MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA



FRANCIELCK FREIRE

VOL.3

ENSINO MÉDIO TÉCNICO

EDIFAP

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

Abílio Eduardo
(Universidade Katyavala Bwila – AO)
Adriano Fonseca
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Aldo Parra
(Universidad Del Cauca - CO)
Alexandre Pais
(Manchester University - UK)
Armando Aroca
(Universidad del Atlántico - CO)
Eliane Vasquez
(Universidade Federal do Amapá - BR)
Elisângela Melo
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Hilbert Blanco
(Universidad de Nariño - CO)
Ieda Giongo
(Universidade do Vale do Taquari - BR)
Natividad Adamuz
(Universidad de Córdoba - ES)
Nuno Vieira
(Universidade Lusófona - PT)
Sávio Bicho
(Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará - BR)

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL DO IFAP

Titulares

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Luiz Ricardo Fernandes de Farias Aires
José Rodrigo Sousa de Lima Deniur
Nilvan Carvalho Melo
Darley Calderaro Leal Matos
Welber Carlos Andrade da Silva
Diego Armando Silva da Silva
Marialva do Socorro Ramalho de Oliveira de Almeida
Larissa Pinheiro de Melo
Suany Rodrigues da Cunha
Carlos Alexandre Santana Oliveira

Suplentes

Ivan Gomes Pereira
Jéssica de Oliveira Pontes Nóbrega
Cleber Macedo de Oliveira
Joadson Rodrigues da Silva Freitas
Adrielma Nunes Ferreira Bronze
Johnny Gilberto Moraes Coelho
Mábia Nunes Toscano
Victor Hugo Gomes Sales
Themístocles Raphael Gomes Sobrinho
Romaro Antonio Silva

FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Autor

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

EDIFAP

Macapá
2024

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS
CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

Todos os direitos reservados. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e que não seja para venda ou qualquer fim comercial.Os artigos assinados, no que diz respeito tanto à linguagem quanto ao conteúdo, não refletem necessariamente a opinião da Editora do Instituto Federal do Amapá. As opiniões são de responsabilidade exclusiva dos respectivos autores. A revisão textual, formatação e adequação às normas ABNT são de responsabilidade dos autores

EQUIPE TÉCNICA EDITORIAL

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Editora Chefa

Romaro Antonio Silva
Editor adjunto

Luiz Ricardo Fernandes Farias Aires
Editor adjunto

Ivan Gomes Pereira
Diagramador

Suzana Cardoso
Bibliotecária

DIAGRAMAÇÃO, PROJETO GRÁFICO E CAPA
Ivan Gomes Pereira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F866m Freire, Francielck Domingos.
Matemática aplicada às Ciências Agrárias : contextualização, modelagem, tecnologia / Francielck Domingos Freire. – Macapá : Edifap, 2024.
260f. : il. ; v.3.

ISBN 978-65-89513-34-6 (digital)
978-65-89513-33-9 (impresso)
Volume 3: Ensino médio técnico

1. Matemática – ciências agrárias. 2. Modelagem – matemática. 3. Ciências Agrárias - matemática. II. Título.

CDD 510

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária Suzana Cardoso, CRB 1.142, com dados fornecidos pela Editora do IFAP

A meus filhos, Vinícius e Kauã,
e a minha esposa, Ligele Cristine.

AGRADECIMENTOS

Por esse trabalho, gostaria de agradecer imensamente à equipe técnica do Instituto Federal do Amapá - Campus Porto Grande, em particular, aos amigos e colaboradores: Alyne Cristina Sodré Lima, Antônio Francelino de Oliveira Filho, Breno Henrique Pedroso, João Maria do Amaral Junior, Marcelo Batista Teixeira, Osvaldo de Mello Campelo Vasconcelos e, em especial, ao excelente profissional, Cleber Machado de Oliveira, por algumas revisões técnicas e valiosas contribuições.

Agradecimento aos pares, amigos e excelentes professores de matemática que contribuírem com críticas, sugestões e revisões: Carlos Santana, Dejildo Roque, Eduardo Rosário, Helington Franzotti, Hilton Bruno, Paulo Robson e Rudá Magalhães.

Aos colegas da Biblioteca do instituto federal do Amapá do Campus Porto Grande: Ronny Nunes e Tábata Brito, pela paciência durante minhas consultas exaustivas e empréstimos exagerados.

Aos acadêmicos das turmas 2019.1 e 2018.2 de Engenharia agronômica do IFAP- Campus Porto Grande, 2022.1 de Engenharia civil do IFAP - Campus Macapá e aos acadêmicos de licenciatura em Matemática IFAP - Campus Macapá, que trabalharam os textos e contribuíram para sua construção. Singular gratidão aos alunos mais dedicados dessas turmas: João Vitor de Andrade Soares, Lucival Jessé Morais da Silva, Ledegelson Moura de Souza e Josué Silva Galvão.

Por fim, um agradecimento mais que especial ao meu pai (in memoriam), à minha mãe e à minha família: Ligele Cristine (esposa), Vinícius Freire e Kauã Freire (filhos), pela paciência e compreensão pelas minhas ausências enquanto estudava, pesquisava e escrevia.

PREFÁCIO

Esse livro-texto é uma coletânea de partes dos textos de um livro-caderno, objeto de minha dissertação de mestrado (FREIRE, 2014) publicada em 2014 e de pesquisas de aplicação da Matemática às ciências agrárias.

O livro-caderno (FREIRE, 2013) objeto dessa dissertação, foi um dos projetos desenvolvidos na escola estadual Esther da Silva Virgolino no estado do Amapá e é um dos trabalhos pelo qual tenho muito orgulho em ter escrito. Além de ser um material didático gratuito (por isso não foi publicado) em que o aluno não copiava conteúdos em seu caderno, oportunizava também a contextualização de conteúdos matemáticos e o uso de tecnologias em sala de aula.

É nesse sentido de contextualização e do uso de tecnologias, pensando em um livro com viés didático concomitante à modelagem matemática, que escrevi essa coletânea.

Quando comecei a lecionar no Instituto Federal do Amapá - Campus Agrícola Porto Grande, os problemas didáticos encontrados no instituto eram similares aos das escolas estaduais onde lecionava anteriormente: os livros didáticos disponibilizados pelo MEC não eram aplicáveis à realidade profissional de cada curso, seja técnico ou superior.

E além disso, o único livro de Matemática (FERREIRA, 1999) com aplicação às ciências agrárias (inclusive, um excelente livro de bibliografia complementar), não possuía todos os conteúdos exigidos nos componentes dos cursos. Lembro, por exemplo, que muitos professores que ministravam componentes técnicos nos cursos de

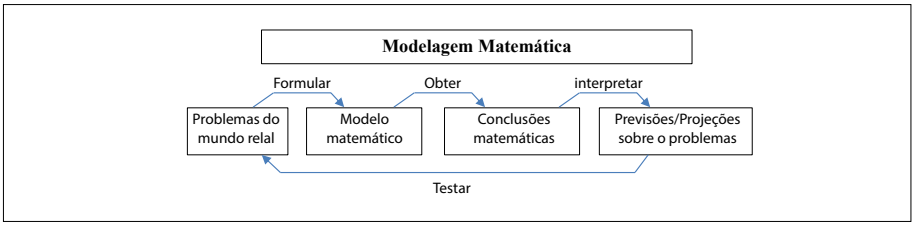
agronegócio, agropecuária ou agroecologia do campus, reclamavam que os alunos, entre outras coisas, não sabiam resolver e nem aplicar regra de três, conteúdo indispensável para o desenvolvimento do componente. Isso me incomodava!

E os alunos em contrapartida, questionavam-me: "Professor! em que situações de minha vida profissional irei aplicar tal conteúdo matemático?". Respostas improvisadas eram dadas e embora razoáveis, não satisfaziam a mim, e talvez, nem à eles. Algo faltava!

Resolvi, então, pesquisar sobre abordagens e aplicações matemáticas na área. A contextualização passou a ser, diante desse cenário, um dos pilares fundamentais da pesquisa. Mas, não queria fazê-la de qualquer forma. Não poderia ser ingênua ou sem sentido, precisava ser técnica, adequada e prática ao curso. Foi aí que surgiu uma parceria com os colegas professores da área técnica do Campus (cujos nomes estão nos agradecimentos), que não só incentivaram a produção desse material, como também sugeriram várias bibliografias, modelos de aplicação, dicas e participação na elaboração de conteúdos e exercícios. A contextualização presumidamente alcançada com essas características, pode ser apreciada em demasia nessa coleção e segue o organograma a seguir.

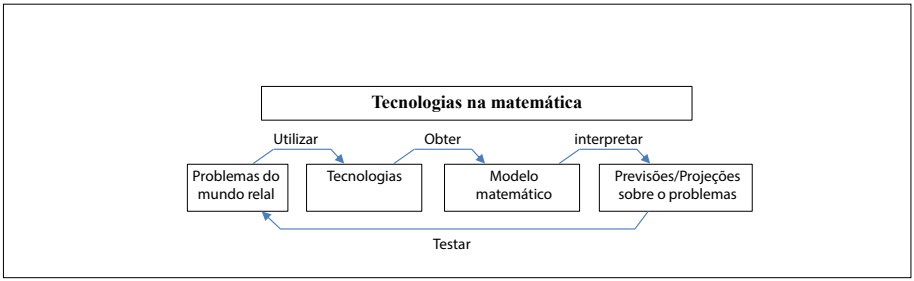
Uma vez contextualizado os conteúdos, era necessário colocar em prática o que havia sido ensinado. Foi então que elaborei um projeto de pesquisa: "uso de modelagem matemática no cultivo de alface", que foi realizado no mesmo instituto e campus, sob minha orientação, com contribuição inestimável do agrônomo Cleber Machado de Oliveira, e desenvolvido pelos alunos: Cleverton França Vaz, João Vitor de Andrade Soares (acadêmicos de engenharia agronômica) e Antônio Sales Maciel (aluno do curso técnico em agronegócio).

Nesse projeto, foi possível acompanhar o desenvolvimento da alface em doses diferentes de nitrogênio, descobrir qual o modelo matemático que se ajusta aos parâmetros de crescimento dessa hortaliça e, a partir desse modelo, resultado da regressão (presente nesse livro), identificar qual dose de nitrogênio seria ideal para a otimização da produção do cultivo (em termos matemáticos: o máximo ou mínimo da função). Ficou evidente, com esse projeto e a partir de diversas pesquisas sobre experimentos agrários (livros, revistas científicas, artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações, etc.), a importância da modelagem matemática para às ciências agrárias. É o que o leitor também irá encontrar nessa coleção segundo o organograma a seguir.



Contudo, embora os alunos desse projeto tenham posto em prática o que aprenderam em sala de aula, como teorias e cálculos (à mão), a tecnologia se fez necessária como ferramenta auxiliar de confirmação de dados e interpretação de resultados. Na verdade, é difícil imaginar algum técnico ou engenheiro da área não utilizando tais ferramentas no exercício de sua profissão. É o que também propõe essa coleção.

Em todos os volumes da coleção, convenientemente, é ensinada, com imagens ilustrativas e passo a passo, a utilização de recursos tecnológicos, como calculadoras científicas, planilhas eletrônicas e softwares gráficos, para que o leitor tenha à sua disposição outras ferramentas auxiliares de conhecimento.

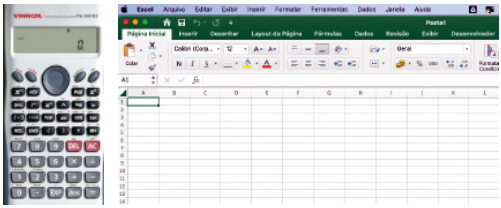


A calculadora científica sugerida na coleção para uso é a Vinacal VN-500MS. No entanto, os comandos utilizados nessa calculadora são praticamente os mesmos utilizados em muitas outras calculadoras, como a Casio FX-82MS, por exemplo.

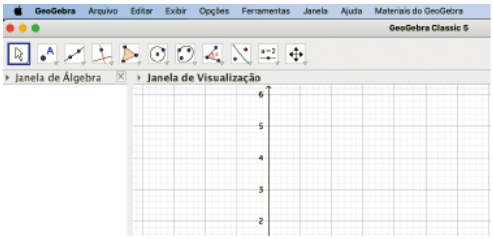
Já a planilha eletrônica utilizada no material é da Microsoft excel para Mac, versão 16.67. Não obstante, os comandos utilizados nesse software são os mesmos para qualquer versão e para qualquer sistema operacional, seja o Windows, MacOs ou Linux.

Quanto ao software gráfico foi utilizado o software geogebra classic versão 5.0. O geogebra é um software gratuito e de código aberto que permite de forma intuitiva a iteração entre diversas frentes matemáticas como geometria, álgebra, além de construção e análise de gráficos, entre outros. O download do software, seja para

computador ou smartphone pode ser feito gratuitamente pelo site geogebra.org. Há opção também de utilizar o software on-line (sem precisa instalar) no mesmo endereço eletrônico.



Calculadora vinacal VN-500MS (à esquerda) e
Planilha excel (à direita)



Geogebraclassic–versão5.0

Em termos de estrutura, a coleção matemática aplicada às ciências agrárias é dividida em quatro volumes. Os volumes 1, 2 e 3 são voltados para o ensino médio técnico em agroecologia, agronegócio, agropecuária ou qualquer nível médio técnico em ciências agrárias. Já o volume 4 é destinado ao nível superior em engenharia agronômica, engenharia agrícola ou qualquer outro nível superior, porém as aplicações são destinadas às ciências agrárias.

Cada volume é dividido em unidades, cada unidade em seções e cada seção em subseções, de forma sequencial. Por exemplo: Unidade 12, seção 12.1 e subseção 12.1.1. Os exercícios são numerados de acordo com a unidade e a ordem do exercício dentro dessa unidade. Por exemplo: exercícios 12.1, exercícios 12.2, etc. Nos volumes 1, 2 e 3 os exercícios de aplicação estão intercalados com os exercícios comuns (de nível médio), enquanto no volume 4, os exercícios de aplicação ficam sempre no final da unidade e são separados dos demais.

Além dos exercícios elaborados pelo autor com base na contextualização, modelagem e tecnologia, há também exercícios selecionados criteriosamente do ENEM, ENADE, outras instituições e vestibulares. Todos são selecionados com base no conteúdo das unidades afins e ordenados em ordem de dificuldade.

Na coleção, também é possível encontrar a matemática pura, com teoremas (inéditos, inclusive) e demonstrações (algumas inéditas, também), sempre discorridas com cuidados técnicos e formalidades que um bom livro de matemática exige.

Por fim, é uma coleção de livros didáticos elaborados com o objetivo de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos da área. Modestamente, é o que espero!

