é isósceles, os ângulos α e β passam a ser complementares de ϕ.

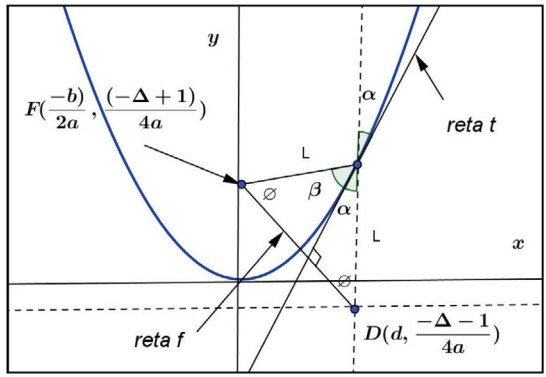


Figura 13.6.4.1

Denotando $y = m_t x + k$ como a equação da reta t tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$, temos no ponto de encontro das duas funções a mesma ordenada. Assim:

$$ax^2 + bx + c = m_t x + k \Rightarrow ax^2 + x(b - m_t) + (c - k) = 0$$

Esse ponto, segundo a figura 13.6.4.1, possui abscissa d. Logo

$$\boxed{ad^2 + d(b - m_t) + (c - k) = 0} \quad (1).$$

O ponto de encontro deve ser único, uma vez que a reta t é tangente à parábola, e nessa configuração, o discriminante Δ da equação (1) deve ser nulo. Nesse contexto:

$$\Delta = (b - m_t)^2 - 4.a.(c - k) = 0 \Rightarrow \boxed{(b - m_t)^2 = 4.a.(c - k)} \quad (2).$$

Isolando $(b - m_t)$ em (1) e substituído em (2), temos

$$(b - m_t) = \frac{-(c - k) - ad^2}{d} \Rightarrow 4.a.(c - k) = \left(\frac{-(c - k) - ad^2}{d}\right)^2$$

$$\frac{(c - k)^2 + 2.(c - k).ad^2 + a^2d^4}{d^2} = 4.a.(c - k)$$

$$(c - k)^2 + 2.(c - k).ad^2 + a^2d^4 = 4.a.d^2(c - k)$$

$$(c - k)^2 - 2.(c - k).ad^2 + a^{2d^4} = 0 \Rightarrow \left((c - k) - ad^2\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{c - k = ad^2} \quad (3).$$

Substituindo (3) em (1), encontramos

$$ad^2 + d(b - m_t) + (c - k) = 0 \Rightarrow ad^2 + d(b - m_t) + ad^2$$

$$d(2ad + b - m_t) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} d = 0 \\ 2ad + b - m_t = 0 \end{cases}} \quad (5).$$

1º caso: Se $d = 0$ implica em (1) que $c = k$ e $c = k$ implica em (2) que $\boxed{m_t = b}$.

2º caso: Se $2ad + b - m_t = 0$ implica em $\boxed{m_t = 2ad + b}$.

Observe que o 1º caso, é um caso particular do 2º caso: $d = 0 \Rightarrow m_t = b$.

Diante disso, concluímos que o coeficiente angular m_t da reta $y = m_t x + k$, tangente à parábola $y = ax^2 + bx + c$ no ponto de abscissa d, é:

$$\boxed{m_t = 2ad + b}$$

Por outro lado, podemos calcular o coeficiente angular m_f da reta f, a partir dos pontos F e D, conforme a figura 13.6.4.1. Da seguinte forma:

$$m_f = \frac{\frac{-\Delta+1}{4a} - \left(\frac{-\Delta-1}{4a}\right)}{\frac{-b}{2a} - d} = \frac{\frac{2}{4a}}{-\left(\frac{2ad+b}{2a}\right)} = \frac{-1}{2ad+b} \Rightarrow \boxed{m_f = \frac{-1}{2ad+b}} (6).$$

Isso posto, provamos que $m_f . m_t = -1$, que as retas t e f são perpendiculares e que a propriedade receptora ou refletora acontece em parábolas.

Exemplo: Escreva a equação da parábola com vértice na origem e foco em $F(0,-3)$.

Solução: Precisamos apenas encontrar o parâmetro da parábola. Como a metade da medida do parâmetro é igual a distância do vértice ao foco, temos

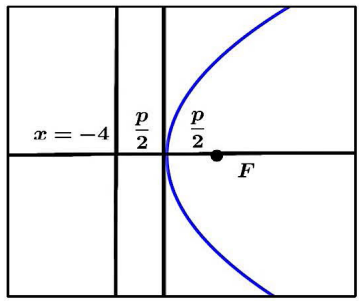
$$\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{p = 6}.$$

Como o vértice está na origem e o foco está abaixo, a parábola possui concavidade para baixo. Assim:

$$y = -\frac{1}{2p}x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2(6)}x^2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{12}x^2}.$$

2º exemplo: Calcule a equação de uma parábola com vértice na origem, cuja reta diretriz é $x = -4$.

Solução: Como o vértice está na origem e a diretriz no lado esquerdo do vértice, a parábola tem concavidade para a direita. O valor do parâmetro p é 8 e o foco é F(4, 0). Ver figura.

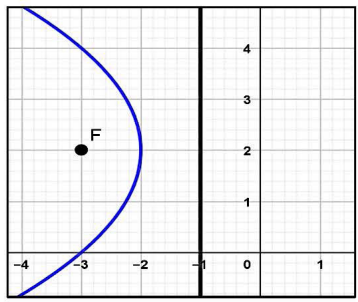


Assim, a equação é

$$x = \frac{1}{2p}y^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2.8}y^2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{16}y^2}.$$

3º exemplo: Calcule a equação da parábola representada abaixo.

Solução: Precisamos apenas do parâmetro. Pela figura, visivelmente mede 2. Como a concavidade está para a esquerda e o vértice é V(-2, 2), a equação é



$$x - x_0 = -\frac{1}{2p}(y - y_0)^2$$

$$x - (-2) = -\frac{1}{2.2}(y - 2)^2$$

$$\boxed{x + 2 = -\frac{1}{4}(y - 2)^2}.$$

4º exemplo: Calcule as coordenadas do foco, do vértice e a equação da reta diretriz da parábola $y = x^2 - 6x + 5$.

Solução: O vértice da parábola não está na origem, precisamos completar quadrados para identificá-lo.

$$y + 9 = x^2 - 6x + 5 + 9 \Rightarrow y + 9 = (x-3)^2 + 5 \Rightarrow y + 9 - 5 = (x-3)^2$$
$$y + 4 = (x-3)^2.$$

Comparando com

$$y - y_0 = \frac{1}{2p}(x - x_0)^2.$$

O vértice é: $V(x_0, y_0) = \boxed{V(3,-4)}$. O parâmetro é

$$\frac{1}{2p} = 1 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}}.$$

O foco: $F(x_0, y_0 + \frac{p}{2}) \Rightarrow F(3, -4 + \frac{1}{4}) \Rightarrow \boxed{F(3, \frac{-15}{4})}$.

E a equação da diretriz: $y + y_0 + \frac{p}{2} = 0 \Rightarrow y - 4 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{17}{4}}$.

5º exemplo: Calcule a equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 4x + 3$ no ponto cuja abscissa é 4.

Solução: Como a reta tangente pertence à parábola, o ponto em questão possui as seguintes coordenadas:

$$y = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow y = 4^2 - 4.4 + 3 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow \boxed{(4,3)}.$$

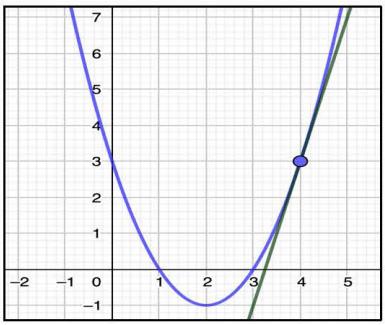
Conforme vimos no início dessa subseção, o coeficiente angular da reta tangente à parábola no ponto de abcissa d, é dado por: $m_t = 2ad + b$. Assim,

$$m_t = 2ad + b \Rightarrow m_t = 2.1.4 - 4 \Rightarrow$$
$$m_t = 8 - 4 \Rightarrow \boxed{m_t = 4}.$$

Como o ponto $(4,3)$ também pertence à reta, temos a seguinte equação de reta

$$y = m_t.x + n \Rightarrow 3 = 4.4 + n \Rightarrow n = -13$$
$$\boxed{y = 4x - 13} \; ou \; \boxed{y - 4x + 13 = 0}.$$

Veja no gráfico ao lado, que de fato a reta é tangente à parábola no ponto (4, 3).



EXERCÍCIOS 13.12

1) Escreva a equação da parábola com vértice na origem e foco em $F(0,2)$.

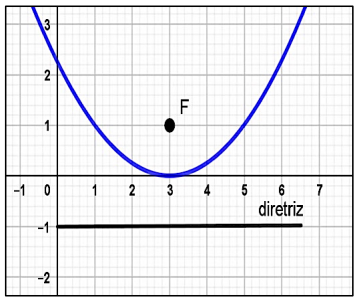
2) Escreva a equação da parábola com vértice na origem e foco em $F(0,-1)$.

3) Calcule a equação da parábola com vértice na origem, cuja reta diretriz é $x = 2$.

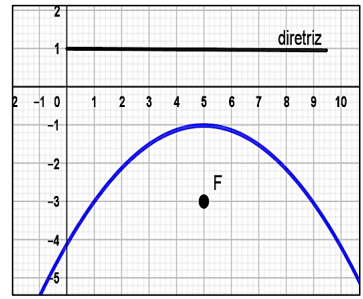
4)Calcule a equação de um parábola com vértice na origem, cuja reta diretriz é $x = -6$.

5)Calcule a equação das parábolas representadas abaixo:

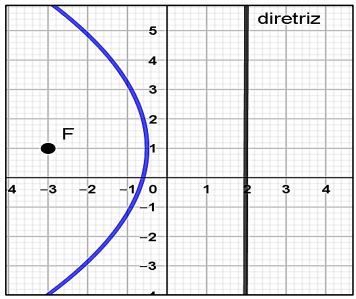
a)



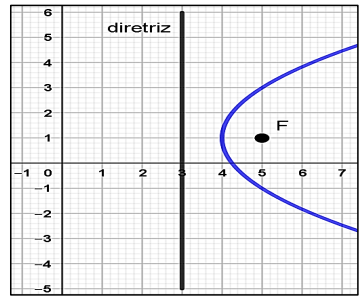
b)



c)



d)



6) Calcule a equação da reta tangente à parábola $y = 2x^2 - 4$ no ponto (1, -2).