Francielck Domingos Freire

SUMÁRIO

CAP 14
14. MATRIZES E SISTEMAS LINEARES 23
14.1. Matrizes 23
14.1.1. Definição de matriz 23
14.1.2. Representação de matrizes 24
14.1.3. Tipos de matrizes 25
14.1.4. Operações com matrizes 27
EXERCÍCIOS 14.1 30
14.1.5. Propriedades de matrizes 36
EXERCÍCIOS 14.2 37
14.1.6. Determinante de uma matriz 41
EXERCÍCIOS 14.3 43
14.1.7. Teorema de Laplace para determinantes 44
EXERCÍCIOS 14.4 46
14.1.8. Propriedades de determinantes de matrizes 47
EXERCÍCIOS 14.5 54
14.1.9. Matriz inversa 56
14.1.10. Equações matriciais 65
EXERCÍCIOS 14.6 66
14.2. Sistemas lineares 68
14.2.1. Solução de um sistema linear 69
EXERCÍCIOS 14.7 77
14.2.2. Interpretação geométrica de sistemas lineares 79
14.2.3. Solução de um sistema linear homogêneo 86
EXERCÍCIOS 14.8 87
14.3. Determinante e matriz inversa em planilha eletrônica 90
14.4. Sistemas lineares em planilha eletrônica 92
CAP 15
15. ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE 97
15.1. Análise combinatória 97
15.1.1. Princípio fundamental da contagem (P.F.C) 97
EXERCÍCIOS 15.1 100
EXERCÍCIOS 15.2 105
15.1.2. Fatorial 108
EXERCÍCIOS 15.3 109
15.1.3. Permutação simples 109
15.1.4. Permutação com elementos repetidos 110
15.1.5. Permutação circular 112
EXERCÍCIOS 15.4 113
15.1.6. Combinação simples 114
EXERCÍCIOS 15.5 118

15.2. Triângulo aritmético e binômio de Newton 120
15.3. Probabilidade 122
15.3.1. Definições 122
EXERCÍCIOS 15.6 126
15.3.2. Probabilidade da união de eventos 130
15.3.3. Probabilidade condicional 132
EXERCÍCIOS 15.7 135
CAP 16
16. NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS 141
16.1. Números complexos 141
16.1.1. Forma algébrica 142
16.1.2. Igualdade de números complexos 143
16.1.3. Soma e subtração de números complexos na forma algébrica 142
16.1.4. Multiplicação de números complexos na forma algébrica 144
16.1.5. Potências da unidade imaginária **i** 145
EXERCÍCIOS 16.1 146
16.1.6. Divisão de números complexos na forma algébrica 147
EXERCÍCIOS 16.2 149
16.1.7. Representação geométrica de um número complexo 150
16.1.8. Módulo e forma trigonométrica de um número complexo 151
EXERCÍCIOS 16.3 155
16.1.9. Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica 156
16.1.10. Potenciação de números complexos na forma trigonométrica 157
EXERCÍCIOS 16.4 158
16.1.11. Radiciação de números complexos na forma trigonométrica 160
EXERCÍCIOS 16.5 163
16.2. Polinômios 165
16.2.1. Valor numérico de um polinômio 166
16.2.2. Raiz de um polinômio 166
EXERCÍCIOS 16.6 167
16.2.3. Operações com polinômios 167
EXERCÍCIOS 16.7 172
16.2.4. Divisão de um polinômio por um binômio na forma x - a 174
16.2.5. Divisão de um polinômio por (ax + b) 176
16.2.6. Divisão de um polinômio por (x - a)(x - b) 177
EXERCÍCIOS 16.8 179
16.2.7. Equações polinomiais 181
16.2.8. Reduzindo o grau de uma equação polinomial 188
EXERCÍCIOS 16.9 190
16.2.9. Relação entre coeficientes e raízes 192
EXERCÍCIOS 16.10 194
16.2.10. Pesquisa por raízes racionais 195
EXERCÍCIOS 16.11 197
CAP 17
17. INEQUAÇÕES E FUNÇÃO MODULAR 203
17.1. Inequações 203
17.1.1. Inequações do 1º grau 203
17.1.2. Sistema de inequações e inequações simultâneas do 1º grau 205
17.1.3. Inequação produto e inequação quociente do 1º grau 206
EXERCÍCIOS 17.1 208
17.1.4. Inequação do 2º grau 209

EXERCÍCIOS 17.2 214
17.1.5. Inequação exponencial 215
17.1.6. Inequação logarítmica 217
EXERCÍCIOS 17.3 221
17.2. Módulo e função modular 222
17.2.1. Módulo de um número real 222
17.2.2. Propriedades envolvendo módulos 222
17.2.3. Função modular 225
EXERCÍCIOS 17.4 229
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 231
TABELAS 237
GABARITOS E SOLUÇÕES 241
SOBRE O AUTOR 255

CAPÍTULO

14

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

MATRIZES E SISTEMAS LINEARES

Há várias aplicações de matrizes e sistemas lineares em muitas áreas como a Informática, a Física, a Química, a Engenharia, a Economia, e outras ciências como as Ciências Agrárias. Na informática, as matrizes são encontradas em programas como subsídio aos cálculos matemáticos, em planilhas eletrônicas e programação. Na Economia elas auxiliam na interpretação de gráficos e dados estatísticos. Na Engenharia, contribuem para o cálculo estrutural e distribuição de materiais em geral. E nas Ciências Agrárias, na organização dos dados de um experimento, na formulação de adubos, e em situações em que se faz necessário dispor os dados em duas dimensões.

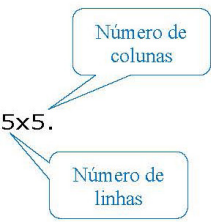
14.1. Matrizes

14.1.1. Definição de matriz

Definição 14.1.1.1: Definimos uma matriz de ordem m por n (escreve-se mxn), uma tabela formada por elementos distribuídos em m linhas e n colunas.

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ ⇒ Possui três linhas e quatro colunas, portanto, ordem 3x2.
- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ⇒ Possui duas linhas e duas colunas. É uma matriz de ordem 2x2.
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ⇒ É uma matriz de ordem 2x3.
- $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ ⇒ É uma matriz 3x3.
- $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ⇒ É uma matriz 5x5.



14.1.2. Representação de matrizes

Uma matriz é representada normalmente por uma letra maiúscula do nosso alfabeto e os seus elementos por letras minúsculas na forma x_{ij}.

Exemplos:

- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é uma matriz A de m linhas, n colunas e de elementos a_{ij}, em que i é a linha em que se encontra o elemento e j, a coluna.
- $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ é uma matriz B de p linhas, q colunas e de elementos b_{ij}, em que i é a linha em que se encontra o elemento e j, a coluna.

Em forma de tabela uma matriz A, por exemplo, pode ser assim representada:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}_{m\times n}.$$

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 4 & -11 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ É uma matriz 2x2 em que $a_{11} = 4$ (linha 1, coluna 1), $a_{12} = -11$ (linha 1, coluna 2), $a_{21} = 6$ (linha 2, coluna 1) e $a_{22} = 0$ (linha 2, coluna 2).
- $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & 9 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ É uma matriz 3x4 onde os elementos são: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 7$, $a_{14} = 5$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = -1$, $a_{24} = 5$, $a_{31} = 6$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 9$ e $a_{34} = 0$.

Conforme mencionado no início da unidade, podemos utilizar as matrizes como forma de organização e análise de dados.

Exemplo: (UERJ-adaptada) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia (de manhã, de tarde e de noite), durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j.

$$\begin{vmatrix} 35{,}6 & 36{,}4 & 38{,}6 & 38{,}0 & 36{,}0 \\ 36{,}1 & 37{,}0 & 37{,}2 & 40{,}5 & 40{,}4 \\ 35{,}5 & 35{,}7 & 36{,}1 & 37{,}5 & 39{,}2 \end{vmatrix}$$

Julgue as afirmativas a seguir.

I - No momento a_{23}, o paciente estava com a temperatura de 37,2.

II - A temperatura do segundo dia à noite é a mesma do quinto dia pela manhã.

III – A maior temperatura ocorreu em a_{42}.

Solução: I – correta, pois o elemento da segunda linha e terceira coluna é de fato 35,7. II – falsa, pois $a_{32} = 35{,}7$ é diferente de $a_{15} = 36{,}0$. III – falsa, pois a maior temperatura é 40,5 e encontra-se na posição do elemento a_{24} e não a_{42}.

14.1.3. Tipos de matrizes

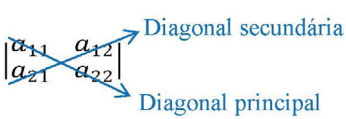
Algumas matrizes recebem uma denominação especial de acordo com sua característica.

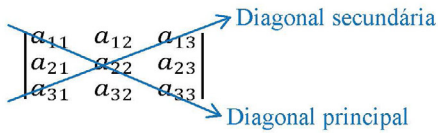
Matriz quadrada: É toda matriz que possui o número de linhas igual ao número de colunas.

Quando a matriz é quadrada dizemos apenas que é ela de ordem n (já que $m = n$).

Toda matriz quadrada possui duas diagonais: a **diagonal principal**, composta pelos elementos em que $i = j$: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$ e a **diagonal secundária** que é a segunda diagonal da matriz onde $i + j = n + 1$.

Veja ambas as diagonais de uma matriz de ordem 2 e ordem 3, respectivamente:





As matrizes quadradas possui ainda outra classificações.

Matriz triangular: É toda matriz quadrada cujos elementos abaixo ou acima da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$ ⇒ Matriz triangular superior: Elementos acima da diagonal principal são não nulos e abaixo são nulos.
- $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -11 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ ⇒ Matriz triangular inferior: Elementos abaixo da diagonal principal são não nulos e acima são nulos.

Matriz Diagonal: É toda matriz quadrada cujos elementos que não estão na diagonal principal são nulos.

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 23 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

Matriz Identidade: É toda matriz quadrada em que os elementos que estão na diagonal principal são iguais a 1 e os elementos que não estão na diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos:

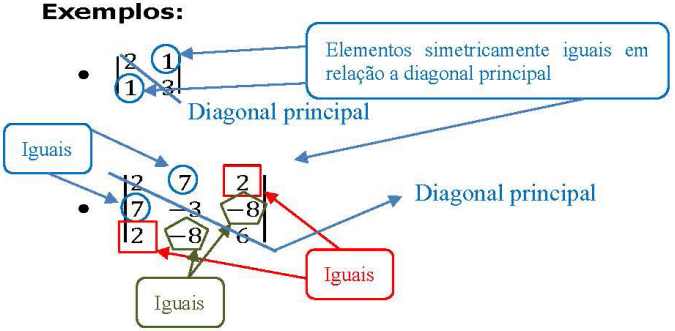
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ⇒ matriz identidade de ordem 2;

- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz identidade de ordem 3;
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz identidade de ordem 5.

Matriz simétrica: É uma matriz quadrada que possui os elementos $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{32} = a_{23}$, ..., ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$. Em outras palavras, é a matriz que possui simetricamente os elementos iguais em relação a diagonal principal.

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$



- $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 7 & -3 & -8 \\ 2 & -8 & 6 \end{vmatrix}$

Outros tipos de matrizes:

Matriz Nula: É toda matriz (quadrada ou não) em que todos os elementos são nulos (iguais a zero).

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz nula de ordem 2;
- $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz nula de ordem 3x5.

Matriz linha: Possui somente uma linha, ou seja, do tipo: $1 \times n$.

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz linha de ordem 1x2;
- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz linha de ordem 1x4.

Matriz coluna: Possui somente uma coluna, isto é, do tipo: $m \times 1$

Exemplos:

- $\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz coluna de ordem 2x1;
- $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} \Rightarrow$ matriz coluna de ordem 3x1.

14.1.4. Operações com matrizes

Nesta subseção, anunciaremos as definições de elemento neutro, igualdade entre matrizes e a transposta de uma matriz. E além disso, aprenderemos a somar, subtrair, multiplicar matrizes ou multiplicar uma matriz por um número real.

Definição 14.1.4.1 (Igualdade de matrizes): Sendo $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{pq}]$, dizemos que A é igual a B se, para todo $i = p$ e $j = q$, temos sempre $a_{ij} = b_{pq}$.

De uma forma mais didática, podemos dizer que duas matrizes são iguais quando possuem a mesma ordem e elementos correspondentes iguais (elementos na mesma posição são idênticos).

Exemplo: Calcular x e y em $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & y \end{vmatrix}$.

Solução: Para que duas matrizes sejam iguais é necessário que seus elementos correspondentes (na mesma posição) sejam iguais. Então, já que $1 = 1$, $4 = 4$, então é preciso que -2 seja igual a x e 0 seja igual a y. Resposta: $\boxed{x = -2}$ e $\boxed{y = 0}$.

2º exemplo: Determinar os valores de x, y e z, a seguir.

$$\begin{vmatrix} 2x & 12 & 0 \\ 0 & 20+x & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 3y & 0 \\ 0 & z^2 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Solução: $2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{x = 5}$.

$$20 + x = z^2 \Rightarrow z^2 = 20 + 5 \Rightarrow z^2 = 25 \Rightarrow z = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \boxed{z = \pm 5}.$$

$$12 = 3y \Rightarrow 3y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{y = 4}.$$

Definição 14.1.4.2 (transposta de uma matriz): A transposta de uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ é outra matriz que indicamos por $A^t = [b_{ji}]_{n\times m}$, onde $b_{ji} = a_{ij}$. De outra forma, dada uma matriz A, a sua transposta A^t é uma matriz formada pelos os elementos das linhas da matriz A dispostos em colunas, ordenadamente.

Exemplos:

- $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

- $B = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -3 \\ -7 & -2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -3 \\ -7 & -2 & 7 \\ -3 & 7 & -1 \end{vmatrix}$

O leitor deve ter observado que essa última matriz transposta e sua transposta são iguais. Isso se deve ao fato (unicamente) da matriz A ser simétrica, não ocorrendo em outras matrizes não-simétricas.

Outros exemplos:

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Colocando as linhas em formas de colunas ordenadamente: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \\ 9 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

Colocando as linhas em colunas ordenadamente: $B^t = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 9 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 11 & 7 & 3 \\ 9 & 9 & 8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

É imediato perceber que ao calcular a transposta da transposta, voltamos a matriz original novamente, ou seja, $(A^t)^t = A$.

Definição 14.1.4.3 (adição de matrizes): Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem, a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ denotada por $A + B$ é dada por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. De outra forma, a soma de duas (ou mais) matrizes de mesma ordem (e somente de mesma ordem) é dada pela soma dos elementos correspondentes (que estão respectivamente na mesma posição em cada matriz).

Exemplo: $\begin{vmatrix} 5 & 13 \\ 12 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -12 & 6 \end{vmatrix}$.

Solução: $\begin{vmatrix} 5+3 & 13+(-2) \\ 12+(-12) & 7+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 13-2 \\ 12-12 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ 0 & 13 \end{vmatrix}$.

2º exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

Solução: $\begin{vmatrix} 1+(-1) & 2+3 & 0+5 \\ 0+2 & -2+(-5) & 1+4 \\ 2+0 & 8+2 & -1+3 \\ -1+4 & 1+4 & 2+(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 10 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

Definição 14.1.4.4 (matriz oposta): Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ define-se como a matriz oposta de A, a matriz $-A = [-a_{ij}]_{m\times n}$. De outro modo, a oposta de uma matriz é um outra matriz cujos elementos são os opostos da matriz original.

Exemplo: A matriz oposta de $B = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 30 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ é $-B = \begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ -1 & -30 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Diante dessa definição e sabendo que $A - B = A + (-B)$, podemos anunciar também a definição de subtração de matrizes.

SAIBA MAIS!

Embora na aritmética o oposto e simétrico de um número sejam equivalentes, na álgebra linear, matriz oposta é diferente de matriz simétrica (já vista anteriormente).