7)Calcule a equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto (0, 0) e explique por que o coeficiente angular é nulo.

8)Calcule as coordenadas do foco, do vértice e a equação da reta diretriz da parábola $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$.

9)Calcule as coordenadas do foco, do vértice e a equação da reta diretriz da parábola $y^2 + 2y + 8x - 7 = 0$.

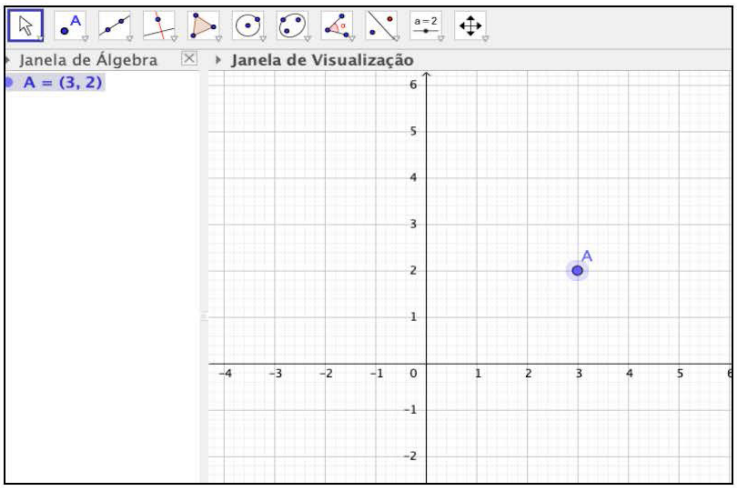
13.7. Geometria no geogebra

Nesta seção, veremos os elementos geométricos como pontos, retas, polígonos, circunferências e cônicas no software geogebra.

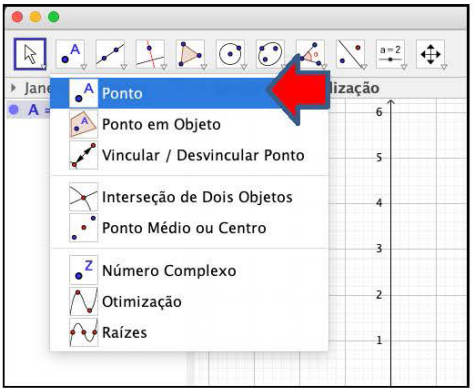
Ponto: Para representar um ponto, há duas maneiras:

– Digitar no campo de entrada do software a letra que representará o ponto e as coordenadas.

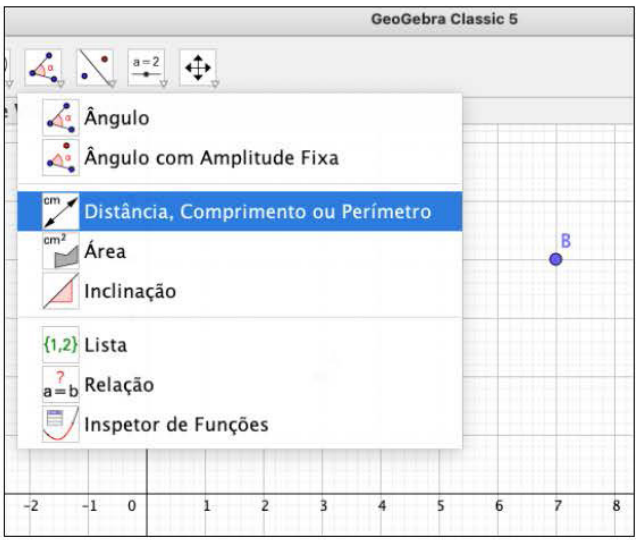
Exemplo: A = (3, 2).



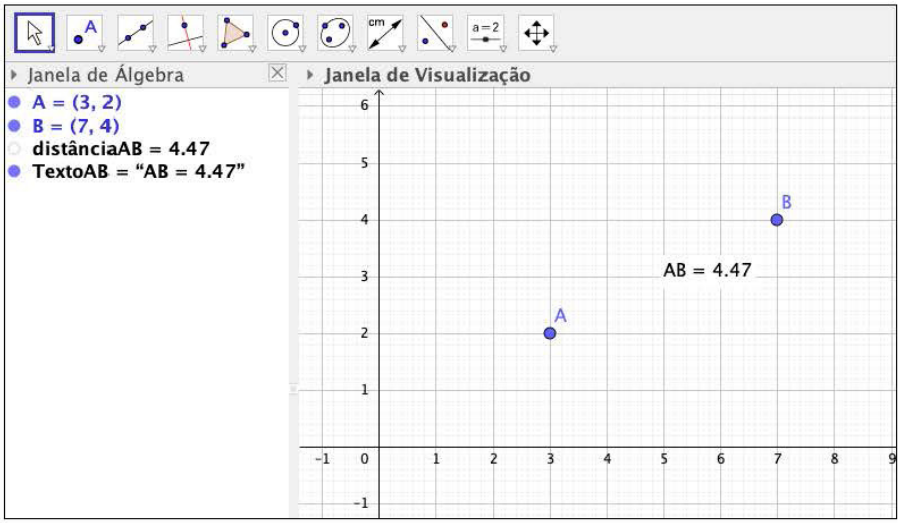
– Selecionar a ferramenta ponto, e clicar no local desejado.



Cálculo de distância entre dois pontos: Para o cálculo de distância entre dois pontos, selecione a opção: "distância, comprimento ou perímetro" e em seguida clique sobre os dois pontos.

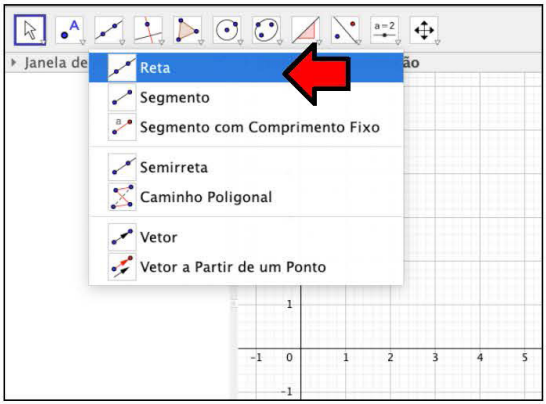


A seguir está um exemplo para A = (3, 2) e B = (7, 4):

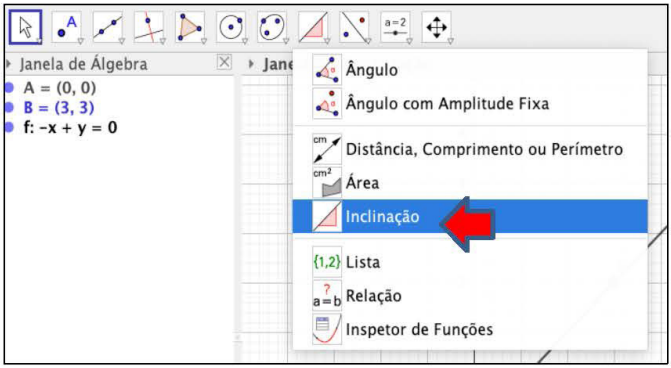


O mesmo procedimento se aplica para cálculo de distância entre ponto e reta, entre duas retas, entre reta e circunferência, etc. Basta apenas selecionar a ferramenta e clicar sobre os dois objetos.

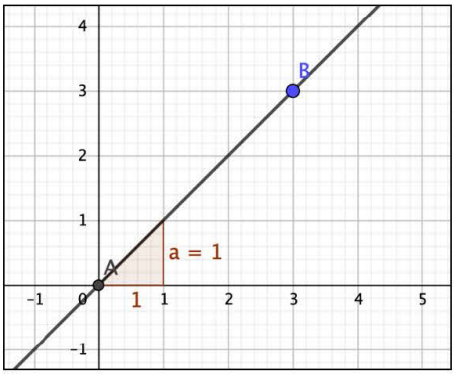
Reta: Selecione a opção: "reta" no software, conforme a seguir:



Selecione dois pontos quaisquer no plano e o software mostrará a reta. Para saber a inclinação, selecione a opção a seguir:

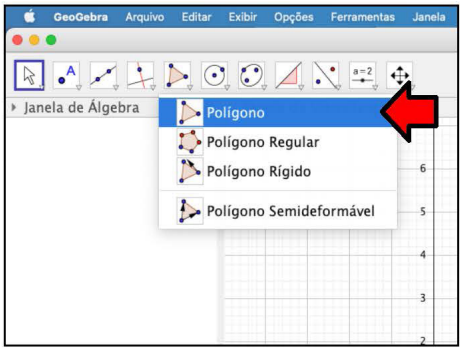


Em seguida clique sobre a reta. O software mostrará o coeficiente angular da reta:

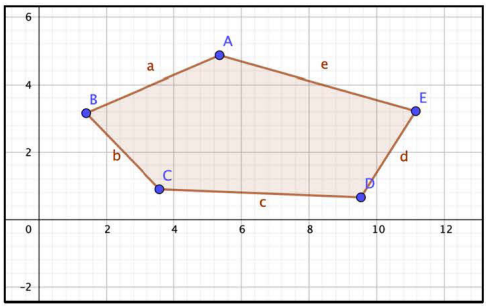


Outros elementos da reta já foram vistos na seção 6.4 – volume 1 (função afim no geogebra).

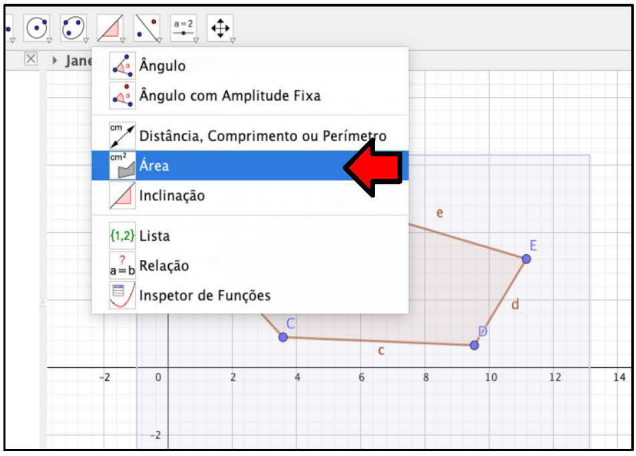
Polígono: Para construir um polígono selecione a opção: "polígono", conforme a seguir.