Definição 14.1.4.5 (subtração de matrizes): Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ são duas matrizes de mesma ordem, a matriz C = $[c_{ij}]_{m\times n}$ denotada por $A - B$ é dada por $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. De outra maneira, a subtração de duas matrizes de mesma ordem (e somente de mesma ordem) é dada pela subtração dos elementos que estão na mesma posição em cada matriz.

Exemplo: $\begin{vmatrix} -13 & 3 & 10 \\ 1 & 45 & -1 \\ 1 & 9 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 & -3 & 0 \\ 0 & 45 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

Solução: $\begin{vmatrix} -13-10 & 3-(-3) & 10-0 \\ 1-0 & 45-45 & -1-1 \\ 1-(-3) & 9-(-4) & -2-(-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & 3+3 & 10 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1+3 & 9+4 & -2+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -23 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & 13 & 0 \end{vmatrix}$.

SAIBA MAIS!

O elemento neutro da soma de matrizes é uma matriz nula de mesma ordem.

2º exemplo: Dadas as matrizes $A = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 19 & -3 & 0 \\ 11 & -13 & 15 \\ 7 & -9 & -2 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -1 \end{vmatrix}$, calcule.

a) $A + B - C$.

Solução: $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 19 & -3 & 0 \\ 11 & -13 & 15 \\ 7 & -9 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0+19-0 & 4-3+1 & 11+0-0 \\ 6+11-0 & 0-13-0 & 4+15-1 \\ 3+7+1 & 9-9+8 & 0-2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 2 & 11 \\ 17 & -13 & 18 \\ 11 & 8 & -1 \end{bmatrix}$.

b) $C - B^t - A$.

Solução: $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -8 & -1 \end{vmatrix} - \overbrace{\begin{vmatrix} 19 & 11 & 7 \\ -3 & -13 & -9 \\ 0 & 15 & -2 \end{vmatrix}}^{B^t} - \begin{vmatrix} 0 & 4 & 11 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0-19-0 & -1-11-4 & 0-7-11 \\ 0-(-3)-6 & 0-(-13)-0 & 1-(-9)-4 \\ -1-0-3 & -8-15-9 & -1-(-2)-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & -16 & -18 \\ -3 & 13 & 6 \\ -4 & -32 & 1 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIOS 14.1

1) Classifique as matrizes a seguir.

a) $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

g) $|0 \quad 0|$

h) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

2) Dadas as matrizes: $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 9 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$, calcule.

a) $A + B - C$

b) $A - B - C$

c) $A - A + B - B + C - C$

3) Dadas as matrizes: $A = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ e $C = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$, calcule.

a) $A - (A + C)$

b) $A^t - B^t$

c) $A - C + B - B^t + C - C^t$

4) Determine, para cada item, os valores de x, y e z.

a) $\begin{vmatrix} 4 & x+1 \\ 5 & 2y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7z & 1 \\ -7 & 12 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x \\ 3y \\ 4z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ -8 \\ 0 \end{vmatrix}$

5) (ENEM) Uma construtora, pretendendo investir na construção de imóveis em uma metrópole com cinco grandes regiões, fez uma pesquisa sobre a quantidade de famílias que mudaram de uma região para outra, de modo a determinar qual região foi o destino do maior fluxo de famílias, sem levar em consideração o número de famílias que deixaram a região. Os valores da pesquisa estão dispostos em uma matriz A = $[a_{ij}]$, $i, j \in \{1,2, 3, 4, 5\}$, em que o elemento a_{ij} corresponde ao total de famílias (em dezena) que se mudaram da região i para a região j durante um certo período, e o elemento a_{ij} considerado nulo, uma vez que somente são

consideradas mudanças entre regiões distintas. A seguir, está apresentada a matriz com os dados da pesquisa.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Qual região foi selecionada para o investimento da construtora?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

6) (ENEM) Uma empresa avaliou os cinco aparelhos de celulares (T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5) mais vendidos no último ano, nos itens: câmera, custo-benefí cio, design, desempenho da bateria e tela, representados por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente. A empresa atribuiu notas de 0 a 10 para cada item avaliado e organizou essas notas em uma matriz A, em que cada elemento a_{ij} significa a nota dada pela empresa ao aparelho T_I no item I_j. A empresa considera que o melhor aparelho de celular é aquele que obtém a maior soma das notas obtidas nos cinco itens avaliados.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 10 \\ 7 & 10 & 10 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Com base nessas informações, o aparelho de celular que a empresa avaliou como sendo o melhor é o

a) T_1 b) T_2 c) T_3 d) T_4 e) T_5

7) Assinale a alternativa **incorreta**.

a) A matriz nula é o elemento neutro da soma de matrizes;

b) Podemos obter a matriz transposta de uma matriz dispondo suas linhas em colunas;

c) Podemos obter a matriz transposta de uma matriz dispondo suas colunas em linhas;

d) A subtração de uma matriz simétrica por sua transposta é uma matriz nula;

e) A transposta de uma matriz equivale a matriz oposta se essa for uma matriz quadrada.

8) Assinale a alternativa **incorreta**.

a) A transposta de uma matriz diagonal é uma matriz diagonal;

b) A soma de duas matrizes diagonais é uma matriz diagonal;

c) A soma de duas matrizes nulas é uma matriz nula;

d) A transposta da transposta de uma matriz equivale a própria matriz;

e) Matriz simétrica e matriz oposta de mesma ordem são iguais.

Definição 14.1.4.6 (Multiplicação de um número real por uma matriz): Dada uma matriz A = $[a_{ij}]_{m\times n}$, definimos o produto de A por um número real k, como $k.A = [k.a_{ij}]_{m\times n}$. Em outras palavras, a multiplicação de uma matriz A por um número real k é definido como uma matriz de mesma ordem, obtida multiplicando este número por todos os elementos da matriz A.

Exemplo: $3.\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 4 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.7 & 3.5 \\ 3.11 & 3.4 \\ 3.(-9) & 3.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21 & 15 \\ 33 & 12 \\ -27 & 6 \end{vmatrix}$.

2º exemplo: $\frac{-2}{3}.|2 \quad -3 \quad 0| = \left|\left(\frac{-2}{3}\right).2 \quad \left(\frac{-2}{3}\right).(-3) \quad \left(\frac{-2}{3}\right).0\right| = \left|\frac{-4}{3} \quad 2 \quad 0\right|$.

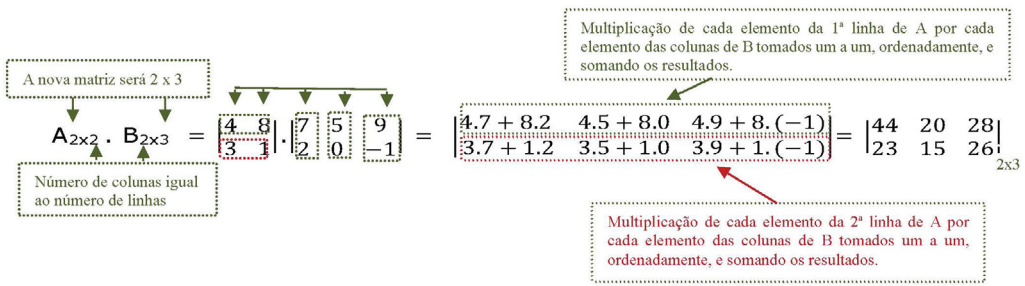
A forma de multiplicar duas matrizes é completamente diferente da soma e subtração. Veja como a seguir.

Definição 14.1.4.7 (Multiplicação de matriz por uma matriz): Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, o produto $A.B$ é definido como a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \cdots + a_{in}.b_{in}.$$

A definição nos garante que o produto de duas matrizes só é possível (só está definido) quando o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda matriz. Cada elemento que irá compor a matriz resultante do produto é calculado multiplicando cada elemento das linhas da primeira matriz com cada elemento das colunas da segunda matriz, respectivamente, e somando assim, os resultados. Dessa forma, a nova matriz obtida terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

Exemplo: Sendo $A = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, é possível calcular $A.B$. Pois, o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.



2º exemplo: Sendo $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ é possível calcular $A.B$. Veja:

$$\underset{1x3}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} . \underset{3x1}{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}} = [1.2 + (-3).0 + 0.0] = [2]_{1\times 1}$$

Número de colunas é igual ao número de linhas.

O produto $B.A$ também está definido:

$$\underset{3x1}{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}} . \underset{1x3}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 2.1 & 2.(-3) & 2.0 \\ 0.1 & 0.(-3) & 0.0 \\ 0.1 & 0.(-3) & 0.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}_{3\times 3}$$

Número de colunas é igual ao número de linhas.

3º exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1.9 + (-3).1 & 1.0 + (-3).5 \\ 0.9 + 2.1 & 0.0 + 2.5 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 9 - 3 & 0 - 15 \\ 0 + 2 & 0 + 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}.$$

Vamos inverter a ordem do produto e multiplicar novamente,

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9.1 + 0.0 & 9.(-3) + 0.2 \\ 1.1 + 5.0 & 1.(-3) + 5.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -27 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Perceba que mesmo que a inversão esteja definida, $A.B$ é diferente de $B.A$. Quando a igualdade da inversão da ordem do produto ocorre, dizemos que as matrizes **comutam** entre si.

Vale mencionar que essa comutação raramente ocorre e somente ocorre quando as matrizes envolvidas são quadradas e de mesma ordem.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 6.(-2) + 6.0 & 6.3 + 6.(-4) \\ 0.(-2) + 2.0 & 0.3 + 2.(-4) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -12 + 0 & 18 - 24 \\ 0 + 0 & 0 - 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Vamos inverter a ordem do produto e multiplicar novamente,

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 + 0 & -12 + 6 \\ 0 + 0 & 0 - 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Essas matrizes comutam entre si.

Outros exemplos de produto de matrizes:

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 1.0 + 2.2 - 1.2 & 1.1 + 2.0 - 1.3 & 1.2 + 2.(-1) - 1.0 \\ 4.0 + 1.2 - 2.2 & 4.1 + 1.0 - 2.3 & 4.2 + 1.(-1) - 2.0 \\ 3.0 + 0.2 + 0.2 & 3.1 + 0.0 + 0.3 & 3.2 + 0.(-1) + 0.0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 + 4 - 2 & 1 + 0 - 3 & 2 - 2 + 0 \\ 0 + 2 - 4 & 4 + 0 - 6 & 8 - 1 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & 3 + 0 + 0 & 6 + 0 + 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

- $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.0+3.3-1.1 & 1.1+3.2-1.0 \\ 0.0+2.3+1.1 & 0.1+2.2+1.0 \end{vmatrix} =$
  $\begin{vmatrix} 0+9-1 & 1+6-0 \\ 0+6+1 & 0+4+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}.$

De acordo com a definição de produto de matrizes, a posição da coluna do elemento de A é igual a posição da linha do elemento de B. Veja:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \cdots + a_{in}.b_{in}$$

Assim, para saber quem é o elemento c_{ij} proveniente do produto de duas matrizes A e B, basta multiplicar os elementos da linha i de A, com os elementos da coluna j de B, sem a necessidade de efetuar a multiplicação completa das matrizes.

Exemplo: Para saber o elemento c_{21} do produto $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, basta multiplicar a segunda linha de A pela primeira coluna de B. Da seguinte forma:

$0.0 + 2.3 + 1.1 = 7 \Rightarrow$ Veja que esse é o elemento c_{21} do exemplo anterior.

Definição 14.1.4.8 (matriz elemento neutro do produto): Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Existe uma matriz $I_n = [I_{ij}]_{n\times n}$, tal que o produto $A.I_n = A$.

A definição nos diz que a matriz elemento neutro do produto de matrizes precisa ser quadrada e de ordem n. De fato, sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, a ordem de $A.B$ é dada por $m \times p$. Para que o produto $A.B$ seja igual a A é necessário que p seja igual a n, ou seja, que B seja uma matriz quadrada de ordem n.

Além disso, para que um produto $A.I_n$ seja igual a A é preciso também que os elementos destacados a seguir sejam nulos ou 1 de forma conveniente. Observe a primeira linha:

$$a_{11}.\underbrace{b_{11}}_{1} + a_{12}.\underbrace{b_{21}}_{0} + a_{13}.\underbrace{b_{31}}_{0} + \cdots + a_{1n}.\underbrace{b_{n1}}_{0} = a_{11}$$
$$a_{11}.\underbrace{b_{12}}_{0} + a_{12}.\underbrace{b_{22}}_{1} + a_{13}.\underbrace{b_{32}}_{0} + \cdots + a_{1n}.\underbrace{b_{n2}}_{0} = a_{12}$$
$$a_{11}.\underbrace{b_{13}}_{0} + a_{12}.\underbrace{b_{23}}_{0} + a_{13}.\underbrace{b_{33}}_{1} + \cdots + a_{1n}.\underbrace{b_{n3}}_{0} = a_{13}$$
$$\vdots$$
$$a_{11}.\underbrace{b_{1n}}_{0} + a_{12}.\underbrace{b_{2n}}_{0} + a_{13}.\underbrace{b_{3n}}_{0} + \cdots + a_{1n}.\underbrace{b_{nn}}_{1} = a_{1n}.$$

Aplicando o mesmo raciocínio nas demais linhas de A, concluímos que a matriz B deve ter elementos iguais a 1 para $i = j$ e elementos nulos para $i \neq j$, ou melhor, a matriz B é uma matriz identidade de ordem n, conforme a seguir.

$$I_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n\times n}$$

Exemplo (de elemento neutro de matriz 2x2):

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}_{Matriz\ identidade\ 2x2} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.a + 0.c & 1.b + 0.d \\ 0.a + 1.c & 0.b + 1.d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

2º exemplo (de elemento neutro de matriz 3x3):

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{Matriz\ identidade\ 3x3} =$$

$$\begin{vmatrix} 4.1 + 2.0 + 1.0 & 4.0 + 2.1 + 1.0 & 4.0 + 2.0 + 1.1 \\ 12.1 + 5.0 - 1.0 & 12.0 + 5.1 - 1.0 & 12.0 + 5.0 - 1.1 \\ 0.1 + 1.0 - 3.0 & 0.0 + 1.1 - 3.0 & 0.0 + 1.0 - 3.1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 12 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Definição 14.1.4.9 (potenciação de matrizes): Para uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ vale as seguintes regras para a potenciação:

- $A^1 = \text{A}$;
- $A^k = \underbrace{A.A.A.A\ldots A}_{k\ vezes}$;
- $A^0 = I_n$ (onde n é a ordem da matriz e I_n é a matriz identidade).

A definição de que $A^0 = I_n$, será esclarecida na seção sobre matrizes inversas.

Exemplo: Sendo $A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, calcule A^2.

Solução: $A^2 = A.A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.1 + 4.0 & 1.4 + 4.2 \\ 0.1 + 2.0 & 0.4 + 2.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}.$

A seguir estão outros exemplos de aplicação de multiplicação de matrizes.

1º exemplo: Uma pizzaria vende três tipos de pizzas diferentes, conforme a tabela tamanho\preço. E a produção em unidades vendidas nos meses de janeiro e fevereiro, estão na tabela Mês\tipo. Calcule a receita nos meses de janeiro e fevereiro.

Tam\Preço unit.	R$
Pequena	13,00
Média	18,00
Grande	23,00

Mês\tipo	Pequena	Média	Grande
Janeiro	82	45	12
Fevereiro	68	34	21

Solução: Para saber a receita de cada mês, basta multiplicar a quantidade de unidades vendidas pelo o preço de cada tipo de pizza, respectivamente.

$$\begin{vmatrix}82 & 45 & 12\\ 68 & 34 & 21\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}13{,}00\\ 18{,}00\\ 23{,}00\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}82.13+45.18+12.23\\ 68.13+34.18+21.23\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2152\\ 1979\end{vmatrix}.$$

Resposta: $\begin{vmatrix}\text{janeiro: R\$2.152,00}\\ \text{fevereiro: R\$ 1.979,00}\end{vmatrix}$

Esse exemplo não só é uma aplicação básica do produto de matrizes, como também justifica a forma que multiplicamos matrizes.

2º exemplo: $\begin{vmatrix}2 & y\\ x & 1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}1\\ 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3\\ 1\end{vmatrix}$, calcule x e y

Solução: $\begin{vmatrix}2+2y\\ x+2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3\\ 1\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2+2y=3 \Rightarrow 2y=3-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}}\\ x+2=1 \Rightarrow x=1-2 \Rightarrow \boxed{x=-1}\end{cases}$.

14.1.5. Propriedades de matrizes

A seguir, apresentam-se algumas propriedades válidas para matrizes, que podem ser facilmente demonstradas e também são úteis na solução de problemas.

Propriedade 1 (Propriedade associativa da soma):

$$\boxed{A+(B+C)=(A+B)+C}.$$

Propriedade 2 (Propriedade comutativa da soma):

$$\boxed{A+B=B+A}.$$

Propriedade 3 (Elemento neutro da soma):

$$\boxed{A+0=A}.$$

Propriedade 4 (Adição ao simétrico):

$$\boxed{A+(-A)=0\ (matriz\ nula)}.$$

Propriedade 5 (Distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição):

$$\boxed{A.(B+C)=A.B+A.C}.$$

Propriedade 6(Distributividade à direita da multiplicação em relação à adição):

$$\boxed{(B+C).A=B.A+C.A}.$$

Propriedade 7 (Associatividade do produto):

$$\boxed{(A.B).C=A.(B.C)}.$$

Propriedade 8 (Elemento neutro do produto):

$$\boxed{A.I_n=I_n.A=A}.$$

Propriedade 9 (Multiplicação por uma constante):

$$\boxed{(k.A).B=A.(k.B)=k.(A.B)}.$$

Propriedade 10(Transposta do produto):

$$\boxed{(A.B)^t=B^t.A^t}.$$

EXERCÍCIOS 14.2

1) Calcule os produtos matriciais.

a) $\begin{vmatrix}10 & 5\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}1 & 2\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & -1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}2 & -1\\5 & 1\end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix}1 & 0\\0 & \frac{2}{5}\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}0 & 6\\-1 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}-1\\4\\6\end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}10 & 5 & 15\\30 & 25 & 20\end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix}-3 & 1 & 2\\0 & 1 & -2\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}0 & 2\\1 & 4\\1 & 6\end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix}3 & 9 & -1\\4 & 5 & -2\\2 & -7 & 1\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{vmatrix}$

2) Dadas as matrizes: $A = \begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & 4\end{vmatrix}$, calcule.

a) A^2 b) B^2 c) $A^2 - B^2$

3) Determine, em cada caso, as incógnitas.

a) $\begin{vmatrix}-2 & 1\\1 & -2\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}9\\3\end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix}x & y\\a & b\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}3 & 1\\-2 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}5 & 7\\-5 & 9\end{vmatrix}$

4) (UERJ) Observe parte da tabela do quadro de medalhas dos Jogos Pan-americanos do Rio de Janeiro em 2007. Com base na tabela, é possível formar a matriz quadrada A cujos elementos a_{ij} representam o número de medalhas do tipo j que o país i ganhou, sendo i e j pertencentes ao conjunto {1, 2, 3}.

Para fazer uma outra classificação desses países, são atribuídos às medalhas os seguintes valores:

- ouro: 3 pontos;
- prata: 2 pontos;
- bronze: 1 ponto.

	Medalhas			
	Tipos			
País	1- Ouro	2- Prata	3-Bronze	Total
1- Estados Unidos	97	88	52	237
2- Cuba	59	35	41	135
3- Brasil	54	40	67	161

Esses valores compõem a matriz $V = \begin{vmatrix}3\\2\\1\end{vmatrix}$

Determine a partir do cálculo do produto AV, o número de pontos totais obtidos pelos três países separadamente.

5) (UFRS) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e

salada usados num restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P1 , P2 e P3 desse restaurante. A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P1 , P2 e P3, está indicada na alternativa:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \Leftarrow \text{Arroz} \\ \Leftarrow \text{Carne} \\ \Leftarrow \text{Salada} \end{matrix} \qquad P = \begin{matrix} \Leftarrow\text{Arroz} & \Leftarrow\text{Carne} & \Leftarrow\text{Salada} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \Leftarrow \text{Prato P1} \\ \Leftarrow \text{Prato P2} \\ \Leftarrow \text{Prato P3} \end{matrix}$$

6) (PUCCAMP) Em um laboratório, as substâncias A, B e C são a matéria-prima utilizada na fabricação de dois medicamentos. O Mariax é fabricado com 5g de A, 8g de B e 10g de C e o Luciax é fabricado com 9g de A, 6g de B e 4g de C. Os preços dessas substâncias estão em constante alteração e, por isso, um funcionário criou um programa de computador para enfrentar essa dificuldade. Fornecendo-se ao programa os preços X, Y e Z de um grama das substâncias A, B e C, respectivamente, o programa apresenta uma matriz C, cujos elementos correspondem aos preços de custo da matéria-prima do Mariax e do Luciax. Essa matriz pode ser obtida de

a) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 & 4 \\ x & y & z \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ x & y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y & z \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ x & y & z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

7)A tabela a seguir mostra o percentual de cada nutriente que deve ter um adubo de acordo com o tipo:

Nutriente\Tipo	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Nitrogênio	10%	20%	30%
Fósforo	5%	30%	20%
Potássio	20%	10%	10%
Cálcio	10%	15%	20%

A tabela a seguir mostra o custo por kg de cada nutriente.

Preço \nutriente	Nitrogênio	Fósforo	Potássio	Cálcio
1 kg	R$ 3,00	R$ 1,50	R$ 1,50	R$ 1,00

Monte uma matriz informando o custo de cada nutriente que deve ter uma saca de 50 kg de cada tipo.

8) A seguir estão os preços das melancias, de acordo com o tamanho, comercializados no meses de dezembro e janeiro de uma empresa de hortifrúti. Calcule o faturamento bruto dessa empresa nesse período.

Tam\Preço unit.	R$
Pequena	10,00
Média	12,00
Grande	15,00

Mês\tipo	Pequena	Média	Grande
Dezembro	60	45	20
Janeiro	65	48	21

9)A primeira tabela a seguir mostra os dados anuais e em toneladas de grãos de uma determinada empresa em relação a venda de três tipos de seus produtos: feijão, arroz e soja. Considerando a segunda tabela, em que mostra os preços da saca de 60kg de cada um desses produtos anualmente, qual o faturamento bruto dessa empresa nesse período?

Produto\Ano	2017	2018	2019
Arroz	5	6	6
Feijão	3	3,5	4
Soja	1	2	1,5

Ano\produto	Arroz	Feijão	Soja
2017	R$ 40,00	R$ 130,00	R$ 60,00
2018	R$ 50,00	R$ 140,00	R$ 70,00
2019	R$ 60,00	R$ 150,00	R$ 80,00

10)(UFMG) Milho, soja e feijão foram plantados nas regiões P e Q, com ajuda dos fertilizantes X, Y e Z. A matriz A (figura 1) indica a área plantada de cada cultura, em hectares, por região. A matriz B (figura 2) indica a massa usada de cada fertilizante, em kg, por hectare, em cada cultura.

Figura 1

A =	milho	soja	feijão	
	50	20	20	← P
	40	10	30	← Q

Figura 2

B =	X	Y	Z	
	10	20	15	← milho
	15	20	20	← soja
	30	20	30	← feijão

a) Calcule a matriz C = AB.

b) Explique o significado de c23, o elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz C.

11)Ao aplicar inseticidas nas plantações de laranja, pêssego e maçã, para eliminar pragas, parte do inseticida é absorvida pela planta e também pelo ser humano, que se alimenta dessas plantas. A quantidade de dois diferentes inseticidas em cada fruto é dada (em microgramas) pela matriz A:

$$A = \begin{matrix} \\ Inseticida\ 1 \\ Inseticida\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} laranja & pêssego & maçã \end{matrix}$$

E o número de frutos que João e Marina comem por mês é dado pela matriz B:

$$B = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 3 & 5 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} laranja \\ pêssego \\ maçã \end{matrix} \quad \begin{matrix} João & Marina \end{matrix}$$

Sabe-se que o produto das matrizes é dado por $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 3 & 5 \\ 12 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87 & 67 \\ 114 & 88 \end{bmatrix}$.

A alternativa **incorreta** é:

a) A quantidade de inseticida 1 que foi absorvida por Marina é 202 microgramas.

b) A quantidade de inseticida 2 que foi absorvida por João é 114 microgramas.

c) O produto $B^t.A^t$ é dado pela matriz $\begin{bmatrix} 87 & 114 \\ 67 & 88 \end{bmatrix}$.

d) A matriz $A.B$ fornece a quantidade de inseticida que foi absorvida por João e Marina.

e) A quantidade total de inseticida que foi absorvida por João é 201 microgramas.

14.1.6. Determinante de uma matriz

Embora atualmente se estude determinantes antes de sistemas lineares (que veremos adiante), historicamente os determinantes sugiram como indicativo matemático que verifica se um determinado sistema linear possui solução ou não.

O sistema linear mais simples possui uma única equação $a.x = b$. Para que essa equação tenha solução, é necessário e suficiente que a seja diferente de zero. Assim, afirmamos que a é o determinante, ou melhor, que:

"O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz."

Analisemos agora, um sistema linear com duas equações $\begin{cases} a.x + by = m \\ c.x + dy = n \end{cases}$, que em forma matricial equivale a $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m \\ n \end{vmatrix}$.

Na 1ª equação, temos: $\boxed{x = \frac{m-by}{a}}$ (1), que substituindo na 2ª, encontramos

$$c.\left(\frac{m-by}{a}\right) + dy = n \Rightarrow c.(m-by) + ady = an \Rightarrow c.m - bcy + ady = an \Rightarrow$$

$$y\,(ad-bc) = an - cm \Rightarrow \boxed{y = \frac{an-cm}{ad-bc}}.$$

Agora, substituindo em (1), obtemos

$$x = \frac{m-by}{a} = \frac{m-b\left(\frac{an-cm}{ad-bc}\right)}{a} \Rightarrow \boxed{x = \frac{dm-bn}{ad-bc}}.$$

Observe que a solução, tanto para x quanto y, depende da expressão que está no denominador, isto é, o sistema apresenta solução se $ad - bc$ for diferente de zero. Portanto, $ad - bc$ é o determinante da matriz $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, conforme a seguir.

Determinante de uma matriz de ordem 2: Dada uma matriz A quadrada de ordem 2, podemos associar um número chamado **determinante**, denominado de $detA$, como a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Diagonal secundária

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow detA = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{11}$$

Diagonal principal

1º exemplo: Vamos calcular o determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$.

Solução: $detA = 2.(-5) - 7.1 = -17.$

2º exemplo: Calculando o determinante de $B = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Solução: $detB = -1.(-2) - 3.(-4) = 2 + 12 = 14.$

3º exemplo: Calcule o valor de x, para que o determinante de $C = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 9 & x \end{bmatrix}$, seja

igual a zero.

Solução: $detC = x.x - 9 = x^2 - 9.$

Igualando a zero, temos: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$.

Determinante de uma matriz de ordem 3: Ao resolver um sistema linear de três equações e três incógnitas escrita na forma

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = m \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = n \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = p \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \\ p \end{bmatrix}$$

Encontramos no denominador de cada incógnita a mesma expressão: $a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{13}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{21}.a_{12}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$ definida como o determinante da matriz A $(detA)$.

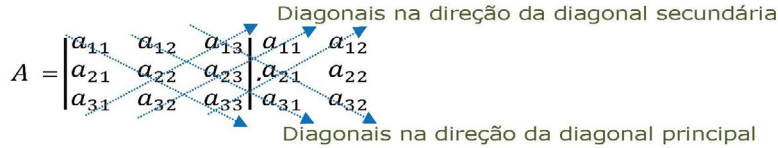
Memorizar essa expressão não é um trabalho fácil. Por esse motivo, usamos uma regra prática para cálculo de determinante de ordem 3, denominada de **regra de Sarrus**[1] que consiste em:

1º) Repetir a 1ª e a 2ª coluna à direita da matriz;

2º) Multiplicar os números das diagonais que estão no mesma direção da diagonal principal;

3º) Multiplicar os números das diagonais que estão na mesma direção da diagonal secundária e inverter os sinais de cada resultado;

4º) Somar os resultados das multiplicações dessas diagonais.



Exemplo: Utilizando a regra de Sarrus, vamos calcular o determinante de:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \\ 2 & 0 \end{matrix} \Rightarrow det = -9 - 7 = -16.$

0 0 -7 = -7 — Invertem-se os sinais.

-5 -4 0 = -9

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow det = 1 - 0 = 1.$

0 0 0

1 0 0

SAIBA MAIS!

O determinante de uma matriz identidade de qualquer ordem é 1 (um). Demonstração adiante (8ª propriedade).

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{matrix} \Rightarrow det = -6 - 1 = -7.$

0 0 -1 = -1 — Invertem-se os sinais.

-6 0 0

[1] Pierre Frédreric Sarrus (1798-1861)

EXERCÍCIOS 14.3

1) Calcule o determinante das seguintes matrizes:

a) $[-7]$

b) $[0]$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 10 & -40 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 7 & 2 & 5 \\ 8 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

j) $\begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 4 \\ 1 & 3 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 5 & x & 8 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix}$

2) Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. É correto afirmar que:

a) Não existe o produto $A.B$;

b) Não existe o produto $B.A$;

c) O produto $A.B$ é $\begin{vmatrix} 6 & 10 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$;

d) O determinante de $B.A$ é zero.

e) O determinante de $B.A$ é 76.

3) (UFC-CE) Uma matriz é dita singular quando seu determinante é nulo. Então, os valores de c que tornam singular a matriz $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & c \\ 1 & c & 3 \end{vmatrix}$ são:

a) 1 e 3 b) 0 e 9 c) -2 e 4 d) -3 e 5 e) -9 e -3

4) (UFPR) Dadas as matrizes A = $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ e B = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e sendo $N = 50 +$ det $(A.B)$ encontre o valor de N.

5) (FGV-SP) A solução da equação $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ (x real) é:

a) não tem solução real b) $x = \sqrt[2]{3}$ c) $x = \pm 1$ d) $x = 1$ e) $x = -1$

6) (UFPA) O valor de k para que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{bmatrix}$ seja nulo?

a) $-1 \pm \sqrt{2}$ b) $\sqrt{2} \pm 1$ c) $2 \pm \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} \pm 2$ e) $-4 \pm \sqrt{8}$

14.1.7. Teorema de Laplace para determinantes

Antes de anunciar o teorema de Laplace, vamos a definição de cofator (ou complemento algébrico).