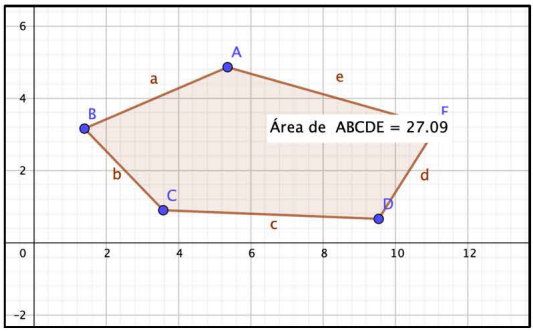
Clique sobre o plano para definir os pontos (vértices) do polígono, no sentido que desejar, desde que o último ponto seja o primeiro (é preciso fechar o polígono). Veja um exemplo a seguir:



Uma vez construído o polígono, vá em ferramentas e selecione a opção: "área", conforme a seguir:

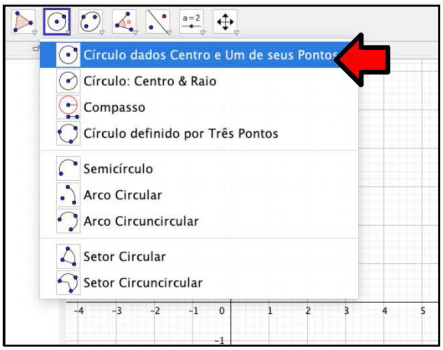


Clique sobre o polígono e software mostrará sua área:



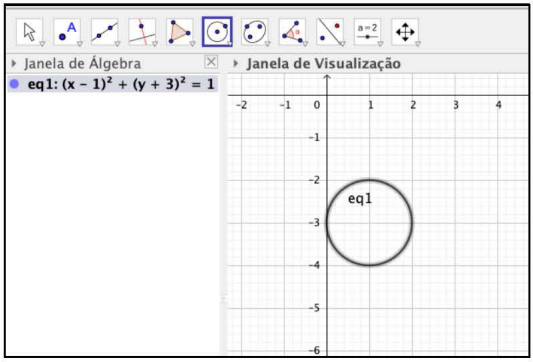
O mesmo procedimento se aplica para o cálculo da área de qualquer outro objeto fechado: circunferências, elipses, etc.

Circunferências: Para construção de circunferências, selecione a opção no software referente circunferência, conforme a seguir:

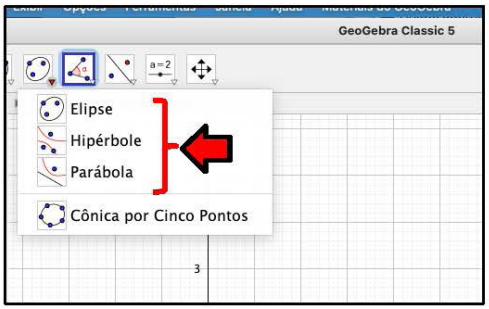


Para a opção escolhida na imagem anterior é preciso dar dois cliques no plano cartesiano para representar dois pontos: o centro e a borda da circunferência.

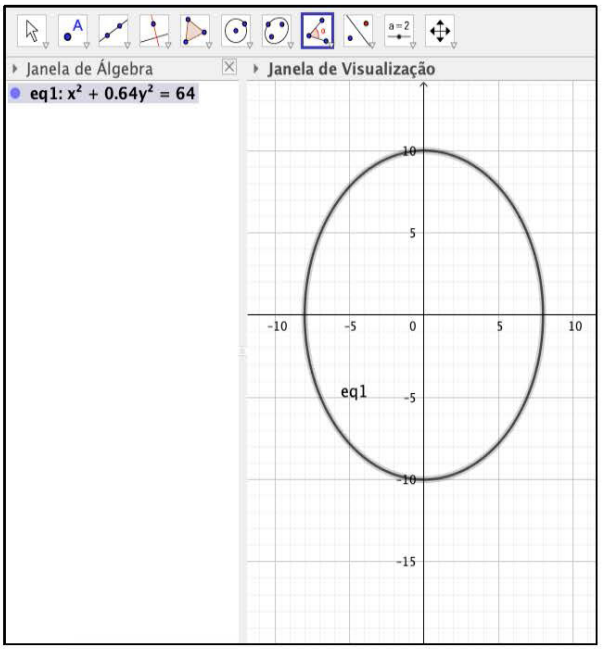
Outra forma de representar uma circunferência é digitando a sua equação no campo de entrada. Veja o exemplo de: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 9 = 0$.



Cônicas: Para construção de cônicas, selecione a opção no software referente a cônica desejada, conforme a seguir:



Se preferir, digite no campo de entrada do software a equação da cônica. Como exemplo, veja a representação da elipse: $\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$:



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGROPÓS. Agropós. **Pragas Agrícolas que mais Afetam a Agricultura!**, 2018. Disponivel em: <https://agropos.com.br/pragas-agricolas/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

AGROREPORTER. **calibracao de pulverizador costal manual**, 2018. Disponivel em: <http://agroreporter.com.br/calibracao-de-pulverizador-costal-manual/>. Acesso em: 23 mar. 2019.

ALBUQUERQUE, F. D. S. et al. Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental. **Crescimento e rendimento de pimentão fertigado sob diferentes lâminas de irrigação e doses de potássio**, Campina Grande, v. 15, n. 07, jul. 2011.

ALVES, J. J. L. et al. Revista Brasileira de Plantas Medicinais. **Cinética de secagem das folhas de Hyptis suaveolens**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 168-176, 2017.

AMARO, G. B. Embrapa. **Adubos e fertilizantes**, 2019. Disponivel em: <http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/pimenta/arvore/CONT000gn08zc7m02wx5ok0liq1mqw825isw.html>. Acesso em: 02 abr. 2019.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. II, 2014.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. I, 2014.

ARAGUAIA, M. Brasil escola. **Escherichia coli**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/biologia/escherichia-coli.htm.>. Acesso em: 03 dez. 2020.

BATALHA, M. O. **Gestão agroindustrial - Gepai - grupo de estudos e pesquisas**. São Paulo: Atlas, 2017.

BEEFPOINT, E. Beefpoint educação. **O rendimento da carcaça bovina**, 2002. Disponivel em: <https://www.beefpoint.com.br/o-rendimento-da-carcaca-bovina-4992/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

BOSCO, L. C. et al. Revista brasileira de fruticultura. **Seleção de modelos de regressão para estimar a área foliar de macieiras 'royal gala' e 'fuji suprema' sob tela antigranizo e em céu aberto**, Jaboticabal, v. 34, p. 504-514, jun. 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1996.

BRITO, F. Agroceres. **Matéria Seca**, 2017. Disponivel em: <https://agroceresmultimix.com.br/blog/ajuste-materia-seca/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

CARMO, M. P. D.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria, números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CEPEA/ESALQ. Agrolink. **Preço do café arábica sobe 8,7% em novembro**, 2010. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/noticias/preco-do-cafe-arabica-sobe-8-7--em-novembro_122759.html>. Acesso em: 05 abr. 2019.

CEPLAC. gov.br. **Quantos peixes coloco no viveiro?**, 2018. Disponivel em: <http://www.ceplac.gov.br/restrito/publicacoes/cartilhas/CT_03.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2019.

CHAVES, L. H. G. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento, distribuição e acúmulo de cobre e zinco em plantas de pinhão-manso**, Fortaleza, v. 41, n. 2, p. 167-176, jun. 2010.

COUTO, R. H. N. **Apicultura - manejo e produtos por Regina Helena Nogueira Couto e Leomam Almeida Couto.** Jaboticabal: FUNEP, 2006.

CRUZ, F. G. G. **Formulação e fabricação de racões**. Manaus: EDUA, 2017.

DALL'AGNOL, A. Agrolink. **A saga da soja no Brasil e no Mundo**, 2017. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/colunistas/coluna/a-saga-da-soja-no-brasil-e-no-mundo_400724.html>. Acesso em: 29 jun. 2019.

DIAS, V. R. D. M. et al. Centro científica conhecer. **Relação entre a radiação fotossinteticamente ativa interceptada e a formação de matéria seca de frutos de manga**, 2011. Disponivel em: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2011a/agrarias/relacao%20entre%20radiacao.pdf>. Acesso em: 27 maio 2019.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometrial espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, v. 10, 1993.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. São Paulo: Atual, v. 9, 1993.

EMBRAPA. Ageitec. **Origem da acidez**, 2018. Disponivel em: <https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/soja/arvore/CONTAG01_34_271020069132.html>. Acesso em: 21 jun. 2019.

EMBRAPA. **Nova cultivar de açaizeiro vai manter fornecimento do fruto o ano todo**, 2019. Disponivel em: <https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/48210103/nova-cultivar-de-acaizeiro-vai-manter-fornecimento-do-fruto-o-ano-todo>. Acesso em: 12 dez. 2019.

EXTRA. Globo. **Alcool ou gasolina qual a melhor opcao?**, 2012. Disponivel em: <https://extra.globo.com/economia/100-dias-de-economia/alcool-ou-gasolina-qual-a-melhor-opcao-5378674.html>. Acesso em: 07 abr. 2013.

FERREIRA, R. S. **Matemática aplicada às ciências agrárias**. Viçosa : UFV, 1999.

FILHO, A. A. et al. Pubvet. **Ganho em peso médio diário de diferentes grupos genéticos de bovinos de corte**, v. 11, n. 1, p. 87-90, jan. 2017.

FILHO, A. F. D. O. et al. Revista verde de agroecologia e desenvolvimento sustentável. **crescimento de cultivares de mamoneira sob doses de torta de mamona**, Mossoró, v. 5, n. 5, p. 18-24, out. 2010.

FILHO, P. D. S. E. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Parâmetros físicos do solo relacionados com o avanço da frente de molhamento**, Campina grande, v. 17, n. 2, p. 153-161, 2013.

FORMICONI, I. Farmnews. **Preços do milho e seu comportamento ano a ano**, 2016. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/comportamento-precos-milho/>. Acesso em: 19 abr. 2019.