Seja uma matriz quadrada de ordem 3, temos que o seu determinante é dado por:

$$detA = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{21}.a_{13}.a_{32} - (a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{21}.a_{12}.a_{33} + a_{11}.a_{23}.a_{32}).$$

Isolando os elementos da 1ª linha da matriz e formando uma matriz de ordem 2 com os demais elementos, temos

$$detA = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad (1).$$

Nessa expressão, o sinal negativo pertence ao elemento cujo $i+j$ é ímpar e os sinais positivos aos elementos cujo $i+j$ é par. O que nos permite usar a expressão $(-1)^{i+j}$ para saber o sinal que precede o elemento na expressão.

Por outro lado, perceba que a primeira matriz da expressão (1) é dada suprimindo a linha e a coluna de onde está o a_{11}, que a segunda matriz é dada suprimindo a linha e a coluna de onde está o a_{12}, que a terceira matriz da expressão (1) é dada suprimindo a linha e a coluna de onde está o a_{13}. Essas constatações conjuntas, são definidas como cofator.

Definição 14.1.7.1 (Cofator ou complemento algébrico (A_{ij})): Todo elemento a_{ij} de uma matriz, possui um cofator A_{ij}, que é o produto do número $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz formada ao suprimir a linha i e a coluna j onde se encontra o elemento. Os índices i e j são, respectivamente, o número da linha e o número da coluna onde se encontra o elemento (sua posição).

Aplicando a notação e a definição de cofator, podemos reescrever a expressão (1) da seguinte forma

$$\boxed{detA = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}}.$$

E essa igualdade é decorrente do teorema a seguir.

Teorema 14.1.7.1 (Teorema de Laplace[2]): O determinante de uma Matriz A, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores.

Demonstração:

A demonstração desse teorema para matrizes de ordem 3 utilizando a primeira linha, está na expressão (1). Para matrizes de ordem 2, temos

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

[2] Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Escolhendo a coluna 1,

$$A_{11} = (-1)^{i+j}.a_{22} = (-1)^{1+1}.a_{22} = a_{22}$$

$$A_{21} = (-1)^{i+j}.a_{12} = (-1)^{2+1}.a_{12} = -a_{12}$$

$$detA = a_{11}.A_{11} + a_{21}.A_{21} = a_{11}.a_{22} + a_{21}.(-a_{12}) \Rightarrow \boxed{detA = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{11}}.$$

As demonstrações para matrizes de ordem 3 e 2, foram feitas escolhendo a primeira linha e primeira coluna, respectivamente. A demonstração para as demais linhas ou colunas (filas) ou matrizes de ordem superior, ficam a cargo do leitor.

No entendimento desse teorema, para calcular o determinante de uma matriz, basta escolher apenas uma linha ou coluna e somar os produtos dos elementos por seus respectivos cofatores. É importante frisar, que sempre que tiver zeros numa linha ou coluna, o produto do elemento pelo seu cofator será zero, portanto é sempre prático usar uma linha ou uma coluna que contenha o máximo de zeros possível.

Exemplo: Vamos calcular mais uma vez o determinante da matriz A= $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, agora usando o teorema de Laplace.

Solução: Vamos escolher a primeira linha, pois possui um zero. Assim,

$detA = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13}$

Como $a_{13} = 0$, temos

$$detA = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12}$$

$$detA = 1.(-1)^{1+1}.\underbrace{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}} + (-1).(-1)^{1+2}.\underbrace{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$detA = -5 + (-7 - 4) = -5 - 11 \Rightarrow \boxed{detA = -16}.$$

Para mostrar que o teorema se aplica a qualquer linha ou coluna, vamos calcular novamente o determinante, utilizando agora, a terceira coluna.

$detA = a_{13}.A_{13} + a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33}$, como $a_{13} = 0$, então

$$detA = a_{23}.A_{23} + a_{33}.A_{33}$$

$$detA = 2.(-1)^{2+3}.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}} + (-1).(-1)^{3+3}.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}_{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$detA = -2.2 + (-1).12 = -4 - 12 \Rightarrow \boxed{detA = -16}.$$

2º exemplo: Calcular o determinante da matriz: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

Solução: Vamos utilizar a 3ª coluna, pois é a que possui mais zeros.

$$detA = a_{13}.A_{13}$$

$$detA = 7.(-1)^{1+3}.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}} = 7.(18-20) = -14.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplique o teorema de Laplace em outra linha ou coluna desta matriz e constate o mesmo valor para o determinante.

O teorema de Laplace surge como alternativa para calcular determinantes de matrizes de até ordem 3, pelo qual já sabíamos calcular. Porém, é o único método (sem usar as propriedades a seguir) que calcula determinantes de matrizes de ordem $n \geq 4$. Veja um exemplo a seguir.

3º exemplo: Calcular o determinante da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Solução: A 2ª coluna e a 3ª linha são as que possuem mais zeros. Vamos escolher a 2ª coluna e lembrando que os elementos iguais a zero não precisa calcular o cofator.

$$detA = 2.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{4+2}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$detA = 2.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}}_{-27} - 1.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}_{-46} = 2.(-27) - 1.(-46) \Rightarrow \boxed{detA = -8}.$$

EXERCÍCIOS 14.4

1) Calcule o determinante das seguintes matrizes usando o teorema de Laplace.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 7 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \end{vmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14.1.8. Propriedades de determinantes de matrizes

As demonstrações das propriedades a seguir serão feitas somente para matrizes de ordem 2 ou 3, embora sejam válidas para qualquer ordem.

Dadas duas matrizes A e B quaisquer de ordem n, temos as seguintes propriedades.

1ª propriedade: O determinante de uma matriz e sua transposta são iguais.

$$detA = detA^t$$

Demonstração: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ e $A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$

Usando o teorema de Laplace na 1ª linha de A e na 1ª coluna de A^t, os resultados são iguais.

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 1.5 - 2.3 = -1.$

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow detA^t = 1.5 - 2.3 = -1.$

2ª propriedade: Se todos os elementos de uma coluna ou linha de uma matriz são iguais a zero, então o seu determinante é nulo.

Demonstração: O determinante de uma matriz segundo o teorema de Laplace, é a soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) pelos seus respectivos cofatores, se os elementos são todos nulos, o determinante será nulo.

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 0.$

3ª propriedade: Se trocarmos a posição de duas linhas ou duas colunas de uma matriz, então o determinante da nova matriz será o oposto do determinante da matriz original.

Demonstração:

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ e $A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ (trocando a 2ª com a 3ª linha)

$detA = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

$detA' = -a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Segue que $detA = -detA'$ (demonstração feita somente usando Laplace na 1ª linha e trocando a 2ª com a 3ª linha. De forma análoga, demonstra-se os demais casos e demais ordens.

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 1 + 7 = 8.$

Trocando a posição das linhas: $A' = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \Rightarrow detA' = -7 - 1 = -8.$

4ª propriedade: Se duas linhas ou duas colunas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Demonstração: Supondo 2ª e 3ª linhas iguais. Os elementos da 1ª linha e 2ª linha das matrizes de ordem 2 da expressão $detA = a_{11}.\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{0} - a_{12}.\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{0} + a_{13}.\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{0}$ também são iguais e o determinante de cada uma dela é nula, implicando em detA = 0. Com algumas manipulações demonstra-se os demais casos.

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

A 1ª coluna é igual a 3ª coluna. Calcule e constate que $detA = 0.$

5ª propriedade: Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz por um k real qualquer, então o determinante da nova matriz obtida será k vezes o determinante da matriz original.

Demonstração: $detA = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$ multiplicando a 1ª linha por k, temos

$detA' = k.a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - k.a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + k.a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \Rightarrow$

$detA' = k.\ detA$ (o mesmo acontece com as demais linhas ou colunas).

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = -3 - 3 = -6.$

Vamos multiplicar a primeira linha por 3,

$$A' = \begin{vmatrix} 1.3 & 2.3 & 1.3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow detA' = -9 - 9 = -18.$$

O novo determinante é o triplo do determinante da matriz original.

6ª propriedade: Ao multiplicarmos a matriz A por $k \in \mathbb{R}$, o determinante da nova matriz será o produto de k^n pelo determinante de A, isto é:

$$det(k.A) = k^n.detA$$

Onde n é ordem da matriz

Demonstração: Na propriedade anterior, mostramos que ao multiplicar qualquer linha ou coluna de uma matriz A por k, o novo determinante será $k.det\ A$. Por consequência, se multiplicarmos toda a matriz por k, teremos $det(k.A) =$

$k^n.detA$, pois são n linhas.

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 2.2 - 1.1 = 3$. Multiplicando a matriz A por 5, temos

$$A' = 5.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = 10.10 - 5.5 = 75.$$

Utilizando a propriedade para $k = 5$, temos: $det\,(5.A) = 5^2.detA = 5^2.3 = 25.3 = 75.$

7ª propriedade: Se uma linha (ou coluna) for combinação linear de outras linhas (ou colunas), temos $detA = 0$.

Demonstração: O termo combinação linear entre linhas significa que alguma linha é igual a q vezes uma linha mais p vezes outra linha. O mesmo se aplica a colunas.

Desse modo, supondo que a 3ª linha de uma matriz 3x3 é igual a q vezes a 1ª linha mais p vezes a 2ª linha, dispomos de

$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ q.a_{11} + p.a_{21} & q.a_{12} + p.a_{22} & q.a_{13} + p.a_{23} \end{vmatrix}$, então

$$detA = a_{11}.\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ q.a_{12} + p.a_{22} & q.a_{13} + p.a_{23} \end{vmatrix}}_{a_{22}.q.a_{13} - a_{23}.q.a_{12}} - a_{12}.\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ q.a_{11} + p.a_{21} & q.a_{13} + p.a_{23} \end{vmatrix}}_{a_{21}.q.a_{13} - a_{23}.q.a_{11}} +$$

$$a_{13}.\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ q.a_{11} + p.a_{21} & q.a_{12} + p.a_{22} \end{vmatrix}}_{a_{21}.q.a_{12} - a_{22}.q.a_{11}} = a_{11}.a_{22}.q.a_{13} - a_{11}.a_{23}.q.a_{12} - a_{12}.a_{21}.q.a_{13} +$$

$$a_{12}a_{23}.q.a_{11} + a_{13}.a_{21}.q.a_{12} - a_{13}.a_{22}.q.a_{11} \Rightarrow detA = 0.$$

Similarmente demonstra-se a combinação linear entre as colunas.

Exemplo: O determinante de $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 11 \\ -4 & -1 & -9 \end{vmatrix}$ é zero, pois a 3ª coluna é igual ao dobro da 1ª coluna, mais a 2ª coluna. Verifique!

Identificar uma combinação linear generalizada entre linhas (ou colunas) de uma matriz pode não ser uma tarefa fácil. No entanto, dentre as particularidades, a proporcionalidade direta entre linhas (ou entre colunas) pode ser notada.

Exemplo: O determinante de $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ é zero, pois a 2ª coluna é igual ao dobro da 1ª coluna.

2º exemplo: O determinante de $B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 6 & 6 & 12 \end{vmatrix}$ é zero, pois a 3ª linha é igual ao triplo da 1ª.

8ª propriedade: Não há uma propriedade de determinantes para soma de matrizes, por exemplo, se $C = A + B$, temos que $detC \neq detA + detB$. Entretanto, se há uma linha ou coluna de C que é soma dos elementos de A e B, então: $detC = detA + detB$.

Exemplo: $\underbrace{det\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4+3 & 1+1 & 3+5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-22} = \underbrace{det\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-10} + \underbrace{det\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{-12}.$

Demonstração: Como os cofatores são iguais nas matrizes A e B, basta aplicar o teorema de Laplace na linha (ou coluna) ondo ocorre a soma.

$$det\,(A+B) = (a_{11}+b_{11}).A_{\mathbf{11}} + (a_{12}+b_{12}).A_{\mathbf{12}} + (a_{13}+b_{13}).A_{\mathbf{13}}$$

$$det(A+B) = \underbrace{a_{11}.A_{\mathbf{11}} + a_{12}.A_{\mathbf{12}} + a_{13}.A_{\mathbf{13}}}_{DetA} + \underbrace{b_{11}.A_{\mathbf{11}} + b_{12}.A_{\mathbf{12}} + b_{13}.A_{\mathbf{13}}}_{DetB}$$

9ª propriedade: Dada uma matriz A triangular, seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Demonstração: Numa matriz triangular inferior de ordem 3,temos

$$a_{12} = 0, a_{13} = 0 \; e \; a_{23} = 0.$$

Como

$$detA = a_{11}.a_{22}.a_{33} + \underbrace{a_{12}.a_{23}.a_{31}}_{0,pois\ a_{12}=0} + \underbrace{a_{21}.a_{13}.a_{32}}_{0,pois\ a_{13}=0} - \underbrace{a_{13}.a_{22}.a_{31}}_{0,pois\ a_{13}=0}$$

$$- \underbrace{a_{21}.a_{12}.a_{33}}_{0,pois\ a_{12}=0} - \underbrace{a_{11}.a_{23}.a_{32}}_{0,pois\ a_{23}=0},$$

Anulam-se todas as expressões, menos $a_{11}.a_{22}.a_{33}$.

O mesmo acontece com a matriz triangular superior e com a matriz diagonal (verifique!).

Exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 7 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 1.1.(-3) = -3.$

2º exemplo: $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = 1.2.3 = 6.$

Calcule o determinante dessas matrizes na forma tradicional e comprove os mesmos valores.

A seguir, estão reunidos alguns exemplos de aplicação dessas propriedades.

1º exemplo: Calcule os determinantes observando as propriedades sobre determinantes.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow$ det = 0, pois a 1ª linha é igual à 3ª linha (4ª propriedade).

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ det = 0, pois a 1ª coluna é proporcional (o dobro) da 2ª coluna (7ª propriedade).

c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -13 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ det = 1.2.1 = 2 (9ª propriedade - matriz triangular superior: determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal).

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -13 & 3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ det = 1.2.1 = 2 (Duas propriedades podem ser aplicadas: a matriz é triangular inferior ou é a transposta da matriz do item anterior).

2º exemplo: Justifique por que os determinantes das matrizes A = $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ \frac{4}{3} & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ e B = $\begin{vmatrix} 2 & \frac{4}{3} & 5 \\ -5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, são iguais.

Solução: A matriz A é transposta de B.

3º exemplo: Todos os determinantes abaixo são nulos? Justifique citando a propriedade.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sim, pois os elementos da 3ª coluna são nulos, conforme a 2ª propriedade.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \\ -5 & 14 & -5 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sim, a 1ª e 3ª coluna são iguais, conforme a 4ª propriedade.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sim, 2ª e 4ª linha são iguais, conforme a 4ª propriedade.

d) $\begin{vmatrix} -6 & 5 & 3 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & 1 \\ 12 & 1 & 5 & 4 \\ 9 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sim, a 1ª coluna é proporcional 4ª coluna (3 vezes), conforme a 7ª propriedade.

e) $\begin{vmatrix} a & ab & a^2 & ab \\ b & bc & b & cb \\ c & cd & cd & dc \\ d & ad & d^2 & ad \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sim, a 2ª e 4ª coluna são iguais, conforme a 4ª propriedade.

f) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Sim, a 3ª linha é igual 1ª mais 12, consoante a 7ª propriedade.

g) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$ Não.