FORMICONI, I. Farmnews. **Variação anual dos preços de soja**, 2018. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/variacao-anual-dos-precos-da-soja/>. Acesso em: 20 maio 2019.

FRANCISCO, W. D. C. E. Brasil Escola. **Escala Richter**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/escala-richter.htm>. Acesso em: 27 jun. 2019.

FREIRE, F. D. **Caderno de Matemática do ensino médio**. Macapá: [s.n.], v. 1, 2, 3 e 4, 2013.

FREIRE, F. D. **o uso de um livro-caderno de matemática alternativo em sala de aula:** praticidade e coerência didática voltadas para a realidade local e tecnológica. Macapá: Dissertação de mestrado, 2014.

GONCALVES, F. P. Universidade de São Paulo. **Progresso poliético e quantificação de danos da clorose Variegada dos citros em laranjeiras "natal" submetidas a deficit hídricos**, Piracicaba, 2010.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, v. 5, 1993.

HERRMANN, J. C.; KINETZ, S. R. R.; ELSNER, T. C. UNIJUÍ. **Modelagem matemática no cultivo do alface**, 2019. Disponivel em: <https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/alface/index.html>. Acesso em: 23 jun. 2019.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. São Paulo: Atual, v. 6, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria analítica. São Paulo: Atual, v. 7, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** trigonometria. São Paulo: Atual, v. 3, 1993.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** logarítmos. São Paulo: Atual, v. 2, 1993.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, v. 4, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** conjuntos, funções. São Paulo: Atual, v. 1, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar:** limites, derivadas, noções de integral. São Paulo: Atual, v. 8, 1993.

INSTITUTOAGRO. **Curso de produção agrícola**, 2019. Disponivel em: <https://institutoagro.com.br/custo-de-producao-agricola/>. Acesso em: 14 abr. 2019.

KHAN ACADEMY. **Crescimento exponencial e logístico**. Disponivel em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth>. Acesso em: 28 jun. 2019.

LACERDA, J. R. et al. XXXV congresso brasileiro de ciência do solo. **Fertilizante fosfatado revestido com polímero no crescimento e fisiologia do cafeeiro**, Natal, ago. 2015.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA e fundação vitae, 1991.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2ª edição. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio - volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2006.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 3**. Rio de Janeiro: SBM, v. 3, 2006.

LUZ, M. J. D. S.; FERREIRA, G. B.; BEZERRA, J. R. C. Adubação e Correção do Solo: Procedimentos a Serem Adotados em Função dos Resultados da Análise do Solo. **EMBRAPA**, Campina Grande, out. 2002. ISSN 0100-6460.

MARCONDES, L. A.; BUENO, S. M. Revistas unilago. **Processo de lavagem a seco de cana de açúcar**, 2019. Disponivel em: <http://revistas.unilago.edu.br/index.php/revista-cientifica/article/view/220/196>. Acesso em: 25 jan. 2020.

MARTINS, G.; VASCONCELLOS, E. F. C.; LUCCHES, A. A.. Anais da escola superior de agricultura "Luiz de Queiroz". **Correlações entre parâmetros de análise de crescimento de cultivares tomateiro**, Piracicaba, v. XLII , 1985.

MARTINS, W. A. C. et al. Anais III SINPROVS. **Análise do feijão Caupi (vigna unguiculata) (l.) walp.) submetido a estresse hídrico e diferentes doses de biofertilizantes**, 2018. Disponivel em: <http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/40282>. Acesso em: 03 dez. 2020.

MASCARENHAS, J. R. O. Brazil document. **Densidade de plantio**, 2018. Disponivel em: <https://document.onl/documents/densidade-de-plantio.html>. Acesso em: 03 15 2019.

MENDES, J. T. G.; JUNIOR, J. B. P. **Agronegócio - uma abordagem econômica**. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

MENDES, L. G. Lavoura. **Cálculo de semadura da soja**, 2019. Disponivel em: <https://blog.aegro.com.br/calculo-de-semeadura-soja/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, P. E. A. **Projeções do agronegócio**. 7ª. ed. Brasília: SPA/mapa, 2016.

MORAIS, S. J. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Modelagem matemática das curvas de secagem e coeficiente de difusão de grãos de feijão-caupi (Vigna unguiculata (L.) Walp.)**, Fortaleza, v. 44, n. 3, p. 455-463, set. 2013.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Fertilidade do solo e estado nutricional da alfafa cultivada nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2007.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Cultivo e utilização da alfafa nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2008.

MURTEIRA, B. et al. **Introdução à estatística**. Lisboa: Escolar editora, 2015.

NETO, A. C. M. **Combinatória**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** polinômios. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NEVES, M. F.; ZYLBERSZTAJN, D.; NEVES, E. M. **Agronegócio do Brasil**. São Paulo: Saraiva, 2005.

OLIVEIRA, R. L. L. D. et al. Agroenergia. **estimativa de área foliar de feijão caupi cultivar brs tumucumak através de modelos matemáticos**, 2014. Disponivel em:

<http://www.infobibos.com/Agroenergia/CD_2014/Resumos/ResumoAgroenergia_2014_038.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2019.

PACHECO, E. P. EMBRAPA. **Seleção e custo operacional de máqinas agrícolas**, 2000. Disponivel em: <http://iquiri.cpafac.embrapa.br/pdf/doc58.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2019.

PANACHUKI, E. et al. Acta Sci., Agron. (Online). **Avaliação da infiltração de água no solo, em sistema de integração agricultura-pecuária, com uso de infiltrômetro de aspersão portátil**, Maringá, v. 28, n. 1, p. 129-137, jun. 2006.

PEIXOTO, C. P. et al. **Curso de fisiologia vegetal**. Cruz das almas: UFRB, 2020.

PIRES, A. V. **Bovinocultura de corte**. Piracicaba: FEALQ, 2010.

POPOV, D. Canal rural. **Confira 6 métodos de plantio para a soja e veja qual é melhor!**, 2017. Disponivel em: <https://www.canalrural.com.br/projeto-soja-brasil/noticia/saiba-qual-e-o-melhor-metodo-de-plantio-para-soja/#:~:text=das%20seis%20t%C3%A9cnicas%3A-,Plantio%20Cruzado,e%20uma%20semente%20por%20cova.>. Acesso em: 24 mar. 2019.

PRATES, F. B. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento de mudas de pinhão-manso em resposta a adubação com superfosfato simples e pó-de-rocha**, Montes Claro, v. 43, n. 2, p. 207-213, jun. 2012.

PRATES, M. Exame. **Os números que mostram o poder do agronegócio brasileiro**, 2014. Disponivel em: <https://exame.com/economia/os-numeros-que-mostram-o-poder-do-agronegocio-brasileiro/>. Acesso em: 03 abr. 2019.

PREFEITURA MUNICIPAL DE PORTO GRANDE. Plano Diretor Participativo do Município de Porto Grande. **Diagnóstico das condicionantes, deficiências e potencialidades municipais, propostas e ações**, 2013. Disponivel em: <https://ferreiragomesenergia.com.br/wp-content/uploads/sites/3/2018/04/2013.06.03-Plano-Diretor-Porto-Grande.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2019.

REIS, G. G. D. Embrapa. **Análise e crescimento das plantas - mensuração do crescimento**, 2018. Disponivel em: <https://www.alice.cnptia.embrapa.br/bitstream/doc/374936/1/FL00953.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2019.

REIS, L. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Índice de área foliar e produtividade do tomate sob condições de ambiente protegido**, Campina Grande, v. 17, n. 4, p. 386-391, jan. 2013.

REUTERS. G1 AGRO. **IBGE vê safra de café 10,8% menor em 2019, a 53,4 milhões de sacas**, 2019. Disponivel em: <https://g1.globo.com/economia/agronegocios/noticia/2019/01/10/ibge-ve-safra-de-cafe-108-menor-em-2019-com-534-milhoes-de-sacas.ghtml>. Acesso em: 24 abr. 2019.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipcione, v. 1, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 2, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 3, 2010.

RIBEIRO, R. C. ufrrj. **Estabelecimento de Leguminosas em Pastagens de Brachiaria humidicola: Variações Sazonais de Atributos do Dossel Vegetativo** , Seropédica, p. 1, 27-32, set. 2006.

SEAGRI, A. Estado de Alagoas. **Agricultores do Sertão produzem mais de 45 sacos de milho por tarefa**, 2011. Disponivel em: <http://www.agricultura.al.gov.br/sala-de-imprensa/noticias/2011/dezembro/agricultores-do-sertao-produzem-mais-de-45-sacos-de-milho-por-tarefa>. Acesso em: 01 abr. 2019.

SILVA, É. D. B. D. Agronegócio em foco. **Estimando a produtividade na cultura da soja**, 2015. Disponivel em: <http://www.pioneersementes.com.br/blog/46/estimando-a-produtividade-na-cultura-da-soja>. Acesso em: 25 jun. 2019.

SILVA, G. J.; MAIA, J. C. D. S.; BIANCHINI, A. Revista brasileira de ciências do solo. **Crescimento da parte área de plantas cultivadas em vaso**, Cuiabá, p. 30;31-40, 2006.

SILVA, I. D.; SEGANTINE, P. L. **Exercícios de topografia:** teoria e prática de geomática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

SILVA, J. A. A. D.; NETO, F. D. P. **Princípios básicos de dendrometria**. Departamente de Ciência Florestal - Brasília: UNB, 1979.

SILVA, M. N. P. D. Brasil escola. **Medidas Agrárias**, 2018. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/medidas-agrarias.htm>. Acesso em: 15 mar. 2018.

SORATTO, R. P. et al. Revista Ciência Agronômica. **Fontes alternativas e doses de nitrogênio no milho safrinha em sucessão à soja**, Fortaleza, v. 41, n. 4, p. 511-518, dez. 2010.

SOUZA, D. P. D. et al. XLV Congresso brasileiro de engenharia agrícola. **Caracterização do coeficiente de extinsão de cultivares de cana-de-açúcar**, Florianópolis, jul. 2016.

SOUZA, N. Estadão. **Milho ganha novo espaçamento**, São Paulo, 28 maio 2008. Disponivel em: <https://www.estadao.com.br/noticias/geral,milho-ganha-novo-espacamento,179169>. Acesso em: 22 mar. 2020.

TAVARES, G. D. S. et al. International Journal of Development Research. **Análise da produção e comercialização de açaí no estado do Pará - Brasil**, Belém, v. 10, n. 04, p. 35215-35221, abr. 2020. ISSN 2230-9926.

TECHTUDO. Eletrônicos. **Churrasqueira que funciona à luz solar começa a ser exportada**, 2011. Disponivel em: <https://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2011/10/churrasqueira-que-funciona-luz-solar-comeca-ser-exportada.html>. Acesso em: 01 jul. 2019.

THUM, A. B. et al. **Topografia para estudantes de Arquitetura, Engenharia e Geologia**. São Leopoldo: UNISINOS, 2003.

TIDESCHART. **Horários e tábuas de marés para Macapá**, 2019. Disponivel em: <https://pt.tideschart.com/Brazil/Amapa/Macapa/>. Acesso em: 01 ago. 2019.

TONINI, H.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Revista do Centro de Ciências Rurais. **O crescimento da Nectandra megapotamica Mez., em floresta nativa na depressão central do Estado do Rio Grande do Sul**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p. 85-90, fev. 2003.

TSUNECHIRO, A.; MARTINS, V. A. Instituto de Economia Agrícola (IEA). **Produção recorde de sorgo no Estado de São Paulo**, 2003. Disponivel em: <http://www.iea.agricultura.sp.gov.br/out/LerTexto.php?codTexto=837>. Acesso em: 15 maio 2019.

VELOSO, C. A. C. et al. Embrapa. **Resposta diferencial de cultivares de milho em função da adição da adubação fosfatada em latossolo amarelo do oeste paraense**, Belém, dez. 2005.

WIKIPÉDIA. **jogo de memória**, 2019. Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_de_mem%C3%B3ria>. Acesso em: 27 ago. 2019.

TABELAS

Tabela 1: Tabela sobre unidades de medidas

Unidades de comprimento:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida
Múltiplos:	Quilômetro	km	$1000\ m$
	Hectômetro	hm	$100\ m$
	Decâmetro	dam	$10\ m$
Unidade fundamental	Metro	m	$1\ m$
Submúltiplos:	Decímetro	dm	$0{,}1\ m$
	Centímetro	cm	$0{,}01\ m$
	Milímetro	mm	$0{,}001\ m$

×10 ÷10

Unidades de área:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro quadrado	km^2	$1.000.000\ m^2$
	Hectômetro quadrado	hm^2	$10.000\ m^2$
	Decâmetro quadrado	dam^2	$100\ m^2$
Unidade	Metro quadrado	m^2	$1\ m^2$
Submúltiplos:	Decímetro quadrado	dm^2	$0{,}01\ m^2$
	Centímetro quadrado	cm^2	$0{,}0001\ m^2$
	Milímetro quadrado	mm^2	$0{,}000001\ m^2$

×100 ÷100

Unidades de volume:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro cúbico	km^3	$1.000.000.000\ m^3$
	Hectômetro cúbico	hm^3	$1.000.000\ m^3$
	Decâmetro cúbico	dam^3	$1000\ m^3$
Unidade	Metro cúbico	m^3	$1\ m^3$
Submúltiplos:	Decímetro cúbico	dm^3	$0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$0{,}000000001\ m^3$

×1000 ÷1000

Algumas unidades de volume são relacionadas com as medidas de capacidade:

Categoria	Volume	Capacidade
Múltiplos	$1\ m^3$	1000 litros ($1000l$)
Unidade fundamental	$1\ dm^3$	1 litro ($1l$)
Submúltiplos:	$1\ cm^3$	1 mililitro ($1ml$)

Medidas agrárias:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em m²
Múltiplo:	Hectare	ha	$10.000\ m^2$
Unidade fundamental	Are	a	$100\ m^2$
Submúltiplo:	Centiare	ca	$1\ m^2$

Tabela 2: Tabela trigonométrica

(°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,02	0,707107	0,707107	1,03553
46	0,80	0,71934	0,694658	1,072369
47	0,82	0,731354	0,681998	1,110613
48	0,84	0,743145	0,669131	1,150368
49	0,86	0,75471	0,656059	1,191754
50	0,87	0,766044	0,642788	1,03553

(°)	Rad	sen	cos	tg
51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
59	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
86	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
87	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
88	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
89	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
90	1,57	1	0	∄
120	2,09	0,866025	-0,5	-1,732051
150	2,62	0,5	-0,866025	-0,57735
180	3,14	0	1	0
210	3,67	-0,5	-0,866025	0,57735
240	4,19	-0,866025	-0,5	1,732051
270	4,71	-1	0	∄
300	5,23	-0,866025	0,5	-1,732051
330	5,76	-0,5	0,866025	-0,57735
360	6,28	0	1	0

GABARITOS E SOLUÇÕES

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.1

1)
a) $42°12'$
b) $36º39'$
c) $128º25'30''$
d) $13'20''$

---

2)
a) $3{,}41666...°$
b) $15{,}668°$
c) $135{,}4236°$
d) $180{,}0041666...°$

3)
a) $64°28'30''$
b) $94°44'04''$
c) $03°30'02''$
d) $27°09'51''$
e) $345º54'36''$
f) $358º59'59''$
g) $0º$

---

4)
a) $x = 10°$
b) $x = 10°$
c) $x = 5°$
d) $x = 5°$
e) $x = 64°24'35''$
f) $x = 74°44'50''$
g) $x = 60°\ e\ y = 60°$
h) $x = 3°\ e\ y = z = 147°$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.2

1)
a) $x = 17$
b) $x = 8$
c) $x = 33$
d) $x = 37$
e) $x = \sqrt{110}$
f) $x \cong 2{,}2$
g) $x = 24$
h) $x = 10$
i) $x = 10$
j) $x = 2\sqrt{11}$
k) $x = 9$
l) $x = 1$

---

2) $x = 0{,}9m$
3)1060 metros de arame
4)A estratégia consiste em construir o canteiro retangular de forma que a diagonal meça 58 metros.
5)Letra d.
6)Letra d.
7)Letra e.
8)Letra a.
9)12,50 metros.
10)6.200 metros.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.3

1)
a) $x = 23{,}04$
b) $x \cong 19{,}04$
c) $x = 3{,}2$
d) $x = 11{,}36$
e) $x \cong 2$
f) $x = 15$

*2)*200 metros.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.4

1)
a) $\alpha = 12°$
b) $\alpha = 28°$
c) $\alpha \cong 54°$
d) $\alpha = 60°$
e) $\alpha = 45°$
f) $\alpha = 120°$

---

2)

a) $x = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

b) $x = 11$ e $y = 11$

c) $x = 27$ e $y = 18\sqrt{3}$

d) $x = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

e) $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{16\sqrt{3}}{3}$

f) $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{4}{3}$

---

3)

a) $\alpha = 135°$

b) $\alpha = 45°$

---

4) A altura do tronco era de aproximadamente 6,92.

5) Letra c.

6) Aproximadamente 70,71 metros.

7) Letra c.

8) Letra c.

9)

a) H =12m.

b) 11,72m.

c) H = $\frac{20\sqrt{3}}{3}$m.

---

10) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ m.

11) a) $35m$ b) $x = 6m$.

12) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.5

1)

a) $x = 30°$ e $y = 150°$

b) $x = 75°$ e $y = 70°$

c) $x = 80°$ e $y = 110°$

d) $x = 60°$ e $y = 30°$

---

2)

a) $x = 140°/3$ e $y = 260°/3$

b) $x = 10°$ e $y = 80°$

c) $x = 50°$ e $y = 80°$

d) $x = 60°$ e $y = 60°$

---

3)

a) $x = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

b) $x = 8$

c) $x = 7$

d) $x = 7$

e) $x = 15$

f) $x = 45°$

g) $x = 2$

h) $x = 60°$

i) $x \cong 82°$

j) $x \cong 75°$

---

4) 4 rolos.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.6

1)

a) $\frac{25\sqrt{3}}{2}\,u.a$

b) $10\,u.a$

c) $300\,u.a$

d) $10\sqrt{3}\,u.a$

e) $120\,u.a$

f) $36\sqrt{3}\,u.a$

g) $500\,u.a$

h) $\frac{196\sqrt{3}}{3}\,u.a$

---

2)

a) $114\,u.a$

b) $51\sqrt{3}\,u.a$

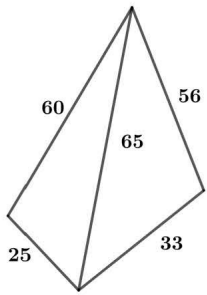
---

3)

a) Erro de 00º00'19'' a maior.
b) 8400m²
c) $20\sqrt{13}\ m$
d) $24 + 25\sqrt{13}\ m^2$
e) $2700\sqrt{13}\ m^2$

---

4) Dividir o terreno em dois triângulos passando uma diagonal. Medir os lados dos dois triângulos formados. Em seguida, utilizar a fórmula de Heron para calcular a área de cada triângulo e somar os resultados. Um exemplo está seguir cuja área é A = 1674 u.a.



GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.7

1)
a) $x = 65\ u.c$ **e** $y = 9\ u.c$
b) $x = 14\ u.c$ **e** $y = 0{,}3\ u.c$
c) $x = 10cm$ **e** $y = 18cm$
2) Letra d.
3)
a) $x = 8/3\ m$
b) $x = 3cm$ **e** $y = 1{,}5cm$
4) *80m, 60m e 40 m.*
5)Letra c.
6)3cm²
7)$3{,}6m$
8)$70m$
9) $3m$
10) Perímetro:I – 70m, II – 8m e III - 88m.
Área: I – 250m², II – 416m² e III – 280m².

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.8

1)
a) $100cm^2$
b) $64cm^2$
c) $36cm^2$
d) $220cm^2$
e) $200cm^2$
f) $625cm^2$
g) $216cm^2$
h) $56cm^2$
i) $30\sqrt{3}\ u.a$
j) $\frac{871\sqrt{3}}{8}cm^2$
k) $25\sqrt{3}\ u.a$
l) $840\ u.a$

---

2) Segundo o teorema de Pitágoras, cada lado é igual $\sqrt{a^2 + b^2}$ e como os ângulos adjacentes a cada ângulo interno são complementares, então cada um mede 90º. Portanto, é um quadrado.