Anunciaremos agora, alguns teoremas que aliados às propriedades de determinantes, são extremamente úteis nos estudos de matrizes.

Teorema 14.1.8.1 (Teorema de Cauchy[3]): A soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna) qualquer de uma matriz A, ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma linha (ou coluna) paralela, é igual a zero.

[3] August-Louis Cauchy (1789-1857)

Demonstração: De fato, se $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, então os cofatores da 3ª linha são:

$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$ e $A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Desenvolvendo, vemos que

$$a_{11}.A_{31} + a_{12}.A_{32} + a_{13}.A_{33} = 0.$$

De forma análoga, demonstra-se para as demais linhas ou colunas.

Teorema 14.1.8.2 (Teorema de Binet [4]): Sejam duas matrizes A e B, de mesma ordem, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes de cada uma delas. Ou seja:

$$det\,(A.B) = detA.detB.$$

Demonstração: Sejam duas matrizes $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.

$$A.B = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{12} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix}$$

Aplicando a 8ª propriedade:

$$det(A.B) = \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} & a_{11}.b_{12} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}.b_{21} & a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(A.B) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} & a_{11}.b_{12} \\ a_{21}.b_{11} & a_{21}.b_{12} \end{bmatrix}}_{0} + \begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} & a_{11}.b_{12} \\ a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}.b_{21} & a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} & a_{21}.b_{12} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12}.b_{21} & a_{12}.b_{22} \\ a_{22}.b_{21} & a_{22}.b_{22} \end{bmatrix}}_{0} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} & a_{11}.b_{12} \\ a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}.b_{21} & a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} & a_{21}.b_{12} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = detA.detB.$$

A partir do teorema de Binet podemos tirar algumas conclusões:

- Embora as matrizes $A.B$ e $B.A$ não sejam sempre iguais, no caso de determinantes, teremos sempre: $\det(A.B) = \det(B.A)$, pois $detA.detB = detB.detA$.
- Uma vez que $det\,A.B = detA.detB$, para $B = I$, onde I é uma matriz identidade de mesma ordem de A, temos

$$det(A.I) = detA.detI.$$

Como a matriz identidade (I) é elemento neutro da multiplicação, dispomos de

[4] Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856)

$$detA = detA.detI \Rightarrow detI = \frac{detA}{detA} = 1.$$

$$det\ I = 1$$

O determinante de uma matriz identidade de qualquer ordem é 1.

Teorema 14.1.8.3 (Teorema de Jacobi[5]): Seja uma matriz quadrada A de ordem n, se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou coluna) dessa matriz por um número e adicionarmos os resultados obtidos aos elementos correspondentes de outra linha (ou coluna), obteremos uma nova matriz B, tal que $detA = detB$.

Demonstração: Seja $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, multiplicando a 1ª linha por k e adicionando a 2ª linha, obtemos

$$A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + k.a_{11} & a_{22} + k.a_{12} & a_{23} + k.a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$detA' = -(a_{21} + k.a_{11}).\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{22} + k.a_{12}).\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{23} + k.a_{13}).\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$detA' = \underbrace{-(a_{21}).\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (a_{22}).\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - (a_{23}).\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{det\ A}$$

$$\underbrace{- k.a_{11}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k.a_{12}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - k.a_{13}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{zero} \Rightarrow detA' = detA.$$

De forma similar mostra-se para outra linha ou coluna.

Os procedimentos do teorema de Jacobi nos permite modificar os elementos de uma matriz, deixando inalterado o seu determinante. Isso é extremamente útil, pois podemos alterar os elementos de uma matriz de forma a torná-la em uma matriz triangular, cujo determinante, conforme vimos na 9ª propriedade, é fácil de calcular.

Esse método aplicado em linhas de uma matriz é denominado de **escalonamento**, muito utilizado em sistemas lineares (que veremos adiante) e que pode ser uma ferramenta alternativa para o cálculo de determinante de matrizes de qualquer ordem.

Exemplo: Vamos calcular o determinante da matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Solução: Para utilizar o teorema de Jacobi aliado à 9ª propriedade (ou o escalonamento, como preferir), devemos pensar em uma nova matriz triangular superior

[5] Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851).

ou inferior. Pois, o determinante dessa matriz pode ser calculado facilmente multiplicando apenas os elementos da diagonal principal. Pensando em uma matriz triangular superior, vamos:

1º) Produzir um zero no lugar do elemento 3 destacado a seguir, multiplicando a 1ª linha por -3 e soma-la à 2ª linha.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xleftarrow{x(-3)+} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -20 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2º) Produzir um zero no lugar do elemento 2 destacado a seguir, multiplicando a 1ª linha por -2 e soma-la à 3ª linha.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -20 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xleftarrow{x(-2)+} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -20 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix}$$

3º)Por fim, produzir um zero no lugar do elemento -3 destacado abaixo, multiplicando a 2ª linha por -3/4 e somando os resultados com a 3ª linha.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -20 \\ 0 & -3 & -9 \end{vmatrix} \xleftarrow{x(-3/4)+} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Como a nova matriz é triangular, seu determinante é

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow det = 1.(-4).6 = -24. Assim, \boxed{det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -24.}$$

EXERCÍCIOS 14.5

1) Justifique por que os determinantes das matrizes a seguir são nulos.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 100 & 200 & 50 \\ 102 & 202 & 52 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & a & b \\ c & d & e \\ ab & ab & b^2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} a & 1 \\ ab+ac & b+c \end{vmatrix}$

2) Observando as propriedades sobre determinantes e sabendo que o determinante de $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & x \end{vmatrix}$ é 18, calcule x.

3) Dadas as matrizes $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e aplicando as propriedades e teoremas sobre determinantes de matrizes, calcule:

a) $det\,(A.B)$ c) $det\,(A.B^2)$

b) $det\,(B.A)$ d) $det\,(A^2.B^2)$

4)(UFCE) Calcule o determinante da matriz P^2, sendo P a matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

5)(ITA - SP) Se $det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 0 b) 4 c) 8 d)12 e)16

6)(AFA - SP) O valor do determinante de uma matriz de ordem n é 21. Se dividirmos a segunda linha desta matriz por 7 e multiplicarmos a matriz por 3, o valor do novo determinante será:

a) 3^n b) 3^{n+1} c) $3n$ d) $3n+3$ e)16

7)Calcule o determinante de: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1000 & 100 & 1 & 0 & 0 \\ 300 & 500 & 200 & 1 & 0 \\ 400 & 600 & 700 & 900 & 1 \end{pmatrix}$

8)Calcule o determinante de: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

9)Utilize o método do escalonamento (teorema de Jacobi aliado à 9ª propriedade) e calcule o determinante das seguintes matrizes.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 3/4 & 1 \\ -1 & 7 & 1/3 \\ -2 & 1/4 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10)Utilizando o escalonamento de forma inversa, elabore uma matriz de ordem 3 não triangular que tenha determinante 10.

14.1.9. Matriz inversa

Na aritmética dos números, todo número real a tem seu inverso multiplicativo, ou seja, existe um número real b (não nulo), tal que $a.b = b.a = 1$. A aritmética matricial é semelhante, porém nem todas as matrizes (não nulas) possuem inversas, conforme a definição a seguir.

Definição 14.1.9.1: Dizemos que A é uma matriz invertível se existir uma matriz B tal que $A.B = B.A = I$. Se não é invertível, dizemos que A é uma matriz singular. A matriz B em questão é denominada de inversa da matriz A e é indicada por A^{-1}.

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$$

Exemplo: Verifique se a matriz $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ é invertível e calcule sua matriz inversa.

Solução: Por definição, é preciso encontrar uma matriz B, tal que: A.B = B.A = I. Denotando $B = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a+3b & 1c+3d \\ 2a+7b & 2c+7d \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Igualando a 1ª coluna:

$$a + 3b = 1 \Rightarrow \boxed{a = 1 - 3b} \quad (1).$$

$$2a + 7b = 0 \Rightarrow 2(1 - 3b) + 7b = 0 \Rightarrow 2 - 6b + 7b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -2}.$$

Substituindo $b = -2$ em (1), obtemos

$$a = 1 - 3.(-2) \Rightarrow a = 1 + 6 \Rightarrow \boxed{a = 7}.$$

Igualando a 2ª coluna, encontramos

$$1c + 3d = 0 \Rightarrow \boxed{c = -3d} \quad (2).$$

$$2c + 7d = 1 \Rightarrow 2(-3d) + 7d = 1 \Rightarrow = 1 \Rightarrow -6d + 7d = 1 \Rightarrow \boxed{d = 1}.$$

Substituindo $d = 1$ em (2), dispomos de

$$c = -3d \Rightarrow c = -3.1 \Rightarrow \boxed{c = -3}.$$

Vamos verificar se de fato $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ é igual a $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.1-6 & 21-21 \\ -2+2 & -6+7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, então $B = A^{-1} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$.

Para verificação da validade, é preciso provar apenas uma ordem do produto: $A^{-1}.A = I$ ou $A.A^{-1} = I$. Pois, se uma for satisfeita a outra também será (conforme demonstrado na subseção 14.1.10).

2º exemplo: Verifique se a matriz $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ é invertível e calcule sua matriz inversa.

Solução: Pela definição, precisamos encontrar uma matriz A^{-1}, tal que

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$$

Denotando $A^{-1} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$, temos: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Multiplicando as matrizes e igualando os elementos correspondentes, encontramos as equações:

$$2a + 3d + g = 1 \quad (1)$$
$$2b + 3e + h = 0 \quad (2)$$
$$2c + 3f + i = 0 \quad (3)$$
$$a - d + 2g = 0 \quad (4)$$
$$b - e + 2h = 1 \quad (5)$$
$$c - f + 2i = 0 \quad (6)$$

O produto da última linha nos fornece:

$4d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 0} \Rightarrow$ Substituindo em (1): $\boxed{2a + g = 1}$, e em (4): $\boxed{a + 2g = 0}$.

$4e = 0 \Rightarrow \boxed{e = 0} \Rightarrow$ Substituindo em (2): $\boxed{2b + h = 1}$, e em (5): $\boxed{b + 2h = 0}$.

$4f = 1 \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{4}} \Rightarrow$ Substituindo em (3): $\boxed{2c + i = -\frac{3}{4}}$, e em (6): $\boxed{c + 2i = \frac{1}{4}}$.

Resolvendo o sistema, encontramos

$$\begin{cases} 2a + g = 1 \\ a + 2g = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Encontramos: } \boxed{g = -\frac{1}{3}} \; e \; \boxed{a = \frac{2}{3}}.$$

E agora o sistema,

$$\begin{cases} 2b + h = 0 \\ b + 2h = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h = \frac{2}{3}} \; e \; \boxed{b = -\frac{1}{3}}.$$

Por fim,

$$\begin{cases} 2c + i = -\frac{3}{4} \\ c + 2i = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{i = \frac{5}{12}} \; e \; \boxed{c = -\frac{7}{12}}.$$

A inversa é portanto,

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

Para confirmar se está correto, vamos verificar se $A.A^{-1} = \mathrm{I}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} + 0 + \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} + 0 + \frac{2}{3} & 2.\frac{-7}{12} + \frac{3}{4} + \frac{5}{12} \\ \frac{2}{3} + 0 + \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} + 0 + \frac{4}{3} & \frac{-7}{12} + \frac{-1}{4} + \frac{10}{12} \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 4.\frac{1}{4} + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba que, para o cálculo de uma matriz inversa de ordem 2, resolvemos dois sistemas de quatro equações e quatro incógnitas. E de ordem 3, três sistemas de nove equações e nove incógnitas, e para ordem n, serão n^2 equações e n^2 incógnitas. Isso torna o processo de cálculo de inversa, nesses moldes, dispendioso. A seguir, veremos dois métodos eficazes para o cálculo de inversa de matrizes.

Método por meio de determinantes: Inicialmente vamos à algumas definições.

Definição 14.1.9.2 (Matriz dos cofatores): A matriz dos cofatores de uma matriz A é uma matriz (de mesma ordem de A) formada pelos cofatores dos seus respectivos elementos. Indicamos por A'.

Definição 14.1.9.3 (Matriz adjunta): Denominamos de matriz adjunta a matriz transposta da matriz dos cofatores de uma matriz A, e indicamos por $\overline{A}$.

Exemplo: Vamos calcular a matriz dos cofatores e a matriz adjunta da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ anterior.

Solução:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.|7| = 7.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}.|2| = -2.$

$A_{21} = (-1)^{2+1}.|3| = -3.$

$A_{22} = (-1)^{2+2}.|1| = 1.$

A matriz dos cofatores é $A' = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$.

E a matriz adjunta é a sua transposta

$$\overline{A} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

SAIBA MAIS!

O cálculo da matriz adjunta de ordem 2, pode ser calculado a partir do seguinte processo prático:

- Permutar os elementos da diagonal principal;

- Inverter os sinais dos elementos da diagonal secundária.

2º exemplo: Vamos calcular a matriz dos cofatores e a matriz adjunta da matriz $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ anterior.

Solução:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8.$

$A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$

$A_{21} = (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4.$

$A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

$A_{23} = (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8.$

$A_{31} = (-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$

$A_{32} = (-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$

$A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5.$

Assim, a matriz dos cofatores é $A' = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & -5 \end{vmatrix}$.

E a matriz adjunta é a sua transposta: $\overline{A} = \begin{vmatrix} -8 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & -5 \end{vmatrix}$.

Para matrizes de ordem 3, existe um processo prático que nos ajuda a calcular, alternativamente, a matriz dos cofatores. Esse processo consiste em:

• Primeiro: Repetir a primeira e a segunda coluna da matriz à esquerda da matriz.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{matrix}$$

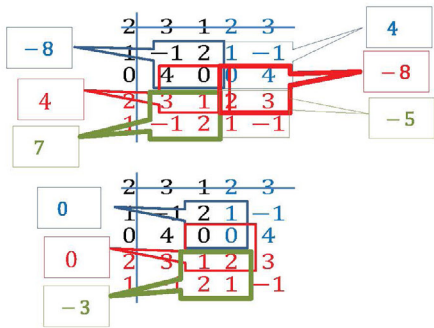
• Segundo: Repetir a primeira e segunda linha da nova matriz, embaixo da última linha.

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{matrix}$$

• Terceiro: Eliminar a primeira linha e a primeira coluna.

$$\begin{matrix} \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{matrix}$$

• Quarto: Calcular os determinantes de todas as matrizes de ordem 2×2 possíveis formadas por elementos adjacentes, colocando os resultados em suas respectivas posições na nova matriz formada. Essa nova matriz será a matriz dos cofatores.



O que nos dá a matriz dos cofatores $A' = \begin{vmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -8 \\ 7 & -3 & -5 \end{vmatrix}$.

Teorema 14.1.9.1: Se A é uma matriz quadrada de ordem n e $\det A \neq 0$, então a inversa de A, é dado por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} . \overline{A}$$

Demonstração: Inicialmente, vamos mostrar que $A.\overline{A} = \overline{A}.A = detA.\ I$.