---

3)Letra e.
4)Letra b.
6)Letra c.
5)Letra b.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.9

1)
a) $x = 31°$
b) $x = 34°$
c) $x = 50°$
d) $x = 72°$

---

2)
a) $128{,}57°$
b) $144°$
3)
a) $1080°$
b) $3240°$
4) Heptágono
5) 44 diagonais.
6)
a) $162°$
b) $168°$

7)
a) $x = 75°$
b)$x = 55°$
8)
a) $x = 94°$
b) $x = 55°$
9) Letra d.
10)Letra e.
11)$x = 70°$
12) Demonstração a cargo do leitor.

13)
a) $\theta = 43{,}1°$
b) $\theta = 113{,}68°$
c) $\theta = 79°22'45''$
d) $\theta = 75°55'10''$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 10.10

1)
a) $25\pi cm^2 e 10\pi cm.$
b) $49\pi cm^2 e 14\pi cm.$

2) $50\pi cm^2 e 10\pi cm$
3) 2cm
4)Letra c.
5)Letra e.
6)70.650m²
7)
a) $12\pi m^2.$
b) $25\pi m^2.$
8)
a) $20cm^2$
b) $10825\pi cm^2.$
9)
a) $16 - 4\pi cm^2.$
b) $32 - 8\pi cm^2.$
c) $3\pi - 9\sqrt{3}/4\ cm^2.$
d) $16\ (\sqrt{3} - \pi/3)\ cm^2.$
e) $144 - 36\pi cm^2$
f) $100\pi - 150\sqrt{3}cm^2$
10) $8\pi - 16cm^2$
11)
a) $18\pi - (9/2)\pi cm^2.$
b) $9\pi cm^2.$
12)$(63/2)\pi cm^2$
13)
a) $DAP = CAP/\pi.$
b) $A = \pi(DAP)^2/4.$
14)Letra a.
15)Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 11.1

1)
a) $\frac{\pi}{4}\ rad.$
b) $\frac{11\pi}{6}\ rad.$
c) $\frac{2\pi}{5}\ rad.$
d) $\frac{\pi}{180}\ rad.$

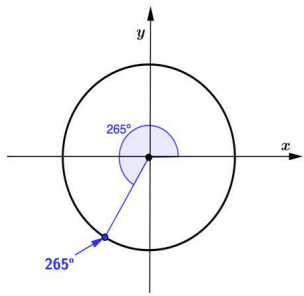
2)
a) $100°$
b) $60°$
c) $70°$
d) $\cong 171{,}89°$

3) $\frac{6\pi}{13}\ rad.$
4)
a) 172,5° b) 82,5° c)17,5°
5)Letra b.
6)Letra c.
7)Letra b.
8)Letra a.

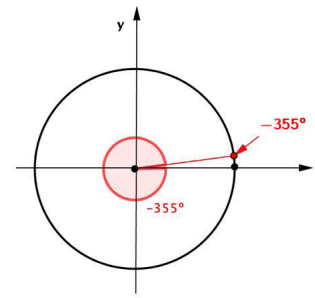
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 11.2

1)

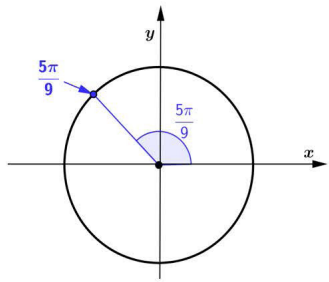
a)



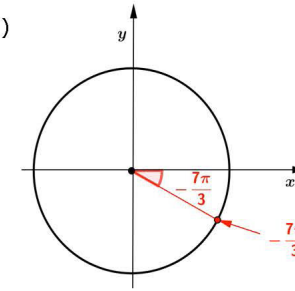
b)



c)



d)



2)

a) 221°

b) 125°

c) $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{13\pi}{18}$

3) Letra d.

4) Letra b.

5) ≅59,9 m.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 11.3

1)

a) $\text{sen}330^o = -\frac{1}{2}$, $\cos 330^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg}330^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\text{sen}(-870^o) = -\frac{1}{2}$, $\cos(-870^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg}(-870^o) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\text{sen}(\frac{7\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{7\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{tg}(\frac{7\pi}{4}) = -1$

d) $\text{sen}(\frac{35\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\frac{35\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\text{tg}(\frac{35\pi}{4}) = -1$

2)

a) $\frac{1}{2}$ b) 0

---

3)

a) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

b) $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

c) $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ ou $x = \frac{11\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$

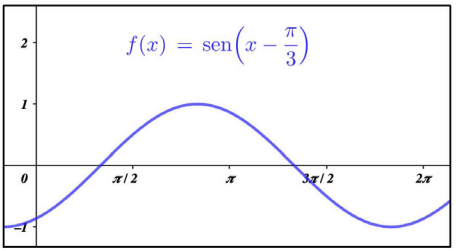
---

4)Letra c.
5)Letra a.
6)Letra e.
7)Letra e.
8) 58º.

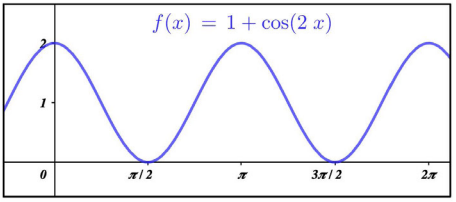
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 11.4

1)

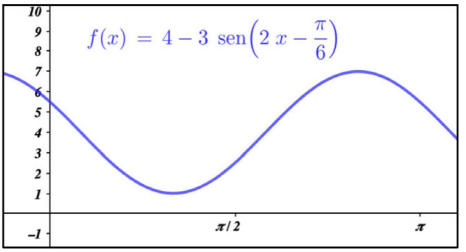
a) $I_m = [-1,1]$, P = 2π e A = 1.



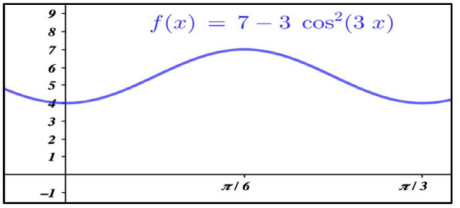
b) $I_m = [0,2]$, P = 2π e A = 1.



c) $I_m = [1,7]$, P = π e A = 2.



d) $I_m = [4,7]$, P = π/3 e A = 3/2.

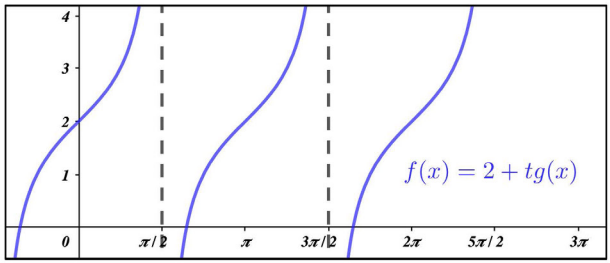


---

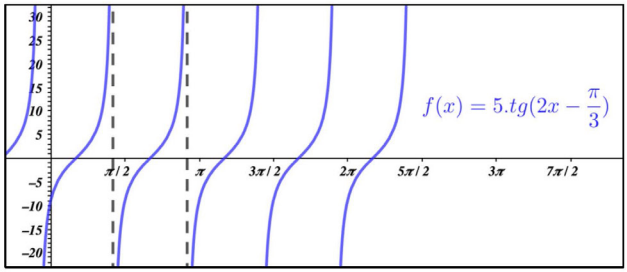
2) P = 8π
3) $I_m = [4,16]$
4) Função constante $f(x) = 6$.
5) 1/2

---

6)
a) $I_m = \mathbb{R}$ e P = π



b) $I_m = \mathbb{R}$ e P = π/2



7) Letra a.
8) Letra c.
9) Letra b.
10) Letra c.
11) Letra c.
12) Letra b.

---

13)

a) $f(m) = 9 - 2.cos\left(\frac{-\pi}{6}m + \frac{13\pi}{6}\right)$

b) $R\$\ 9{,}00.$

---

14) $f(x) = \frac{7}{4} + \frac{5}{4}.sen\left(\frac{-\pi}{5}x + \frac{23\pi}{10}\right)$

15) $f(x) = 15 + 4.cos\left(\frac{-\pi}{2}x + \frac{11\pi}{4}\right)$

---

16)

a) $t = 12$

b) $20°C$ às $12{:}00\ h.$

---

17) Letra b.
18) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 11.5

1) Letra b.
2) Letra c.
3)

a) sen75° = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, cos75° = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e tg75° = $2+\sqrt{3}$

b) sen105° = $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, cos105° = $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ e tg105° = $-2-\sqrt{3}$

c) sen165° = $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, cos165° = $\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e tg165° = $-2-\sqrt{3}$

d) sen $\left(\frac{29\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, cos$\left(\frac{29\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ e tg$\left(\frac{29\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$

4) sen$(x + y) = \frac{-63}{65}$

5) tg$(x + y) = \frac{-44}{117}$

6) tg$(x - y) = -1$

7) sen$(2x) = \frac{24}{25}$

8) sen$(2x) = \frac{336}{625}$; cos$(2x) = \frac{527}{625}$; tg$(2x) = \frac{336}{527}$; sen$(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$; cos$(\frac{x}{2}) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$ e tg$(\frac{x}{2}) = \frac{1}{7}$.

9) Letra e.

10) $sen3x = -4\,sen^3x + 3senx;\ cos3x = 4\,.cos^3x - 3cosx;\ tg\ 3x = \frac{3.tgx-tg^3x}{1-3.tg^2x}$

11)

a) $2.sen3x.cos2x$

b) $-2.sen2x.senx$

c) $2.cos^2(\frac{x}{2})$

d) $4.cosx.sen2x.cos4x$

12)

a) $\frac{sen4x}{2}$

b) $\frac{sen8x-sen2x}{2}$

13)

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$

14) Usando o arco complementar encontramos: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15) Para demonstração use a fórmula da soma em produto e também a igualdade: senc = sen$(\frac{c}{2})$. cos$(\frac{c}{2})$.

16) Letra c.

17) A = 67,56m².

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 11.6

1)sec30º = $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, cossec30º = 2 e cotg30º = $\sqrt{3}$.

2)sec45º = $\sqrt{2}$, cossec45º = $\sqrt{2}$ e cotg45º = 1.

3)sec15º = $\frac{2(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}$, cossec15º = $2(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ e cotg15º = $2+\sqrt{3}$.

4) $cotgx = \frac{1}{2}$, $secx = -\sqrt{5}$, $cosx = \frac{-\sqrt{5}}{5}$, $cossecx = \frac{-\sqrt{5}}{2}$ e $senx = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$.

5)$cotgx = \frac{-\sqrt{6}}{12}$, $secx = 5$, $tgx = -2\sqrt{6}$, $cossecx = \frac{-5\sqrt{6}}{12}$ e $senx = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$.

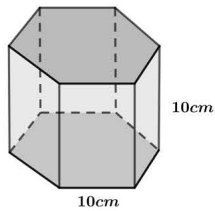
6)Demonstrações a cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 12.1

1)7 vértices.
2)18 arestas.
3)Um tetraedro.
4)21 arestas e 13 vértices.
5)88 arestas e 122 vértices.
6)Não. Pois, segunda a relação de Euler o sólido teria uma face, o que é impossível para um poliedro.
7)8 faces.
8)
a)V = 10; A = 15 e F = 7.
b)V = 6; A = 12 e F = 8.
a)V = 13; A = 24 e F = 13.
9)Letra a.
10)Letra d.
11)Letra b.
12)Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 12.2

1)150cm³.
2)3cm.
3)13m.
4)Letra a.
5)284cm² e 343cm³.
6)O sólido é um prisma regular de base hexagonal. Possui 12 vértices e 8 faces.



7)
a)1014cm² e 2197cm³.
b)360m² e 600m³.
c)$23+5\sqrt{10}$cm² e 7,5cm³.
d)$363\sqrt{3}+1320$cm² e $3630\sqrt{3}$cm³.
e)$144+12\sqrt{6}$cm² e $48\sqrt{6}$cm³.
f) $40+24\sqrt{3}$m² + $60\sqrt{3}$m³.

8)$5\sqrt{3}$m e 125m³.
9)13m.
10)1,5m.
11)4 viagens.
12)Letra b.
13)Letra d.
14)Letra b.
15)Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 12.3

1)20cm³.
2)700cm³.
3)3m.
4)
a)$180\sqrt{3}$cm³.
b)1568cm³.
c)105cm³.
d)$4\sqrt{2}/3$ m³.
5)Letra d.
6) a) 832cm³. b) $126\sqrt{3}$cm³.
7) a) $24\sqrt{3}$cm³. b) $480\sqrt{3}$cm³.
8)1350cm³.
9)Letra d.
10)$200\sqrt{2}/3$ cm³.
11)344/3 m³ ou ≅114,67 m³.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 12.4

1)$2\pi cm^3$.
2)$4500\pi cm^3$.
3)$78,5m^3$.
4)≅12,6 litros.
5)O volume aumenta em 9 vezes.
6)9m.

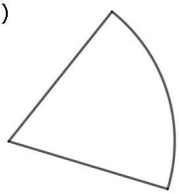
7)
a)$304\pi cm^2$ e $704\pi cm^3$.
b)$312\pi cm^2$ e $720\pi cm^3$.
c)$342\pi cm^2$ e $162\pi cm^3$.
d)$49(1+2\sqrt{3})/2$ m^2 e $343\sqrt{3}\pi/4$ m^3.

8)$2\sqrt{2}\pi m^3$.
9)
a)$360\pi m^3$
b)$192\pi m^2$
10)Letra d.
11)Letra b.
12)Letra d.
13)Letra b.
14)Letra a.

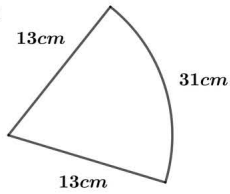
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 12.5

1)$86\pi cm^2$.
2)$15\pi m^3$.
3)Aumenta o volume em 9 vezes.

4)
a)



b)



c) 201,5cm^2.

5)
a)$224\pi cm^2$ e $392\pi cm^3$.
b)$200\pi cm^2$ e $320\pi cm^3$.

6)
a)$125\pi/3$ cm^2.
b)$50\pi cm^3$.
c)$256\pi cm^3$.
d)$\frac{\pi}{3}(56+12\sqrt{3})cm^3$.

7) O aluno B tem razão: o aluno A tomou mais refrigerante.
8) Letra b.
9)718.250cm^3 ou 0,71825m^3.
10)Letra e.
11)Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 12.6

1)$64\pi cm^2$ e $64\pi/3$ cm^3.
2)$576\pi cm^2$ e $2304\pi/3$ cm^3.
3)
a)$400\pi cm^2$ e $400\pi/3$ cm^3.
b)$484\pi cm^2$ e $5324\pi/3$ cm^3.
4)Letra b.
5)Letra b.
6)$4\pi/3cm^3$.
7)Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.1

1)
a) 10 u.c.
b) 5 u.c.
c) 13 u.c.
d) $\sqrt{37}$ u.c.
e) $\sqrt{85}/9$ u.c.

2)

a)(-28, 12) b)(-1, 1)

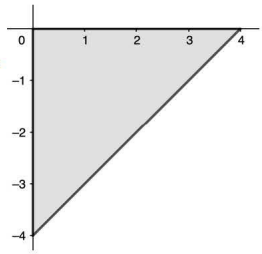
3) $y = -2$

4)

a)P = 12 u.c. b)P = 23+3$\sqrt{5}$ u.c.

5) P= 4$\sqrt{2}$+4 u.c.

6) Triângulo isósceles



7) 368 u.a

8) Letra a.

9) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.2

1) $\overrightarrow{u_1} \equiv \overrightarrow{u_4}$ e $\overrightarrow{u_2} \equiv \overrightarrow{u_3}$

2) Letra c.

3) Letra b.

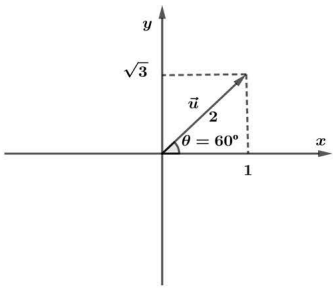
4) Letra c.

5)

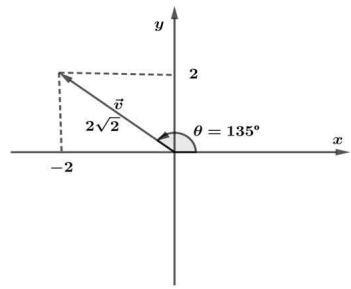
a) $\vec{a} \equiv \vec{j}$ e $\vec{c} \equiv \vec{h}$. b) $\vec{\imath}$ e $\vec{f}$. c) $\vec{b}$ e $\vec{c}$, $\vec{b}$ e $\vec{h}$, $\vec{\imath}$ e $\vec{j}$.

6)

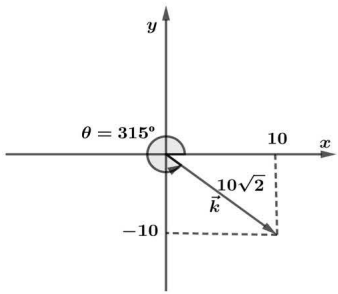
a) $\theta = 60°$e $|\vec{u}| = 2$.



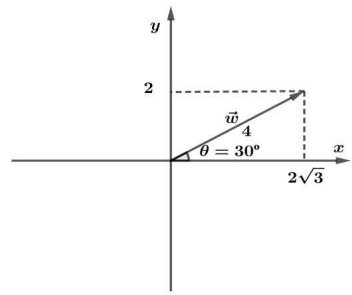
b) $\theta = 135°$e $|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$.



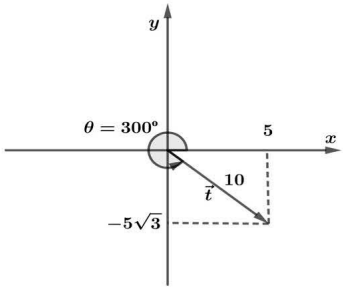
c) $\theta = 315°$e $|\vec{k}| = 10\sqrt{2}$.



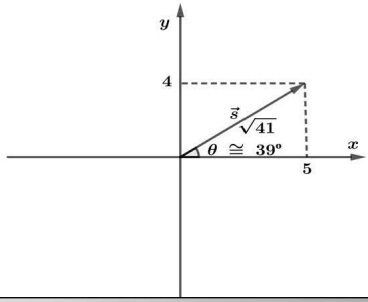
d) $\theta = 30°$e $|\vec{w}| = 4$



e) $\theta = 300°$ e $|\vec{t}| = 10$.



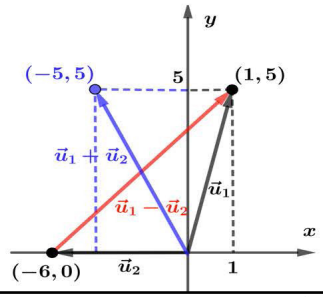
f) $\theta \cong 39°$ e $|\vec{s}| = \sqrt{41}$.



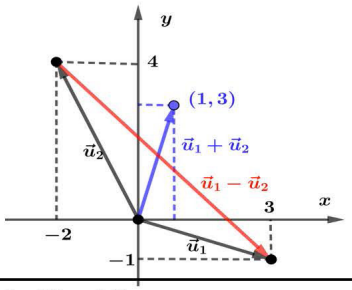
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.3

1)

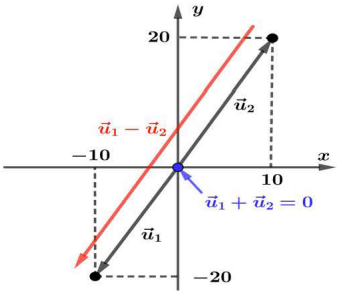
a) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (-5,5)$ e $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (7,5)$



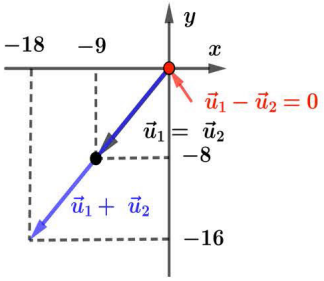
b) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (1,3)$ e $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (5,-5)$



c) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (0,0)$ e $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (-20,-40)$



d) $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} = (-18,-16)$ e $\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} = (0,0)$



2)

a) $\overrightarrow{z_1} = (25,-30)$

b) $\overrightarrow{z_2} = (-3,12)$

c) $\overrightarrow{z_3} = (-9,-6)$

d) $\overrightarrow{z_4} = (-13,24)$

3)

a) $\widehat{u_1} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

b) $\widehat{u_2} = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

c) $\widehat{u_3} = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}j$

d) $\widehat{u_4} = -\frac{21}{29}i - \frac{20}{29}j$

4) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.4

1)

a) $\vec{u}.\vec{v} = -2$

b) $\vec{u}.\vec{v} = -10$

c) $\vec{u}.\vec{v} = -11/24$

d) $\vec{u}.\vec{v} = -2$

2)

a) $\alpha = 90°$ e $|\vec{v}|.cos\alpha = 0$

b) $\alpha = 45°$ e $|\vec{v}|.cos\alpha = 2\sqrt{5}$

c) $\alpha = 135°$ e $|\vec{v}|.cos\alpha = -\sqrt{5}/2$

d) $\alpha = 45°$ e $|\vec{v}|.cos\alpha = 1$

e) $\alpha = 150°$ e $|\vec{v}|.cos\alpha = -\sqrt{3}/2$

f) $\alpha \cong 83°$ e $|\vec{v}|.cos\alpha = 493/145$

3)

a) $h = -4$

b) $h = 25/4$

4)Demonstrações a cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.5

1) à 4) demonstrações a cargo do leitor.