Com efeito, os elementos de $A.\overline{A}$ são elementos de uma linha (ou coluna) vezes os seus respectivos cofatores, visto que $\overline{A}$ é a transposta de A'. Em razão disso, os elementos da diagonal principal são iguais ao determinante de A, pois cada elemento multiplica o seu próprio cofator (teorema de Laplace), e os elementos que não pertence a diagonal são, segundo o teorema 14.1.8.1 (teorema de Cauchy), iguais a zero.

Assim, sendo $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ e $\overline{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$, a matriz $A.\overline{A}$ resulta na matriz diagonal $\begin{vmatrix} detA & 0 & 0 \\ 0 & detA & 0 \\ 0 & 0 & detA \end{vmatrix}$, ou melhor, em $detA.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = detA.I$.

Por fim, como

$$A.\overline{A} = detA.I \text{ e } I = A.A^{-1} \Rightarrow A.\overline{A} = detA.A.A^{-1} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{detA}.\overline{A}}.$$

A vantagem deste teorema é que para calcular a inversa de uma matriz, basta calcular a transposta da matriz dos cofatores (matriz adjunta) e multiplicar todos os seus elementos pelo inverso do determinante de A.

Um fato resultante desse teorema, é que para existir a inversa A^{-1} (analise a fórmula), é preciso que $detA \neq 0$. Em outras palavras:

"Em toda e qualquer matriz, a sua inversa existe se, e somente se, seu determinante for diferente de zero."

Outra relação importante é que, se $A.A^{-1} = I$ (por definição), então pelo teorema 14.1.8.2 (teorema de Binet), temos

$$detA.detA^{-1} = detI \Rightarrow \boxed{detA.detA^{-1} = 1.}$$

Utilizando esse mesmo raciocínio para potências, temos: $A.A^{-1} = I \Rightarrow \boxed{A^0 = I}$.

1º exemplo: Vamos calcular a inversa de $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ anterior, utilizando esse método.

Solução: Siga o roteiro.

1º) Verificar existência da inversa: det = 7 − 6 =1 (≠0, então existe inversa).

2º) Calcular a matriz dos cofatores (já calculado anteriormente): $A' = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$.

3º) Calcular a matriz adjunta (a transposta de A'): $\overline{A} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$.

4º) Aplicar o teorema 14.1.9.1, isto é, multiplicar a matriz adjunta pelo inverso do determinante de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}.\overline{A} = \frac{1}{1}.\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}}.$$

SAIBA MAIS!

Alternativamente, para o caso de matrizes de ordem 2, podemos aplicar os seguintes passos para o cálculo da matriz inversa:

- *Permutar os elementos da diagonal principal;*
- *Inverter os sinais dos elementos da diagonal secundária.*
- *Dividir todos elementos pelo determinante da matriz.*

Recalcule a matriz inversa anterior seguindo esses passos.

2º exemplo: Calcular, se existir, a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

1º) Verificando existência da inversa: $\det = 4 - 6 = -2$ ($\neq 0$, então existe inversa).

2º) Montando a matriz dos cofatores:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.\,4 = 4$ $\qquad$ $A_{12} = (-1)^{1+2}.\,3 = -3$

$A_{21} = (-1)^{2+1}.\,2 = -2$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^{2+2}.\,1 = 1$

$$\boxed{A' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}}.$$

3º) Calculando a matriz adjunta (a transposta de A'): $\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

4º) Multiplicando a matriz adjunta pelo inverso do determinante de A,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\bar{A} = \frac{1}{-2}.\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

Já que é um matriz de ordem 2, alternativamente, podemos também:

1º)Permutar os elementos da diagonal principal: $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

2º)Inverter os sinais dos elementos da diagonal secundária: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$;

3º)Dividir todos elementos pelo determinante da matriz: $\begin{bmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$.

3º exemplo: Calcular, se existir, a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Solução: A matriz adjunta é $\bar{A} = \begin{vmatrix} -8 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & -5 \end{vmatrix}$, já calculada no anteriormente. Então, passemos para o cálculo de $detA$.

Pelo teorema de Laplace na 3ª linha: $detA = 4.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.(-1).3 = -12$.

Como o determinante é diferente de zero, existe inversa. Aplicando o teorema 14.1.9.1, obtemos

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\bar{A} = \frac{1}{-12}.\begin{bmatrix} -8 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{-12} & \frac{4}{-12} & \frac{7}{-12} \\ \frac{0}{-12} & \frac{0}{-12} & \frac{-3}{-12} \\ \frac{4}{-12} & \frac{-8}{-12} & \frac{-5}{-12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}.$$

4º exemplo: Calcular o determinante da matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e a sua inversa.

Solução: Vamos usar o teorema de Laplace na 2ª coluna (possui mais zeros).

$A_{22} = (-1)^{2+2} . \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = -3+14 = 11.$

$detA = a_{22}.A_{22} = 1.11 = 11$ ($\neq 0$, existe inversa).

Os cofatores dos elementos são:

$A_{11} = (-1)^{1+1}.1 = 1$
$A_{21} = (-1)^{2+1}.0 = 0$
$A_{31} = (-1)^{3+1}.2 = 2$
$A_{12} = (-1)^{1+2}.-15 = 15$
$A_{22} = (-1)^{2+2}.11 = 11$
$A_{32} = (-1)^{3+2}.-8 = 8$
$A_{13} = (-1)^{1+3}.-7 = -7$
$A_{23} = (-1)^{2+3}.0 = 0$
$A_{33} = (-1)^{3+3}.-3 = -3$

Utilize opcionalmente o processo prático para calcular a matriz dos cofatores:

$$\begin{array}{ccccc} -3 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -7 \\ 0 & 11 & 0 \\ 2 & 8 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 15 & 11 & 8 \\ -7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 15 & 11 & 8 \\ -7 & 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & 0 & \frac{2}{11} \\ \frac{15}{11} & 1 & \frac{8}{11} \\ \frac{-7}{11} & 0 & \frac{-3}{11} \end{bmatrix}.$$

Método por eliminação Gauss-Jordan: Primeiro, escreve-se lado a lado a matriz que queremos calcular a inversa e a matriz identidade. Em seguida, aplicam-se sucessivas operações elementares sobre as linhas da matriz que queremos inverter, de modo a transformá-la em matriz identidade. Nesse processo, as operações devem ser aplicadas em toda a linha. Ao final, a matriz identidade torna-se a matriz inversa.

1º exemplo (já resolvido anteriormente): Calcular, se existir, a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como desejamos que a matriz acima "se transforme" em uma matriz identidade, é preciso ter um zero no lugar do elemento 3. Para isso vamos multiplicar a 1ª linha por -3 e somar com a 2ª linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3-3.1 & 4-3.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0-3.1 & 1-3.0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para ter um zero no lugar do elemento 2, vamos multiplicar a 2ª linha por 1 e somar com a primeira linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos do número 1, no lugar do elemento -2, para isso basta dividir a 2ª linha por -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{0}{-2} & \frac{-2}{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-2}{-2} & \frac{1}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{A^{-1}}$$

2º exemplo (já resolvido anteriormente): Calcular a inversa da matriz $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$-4\times\begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1\times\begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ -1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -8 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-7\times\begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -8 \\ 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 28 & 71 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -7 & 28 & 1 \end{bmatrix}$$

$$28/3\times\begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 28 & 71 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -7 & 28 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-4/3\times\begin{bmatrix} 1 & -4 & -10 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -10/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-24/11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ -135/33 & -3 & -24/11 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2/11\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ -135/33 & -3 & -24/11 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/11 & 0 & 2/11 \\ -135/33 & -3 & -24/11 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \div -3 \\ \div -11/3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -11/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/11 & 0 & 2/11 \\ -135/33 & -3 & -24/11 \\ 7/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 2/15 & 0 & 1/5 \\ 15/11 & 1 & 8/11 \\ -7/11 & 0 & -3/11 \end{bmatrix}}_{A^{-1}}.$$

Teorema 14.1.9.2 (unicidade): Se A possui inversa, então essa inversa é única.

Demonstração: Suponha que exista duas matrizes B e C inversas da mesma matriz A, então:

$$A.B = B.A = I = A.C = C.A$$

$$B = B.I = B.(A.C) = \underbrace{(B.A)}_{I}.C \Rightarrow \boxed{B = C}.$$

Teorema 14.1.9.3 (a inversa da inversa): Se A é invertível, então A^{-1} também é, e nesse caso:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Demonstração: Como $A^{-1}.(A^{-1})^{-1} = I$ e $A^{-1}.A = I$, então:

$$A^{-1}.(A^{-1})^{-1} = A^{-1}.A \Rightarrow A^{-1}.(A^{-1})^{-1} - A^{-1}.A = 0 \Rightarrow$$

$$A^{-1}[(A^{-1})^{-1} - A] = 0$$

Nesse caso, há duas hipóteses:

- $A^{-1} = 0$ (matriz nula, caso em que não se aplica);
- $(A^{-1})^{-1} - A = 0 \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$.

Teorema 14.1.9.4 (A inversa do produto): Se A e B são invertíveis, então $(A.B)^{-1}$ também é, e nesse caso:

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

Demonstração: Precisamos mostrar que $(A.B).B^{-1}.A^{-1} = B^{-1}.A^{-1}.(A.B) = I$.

Aplicando a propriedade associativa:

$$(A.B).B^{-1}.A^{-1} = A.\underbrace{(B.B^{-1})}_{I}.A^{-1} = A.A^{-1} = I$$

$$B^{-1}.A^{-1}.(A.B) = B^{-1}.\underbrace{(A^{-1}.A)}_{I}.B = B^{-1}.B = I.$$

Teorema 14.1.9.5 (A inversa da transposta): Se A é invertível, então A^t também é, e nesse caso:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Demonstração: $A.A^{-1} = I$ e $A^{-1}.A = I$.

Aplicando a transposta: $(A.A^{-1})^t = I^t$ *e* $(A^{-1}.A)^t = I^t$.

Aplicando a propriedade do produto da transposta: $(A^{-1})^t.A^t = I$ *e* $A^t.(A^{-1})^t = I$.

Como a matriz inversa é única, concluímos que: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

14.1.10. Equações matriciais

São equações que envolvem operações com matrizes.

1º exemplo: Sabendo que $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, calcule a matriz X tal que:

a) $X+A=B$

Solução: Inicialmente vamos isolar a incógnita X na expressão.

$$X+A=B \Rightarrow \boxed{X=B-A} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-0 & 1-(-1)\\ 1-3 & 2-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}.$$

b) $A.X=B$

Solução: Multiplicando a equação por A^{-1} pelo lado esquerdo, temos

$$A.X=B \Rightarrow A^{-1}.A.X=A^{-1}.B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}.A}_{I}.X=A^{-1}.B \Rightarrow \boxed{X=A^{-1}.B}.$$

Calculando A^{-1}, uma vez que $\det A=3\ (\neq 0)$, temos $A'=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e $\overline{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$.

Logo,

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}.B=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ -1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+\frac{1}{3} & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\\ -3+0 & -1+0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & \frac{4}{3}\\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

Multiplique a matriz A por X e veja que o resultado é realmente a matriz B.

2º exemplo: Dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & -8\\ -4 & 6 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$, calcule uma matriz X de forma que $2X+3A=2B$.

Solução: Vamos inicialmente isolar a incógnita X.

$$2X+3A=2B \Rightarrow 2X=2B-3A \Rightarrow X=\frac{2B-3A}{2}=\frac{2B}{2}-\frac{3A}{2}\Rightarrow X=B-\frac{3}{2}A.$$

$$X=B-\frac{3}{2}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}-\frac{3}{2}.\begin{bmatrix}1 & 4 & -8\\ -4 & 6 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{-3}{2} & -6 & 12\\ 6 & -9 & -3\\ -3 & 0 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow \boxed{X=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & -6 & 12\\ 10 & -8 & -3\\ -3 & 3 & 4\end{bmatrix}}.$$

3º exemplo: Demonstre que $A.A^{-1}=I$ se, e somente se, $A^{-1}A=I$.

Solução: Multiplicando a equação por A^{-1} pelo lado esquerdo, temos

$$A.A^{-1}=I \Leftrightarrow A^{-1}.A.A^{-1}=A^{-1}.I \Leftrightarrow A^{-1}.A.A^{-1}=A^{-1}.$$

Multiplicando agora por A pelo lado direito da equação, dispomos de

$$A^{-1}.A.\underbrace{A^{-1}.A}_{I}=\underbrace{A^{-1}.A}_{I}\Leftrightarrow \boxed{A^{-1}A=I}.$$

EXERCÍCIOS 14.6

1) Calcule, caso exista, a inversa das matrizes seguintes.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2) Para que valores reais de x existe a inversa das seguintes matrizes:

a) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ x & 0 & 3 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$

3) (U.F. VIÇOSA – MG) Sejam as matrizes: A = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ e M = $\begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & y \end{vmatrix}$. Onde x e y são números reais e M é a matriz inversa de A. Então o produto xy é:

a) 3/2
b) 2/3
c) 1/2
d) 3/4
e) 1/4

4) (FUVEST) O determinante da inversa da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{vmatrix}$ é:

a) - 52/5
b) - 48/5
c) - 5/48
d) 5/52
e) 5/48

5) (MACKENZIE) Considere as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se $a \in \mathbb{R}$,

então a matriz A.B:

a) é invertível somente se $a = 0$.

b) é invertível somente se $a = 1$.

c) é invertível somente se $a = 2$.

d) é invertível qualquer que seja a.

e) nunca é invertível, qualquer que seja a.

6) Uma matriz 4x4 que admite inversa é:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

7) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, calcule uma matriz X, tal que:

a) $2X - A = B$

b) $X.A = B$

c) $B^{-1}.X.B.A^{-1} = B^{-1}$

8) Sendo A e B, matrizes quadradas de ordem n, marque a opção **incorreta**.

a) $B^{-1}A^{-1} = (A.B)^{-1}$

b) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

c) $(A.B)^t = B^tA^t$

d) $B^{-1}A^{-1} = (B.A)^{-1}$

e) $[(B^{-1})^t]^{-1} = [(B^{-1})^{-1}]^t$

9) Quanto a matriz A de ordem n e sua inversa A^{-1} é **incorreto** afirmar que:

a) $AA^{-1} = A^{-1}.A$

b) Se $detA = 0$, então não existe A^{-1}

c) A matriz A^{-1} é única

d) $detA.detA^{-1} = 1$

e) Se existe A, então existe A^{-1}

14.2. Sistemas lineares

Um sistema linear é um sistema formado por equações lineares, ou seja, equações da forma: $a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \cdots + a_{1n}.x_n = b_n$. De uma maneira geral, representa-se um sistema de m equações e n incógnitas, da seguinte forma

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \ldots + a_{2n}.x_n = b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{m1}.x_1 + a_{m2}.x_2 + a_{m3}.x_3 + \ldots + a_{mn}.x_n = b_n \end{cases}.$$

Onde os termos da forma a_{mn} são denominados de **coeficientes**, os termos x_n de **incógnitas** e os termos b_n de **termos independentes**.