5) C(0, 1) e D(-1, 1)

6) C(2, 1) e E (-1, -2) ou D(8, -5) e F(5, 8).
A = 18 u.a.

7)A(0, 0), B(3, 3), C(0, 6) e D(-3, 3)
A(0, 0), B'(6, 0), C'(3, -3) e D(3, 3)

8)

a) A =11 u.a e G (17/3, 3)

b)A =22 u.a e G (0, -11/3)

c) A =70 u.a e G (-13/3, -17/3)

9) G (7, 5), $\overline{AM_1} = \sqrt{117}$, $\overline{BM_2} = \sqrt{117}$, $\overline{CM_3} = 3\sqrt{26}$

10)

a) A = 30 u.a.

b) A = 46 u.a.

c) A = 158 u.a.

d) A = 92 u.a.

11)

a) A = 4 u.a.

b) A = 32 u.a.

c) A = 16 u.a.

12) O teorema de Pick se aplica somente a polígonos com vértices inteiros.

13) D(14, 10)

14) k = 6.

15) k = 4.

16) A = 47.500 u.a. O teorema de Pick é inviável devido a grande quantidade de pontos internos e sobre a borda.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.6

1)

a) $(x,y) = (-2,0) + t(-2,10) \Leftarrow Eq.paramétrica.$

$y = -5x + 10 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y + 5x - 10 = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

b) $(x,y) = (4,4) + t(-4, -4) \Leftarrow Eq.paramétrica.$

$y = x \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y - x = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

c) $(x,y) = (0,-7) + t(5, 15) \Leftarrow Eq.paramétrica.$

$y = 3x - 7 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y - 3x + 7 = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

d) $(x,y) = (-3,2) + t(9,\ -7) \Leftarrow Eq.paramétrica.$

$y = \frac{-7}{9}x - \frac{1}{3} \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y + \frac{7}{9}x + \frac{1}{3} = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

2)

a) $(x,y) = (2,0) + t(1,-3) \Leftarrow Eq.paramétrica.$

$y = -3x + 2 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y + 3x - 2 = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

b) $(x,y) = (0,-1) + t(1,5) \Leftarrow Eq.paramétrica.$

$y = 5x - 1 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y - 5x + 1 = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

3)

a) $x = 0 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$x = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

b) $y = 2 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y - 2 = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

c) $y = x + 4 \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y - x - 4 = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

d) $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \Leftarrow Eq.reduzida.$

$y - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0 \Leftarrow Eq.geral.$

4)

a) $(x,y) = (0,8) + t(1,2).$

b) $(x,y) = (0,-1) + t(-1,1).$

c) $(x,y) = t(1,2).$

d) $(x,y) = (0,-2) + t(1,8).$

5)

a) Coincidentes.

b) Concorrentes e não perpendiculares.

c) Perpendiculares.

d) Paralelas.

e) Coincidentes.

f) Perpendiculares.

6)

a) $m = 2.$ b) $m = -1/2.$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.7

1) $(4,-1)$

2) $(10,10)$

3) $y = -2x + 3$

4) $y = \frac{-1}{2}x + \frac{3}{2}$

5) $y = x + 1$

6) Perpendiculares.

7) Letra c.

8) Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.8

1)

a) $\alpha \cong 82{,}87°$

b) $\alpha \cong 26{,}57°$

c) $\alpha = 45°$

d) $\alpha = 30°$

2) $\alpha = 60°$

3) $y = \frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}$

4) $\frac{-1}{13}\,u.c$

5) $4\sqrt{2}\,u.c$

6) $6\,u.c$

7) $\frac{2}{25}u.c$
8) Letra b.
9) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ u.c
10) $\frac{11}{5}u.c$
11) $y+x=0\ e\ y+x-2=0$
12) $A = 15\ u.a\ e\ h = \frac{10\sqrt{17}}{17}$.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.9

1) $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 16 \Leftarrow Eq.reduzida.$
$x^2+y^2+6y-2x-6 = 0 \Leftarrow Eq.geral$
2)
a) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \Leftarrow Eq.reduzida.$
$x^2+y^2-6y-6x+9 = 0 \Leftarrow Eq.geral$
b) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4 \Leftarrow Eq.reduzida.$
$x^2+y^2+4y+6x+9 = 0 \Leftarrow Eq.geral$

3)
a) $C\,(4,-11)\ e\ r = 8.$
b) $C\,(2,-2)\ e\ r = 3.$
c) $C\,(-1,0)\ e\ r = 4.$
d) $C\,(-2,-2)\ e\ r = 5.$

4) $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9 \Leftarrow Eq.reduzida$
$x^2+y^2+6y-6x+9 = 0 \Leftarrow Eq.geral$

5)
a) Sim.
b) Sim.
c) Não.
d) Não.

6)
a) O ponto é interno à circunferência.
b) O ponto é externo à circunferência.
c) O ponto pertence à circunferência.
d) O ponto é interno à circunferência.

7)
a) Secante.
b) Tangente.
c) Externa.
d) Externa.
e) Tangente.

8) (-2, 6) e (-4, 4).
9) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

10)
a) Secantes. Pontos: (0, 2) e (0, 0).
b) Externas.
c) Externas.
d) Tangentes internas. Ponto: (4, 5).
e) Tangentes externas. Ponto: (0,31; 1,46).

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.10

1) $2c = 48\,;\ e = \frac{12}{13}$.
2) $e = \frac{21}{29}\,;\ F_1 = (-21,0)\ e\ F_2 = (21,0);\ \frac{x^2}{29^2} + \frac{y^2}{20^2} = 1.$

3)
a) $\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$
b) $\frac{(y-3)^2}{9} + \frac{(x-2)^2}{5} = 1.$
c) $\frac{(y+1)^2}{13} + \frac{(x+3)^2}{9} = 1.$
d) $\frac{(x+5)^2}{13} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1.$

4) $F_1 = \left(10{,}7+\sqrt{33}\right) e F_2 = \left(10{,}7-\sqrt{33}\right);$
$A = 28\pi\ u.a.$
5) $2a = 10\ cm;\ 2c = 6cm.$
6) Letra c.
7) $21\pi\ u.a.$
8) Letra e.
9) Letra d.
10) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.11

1) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1;\ F_1 = (-13, 0)\ e\ F_2 = (13, 0).$
2) $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{64} = 1;\ F_1 = (0, -17)\ e\ F_2 = (0, 17).$
3) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1;\ 2c = 12\ ;\ e = \sqrt{2}.$

4)

a) $\frac{(y-2)^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1.$

b) $\frac{(x-1/2)^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{4} = 1.$

c) $\frac{x^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{5} = 1.$

d) $\frac{(y-3)^2}{12} - \frac{(x-3)^2}{1} = 1.$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 13.12

1) $y = \frac{1}{8}x^2.$
2) $y = -\frac{1}{4}x^2.$
3) $x = -\frac{1}{8}y^2.$
4) $x = \frac{1}{24}y^2.$

5)

a) $y = \frac{1}{4}(x-3)^2.$

b) $y + 1 = -\frac{1}{8}(x-5)^2.$

c) $x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}(y-1)^2.$

d) $x - 4 = \frac{1}{4}(y-1)^2.$

6) $y = 4x - 6$
7) $y = 0$. Reta paralela ao eixo x.
8) $V = (4, 1);\ F\ (4, -1);\ diretriz: y = 3.$
9) $V = (-1, 1);\ F\ (-1, -1);\ diretriz: x = 3.$

SOBRE O AUTOR

Francielck Domingos Freire: Mestre em Matemática pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM-UNIFAP-PROFMAT), graduado em licenciatura plena em Matemática e Física pela Universidade Federal do Amapá (Unifap) e professor do Instituto federal do Amapá.

SOBRE A OBRA

Matemática Aplicada às Ciências Agrárias é uma coleção com quatro livros (didáticos) voltados para os cursos de ciências agrárias.

Os volumes 1, 2 e 3 são destinados ao nível médio técnico da área de ciências agrárias, como agroecologia, agropecuária e agronegócio, e também para os componentes de conhecimentos matemáticos básicos de nível superior, ministrados em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

O volume 4 foi elaborado para os componentes de Matemática de nível superior em qualquer área, porém aplicações em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

Em todos os volumes, os conteúdos são abordados com Matemática pura, exatamente como se ensina no ensino médio e no nível superior, porém acompanhados de contextualização, modelagem, uso de tecnologias e aplicação às ciências agrárias.

Todos os exercícios possuem questões elaboradas pelo autor visando uma melhor assimilação do conteúdo, além de questões selecionadas criteriosamente do ENEM, ENADE, vestibulares e outras instituições.

É uma coleção de livros (didáticos) elaborada com intuito de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos de cursos afins.


COMUNICADO
IMPORTANTE
Visite nossas
outras obras
de Ensino,
Pesquisa e
Extensão
EDIFAP



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ - IFAP

Rodovia BR 210 KM 3, s/n - Bairro Brasil Novo

CEP: 68.909-398

Email: reitoria@ifap.edu.br

Telefone: (96) 3198-2150

Site: https://ifap.edu.br/

Twitter: @ifap_oficial

Facebook: /institutofederaldoamapa

Instagram: @ifapoficial

ISBN: 978-65-89513-32-2

EDIFAP