Exemplos:

- $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ (possui duas equações e duas incógnitas)

  Coeficientes: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$, incógnitas: $\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ e termos independentes: $\begin{vmatrix} 4 \\ 5 \end{vmatrix}$

- $\begin{cases} -x + 2y - 3z = -5 \\ -7x + 8y - z = -1 \\ 3x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$ (possui três equações e três incógnitas)

  Coeficientes: $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -7 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$, incógnitas: $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ e termos independentes: $\begin{vmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$

Exemplos de sistemas **não** lineares:

- $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ (motivo: possui incógnita elevada ao quadrado)
- $\begin{cases} -x + 2y - 3z = -5 \\ -7x + 8xy - z = -1 \\ 3x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$ (motivo: o termo xy não existe em sistema linear)

Conforme já visto em determinantes de matrizes, um sistema linear pode ser expresso em forma de equação matricial pela qual é equivalente:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}}_{\text{Matriz A}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots \\ x_n \end{vmatrix}}_{\text{Matriz X}} = \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots \\ b_n \end{vmatrix}}_{\text{B}} \Rightarrow A.X = B.$$

Onde A é a matriz dos coeficientes, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 5x - y + 2z = 2 \end{cases}$ possui a forma matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Veja que multiplicando as matrizes, obtemos: $\begin{bmatrix} 1.x + 2.y - 3.z \\ 5.x - 1y + 2.z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, o que é equivalente ao sistema linear inicial: $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 5x - y + 2z = 2 \end{cases}$.

14.2.1. Solução de um sistema linear

A solução de um sistema linear é dada pelos valores das incógnitas pelas quais satisfazem cada uma das equações (sem exceção) do sistema.

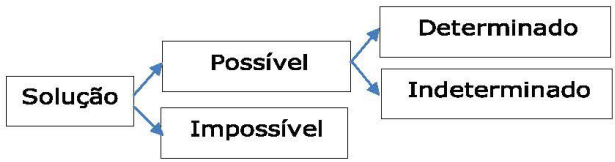
Exemplos:

- $\begin{cases} x+2y=0 \\ 4x+y=7 \end{cases}$, o par $(\underbrace{2}_{x},\underbrace{-1}_{y})$ é solução do sistema, pois: $\begin{cases} 2+2.(-1)=0 \\ 4.2+(-1)=7 \end{cases}$.
- $\begin{cases} x+5y-3z=-10 \\ 7x-8y+z=-5 \\ 3x+y-z=-8 \end{cases}$, o terno $(\underbrace{-2}_{x},\underbrace{-1}_{y},\underbrace{1}_{y})$ é solução do sistema, pois:

$$\begin{cases} (-2)+5.(-1)-3.1=-10 \\ 7.(-2)-8.(-1)+1=-5 \\ 3.(-2)+(-1)-1=-8 \end{cases}$$

Conforme um sistema linear apresenta ou não uma solução, ele é classificado em:

- **Possível e determinado:** Quando possui uma única solução;
- **Possível e indeterminado:** Quando possui infinitas soluções;
- **Impossível:** Quando não possui solução.



Veremos dois métodos de resolução de sistemas lineares com m equações e n incógnitas: a regra de Cramer e o escalonamento.

A regra de Cramer[6]: Esse método consiste em obter as soluções do sistema dividindo os determinantes das matrizes conforme a seguir.

Acompanhe o caso de um sistema linear com duas equações: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$.

Temos: $A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $A_x=\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$, $A_y=\begin{vmatrix} a & e \\ b & f \end{vmatrix}$, $x=\frac{D_x}{D_A}$ e $y=\frac{D_y}{D_A}$.

Onde:

- D_A é o determinante da matriz dos coeficientes;

- D_x é o determinante da matriz A_x construída substituindo a coluna x pela coluna dos termos independentes;

- D_y é o determinante da matriz A_y construída substituindo a coluna y pela coluna dos termos independentes.

Exemplo: Resolver o sistema linear $\begin{cases} x-2y=-3 \\ x+y=3 \end{cases}$.

[6] Gabriel Cramer (1704-1752).

Solução:

$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $A_x = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ e $A_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$.

$D_A = 1 - (-2) = 3.$

$D_x = -3 - (-6) = 3.$

$D_y = 3 - (-3) = 6.$

$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{3}{3} \Rightarrow \boxed{x = 1}$ e $y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{y = 2} \Rightarrow \boxed{S = (1,2)}$.

Substitua os valores de x e y nas equações do sistema e veja que de fato são soluções.

Para um sistema linear com três equações, temos mais uma incógnita z. D_z será o determinante da matriz A_z, construída substituindo a coluna de z pela coluna dos termos independentes. O valor da incógnita é dado por $z = \frac{D_z}{D_A}$.

Exemplo: Resolver o sistema linear $\begin{cases} 2x - y - 3z = -8 \\ 5x + 2y + z = 10 \\ -3x + 10y - 2z = 1 \end{cases}$.

Solução:

$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ -3 & 10 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 10 & -2 & -3 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow D_A = -155 - 48 = -203.$

-18 -20 -10 = -48

-8 3 -150 = -155

$A_x = \begin{vmatrix} -8 & -1 & -3 \\ 10 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = \begin{vmatrix} -8 & -1 & -3 & -8 & -1 \\ 10 & 2 & 1 & 10 & 2 \\ 1 & 10 & -2 & 1 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow D_x = = -269 + 66 = -203$

6 80 -20 = 66

32 -1 -300 = -269

$A_y = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -3 \\ 5 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = \begin{vmatrix} 2 & -8 & -3 & 2 & -8 \\ 5 & 10 & 1 & 5 & 10 \\ -3 & 1 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_y = -41 - 172 = -203$

-90 -2 -80 = -172

-40 24 -15 = -41

$A_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 \\ 5 & 2 & 10 \\ -3 & 10 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -8 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 10 & 5 & 2 \\ -3 & 10 & 1 & -3 & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow D_z = -366 - 243 = -609$

-48 -200 5 = -243

4 30 -400 = -366

$x = \frac{D_x}{D_A} = \frac{-203}{-203} = 1.$

$y = \frac{D_y}{D_A} = \frac{-203}{-203} = 1.$

$z = \frac{D_z}{D_A} = \frac{-609}{-203} = 3.$

$\boxed{S = (1,1,3).}$

Substitua os valores de x, y e z em todas as equações do sistema e veja que realmente são soluções.

As soluções de um sistema linear utilizando a regra de Cramer, deixam claro dois inconvenientes:

– O sistema possuirá solução se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes D_A for diferente de zero. Portanto, aplica-se somente para os casos com solução determinada.

– O processo de solução é trabalhoso, pois é preciso calcular o determinante de no mínimo três matrizes, para sistemas com duas equações ou de quatro matrizes para sistemas com três equações, se agravando para sistemas com mais equações.

O método a seguir é bem mais eficaz.

Resolução de sistemas lineares usando escalonamento: Também conhecido como eliminação gaussiana, em homenagem a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), o método do escalonamento consiste em encontrar sistemas lineares equivalentes que possui a mesma solução.

Um sistema é dito **escalonado** quando:

1) As incógnitas de todas as equações estiverem em uma mesma ordem;

2) Os coeficientes nulos ficam sempre à esquerda do primeiro coeficiente não nulo;

3) O número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação.

Exemplo de sistemas escalonados:

- $\begin{cases} x+2y=4 \\ 0x-7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=4 \\ -7y=-7 \end{cases}$
- $\begin{cases} x+y-3z=-6 \\ 0.x+2y+z=5 \\ 0.x+0.y-2z=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z=-6 \\ 2y+z=5 \\ -2z=-6 \end{cases}$

Todas as três condições estão satisfeitas.

Exemplo de sistemas **não** escalonados:

- $\begin{cases} 4x-2y=0 \\ x-y=2 \end{cases}$ Motivo: não há coeficientes nulos.
- $\begin{cases} 10x+2y-11z=33 \\ 2y+z=5 \\ 2y-8z=-4 \end{cases}$ Motivo: os coeficientes nulos não aumentam de equação para equação.

Para se chegar a um sistema equivalente e escalonado, é preciso efetuar operações com as equações ou entres elas, convenientemente, visando atender as três condições de um sistema escalonado. Essas operações consiste em:

- Permutar as equações;
- Multiplicar qualquer equação por um número k $(k \neq 0)$;
- Multiplicar qualquer equação por um número k $(k \neq 0)$ e somar a equação resultante com outra equação.

1º exemplo: Escalone o sistema linear $\begin{cases} y-x=4 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$.

Solução:

1) Colocando as incógnitas na mesma ordem em cada equação:

$$\begin{cases} -x+y=4 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

2) Como os coeficientes nulos devem ficar à esquerda e aumentar de equação para equação, devemos produzir um coeficiente nulo em $2x$ na 2ª equação. Para isso, vamos multiplicar a 1ª equação por 2 e somar o resultado com a 2ª equação:

$$\begin{cases} -x+y=4 \\ 2x-3y=-4 \end{cases} \begin{matrix} \Leftarrow \text{x (2)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix}$$

$$\begin{cases} -x+y=4 \\ 0.x-1.y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y=4 \\ -y=4 \end{cases}$$

Escalonado.

2º exemplo: Escalone o sistema linear: $\begin{cases} y+z=-1 \\ -x-z+4y=5 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$.

Solução:

1) Colocando as incógnitas na mesma ordem em cada equação:

$$\begin{cases} y+z=-1 \\ -x+4y-z=5 \\ x+y-2z=6 \end{cases}$$

2) Como o número de coeficientes nulos deve aumentar de equação para equação, vamos permutar a 1ª equação com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ -x+4y-z=5 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

3) Pelo mesmo motivo, vamos produzir um coeficiente nulo no lugar de $-x$ na 2ª equação. Para isso, iremos multiplicar a 1ª equação por 1 e somar com a 2ª equação:

$$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ -x+4y-z=5 \\ y+z=-1 \end{cases} \begin{matrix} \Leftarrow \text{x (1)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 0.x+5y-3z=11 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=6 \\ 5y-3z=11 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

4) Agora, devemos ter um coeficiente nulo no lugar de y na 3ª equação. Para isso, vamos multiplicar a 2ª equação por -1/5 e somar o resultado com a 3ª equação:

$$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 5y-3z=11 \\ y+z=-1 \end{cases} \begin{matrix} \Leftarrow \text{x (-1/5)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=6 \\ 5y-3z=11 \\ 0y+\frac{8}{5}z=-\frac{16}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-2z=6 \\ 5y-3z=11 \\ \frac{8}{5}z=-\frac{16}{5} \end{cases}$$

Escalonado.

Uma vez escalonado o sistema linear, devemos analisá-lo e classificá-lo em sistema **possível e determinado**, **possível e indeterminado** ou **impossível**.

Analisando os dois exemplos anteriores, podemos notar que são sistemas possíveis e determinados, pois é imediatamente possível encontrar o valor de uma incógnita na última equação e substituí-la nas demais equações, uma a uma, descobrindo em cada uma delas, as outras incógnitas restantes. Veja:

1º exemplo (já escalonado anteriormente):

$$\begin{cases} -x+y=4 \\ -1.y=4 \Rightarrow \boxed{y=-4} \end{cases}.$$

Substituindo $y=-4$ na 1ª equação, obtemos

$$-x+y=4 \Rightarrow -x-4=4 \Rightarrow -x=8 \Rightarrow \boxed{x=-8} \Rightarrow \boxed{S=(-8,-4)}.$$

2º exemplo(já escalonado anteriormente):

$$\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 5y-3z=11 \\ \frac{8}{5}z=-\frac{16}{5} \Rightarrow \boxed{z=-2} \end{cases}.$$

Substituindo $z=-2$ na 2ª equação, temos

$$5y-3z=11 \Rightarrow 5y-3(-2)=11 \Rightarrow 5y+6=11 \Rightarrow 5y=11-6 \Rightarrow \boxed{y=1}.$$

Substituindo $z=-2$ e $y=1$ na 1ª equação, encontramos

$$x+y-2z=6 \Rightarrow x+1-2.(-2)=6 \Rightarrow x+1+4=6 \Rightarrow x=6-5 \Rightarrow \boxed{x=1}.$$

$$\boxed{S=(1,1,-2)}.$$

Entretanto, nem sempre um sistema linear é possível e determinado. Eventualmente, pode ocorrer de alguma equação do sistema acusar $0=0$ após o escalonamento. Nesse caso, o sistema será possível e indeterminado.

Exemplo: Verifique se o sistema linear $\begin{cases} 3x-6y=7 \\ -x+2y=-\frac{7}{3} \end{cases}$ é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

Solução:

1) Como o número de coeficientes nulos precisa aumentar de equação para equação, devemos ter um coeficiente nulo no lugar do coeficiente de $-x$ na 2ª equação. Para isso, vamos multiplicar a 1ª equação por 1/3 e somar o resultado com a 2ª equação.

$$\begin{cases} 3x-6y=7 \\ -x+2y=-\frac{7}{3} \end{cases} \overset{x(1/3)}{\underset{+}{\hookleftarrow}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6y=7 \\ 0+0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6y=7 \\ 0=0 \end{cases}$$

A equação $0=0$ denota que, seja qual for os valores de x e y que satisfaçam uma das equações, a outra equação estará automaticamente satisfeita, portanto, é um **sistema possível e indeterminado.**

O termo "indeterminado" tem significado de soluções infinitas, pois nesse caso, podemos atribuir um parâmetro t para a incógnita x na 1ª equação e obtermos:

$$3x-6y=7 \Rightarrow 3.t-6y=7 \Rightarrow 6y=3t-7 \Rightarrow y=\frac{3t-7}{6}.$$

Assim, as soluções infinitas são do tipo: $S=\left(t,\frac{3t-7}{6}\right)$.

Veja algumas soluções para:

$$t=0 \Rightarrow \left(0,-\frac{7}{6}\right), t=1 \Rightarrow \left(1,-\frac{2}{3}\right), t=-5 \Rightarrow \left(-5,-\frac{11}{3}\right),\ldots$$

O último caso ocorre quando alguma equação do sistema acusa algum absurdo após o escalonamento. Nesse caso, o sistema será impossível.

Exemplo: Classifique o sistema linear $\begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ 4x + 2y - 5z = -2 \\ 2x + y - 9z = 2 \end{cases}$.

Solução:

1) Devemos ter um coeficiente nulo no lugar de $4x$ na 2ª equação. Para isso, vamos multiplicar a 1ª equação por 2 e somar o resultado com a 2ª equação:

$$\begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ 4x + 2y - 5z = -2 \\ 2x + y - 9z = 2 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{x (2)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ -3z = 0 \\ 2x + y - 9z = 2 \end{cases}$$

2) Agora, vamos multiplicar a 1ª equação por 1 e somar com a 3ª equação, para eliminar o coeficiente de $2x$. Da seguinte forma:

$$\begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ -3z = 0 \\ 2x + y - 9z = 2 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{x (1)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ -3z = 0 \\ 0x + 0y - 8z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ -3z = 0 \\ -8z = 3 \end{cases}$$

3) O sistema ainda não está escalonado, pois o número de coeficientes nulos não aumenta da 2ª para a 3ª equação. Assim, precisamos multiplicar a 2ª equação por -8/3 e somar o resultado com a 3ª equação:

$$\begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ -3z = 0 \\ -8z = 3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{x (-8/3)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 1 \\ -3z = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

A última equação $0 = 3$ é um absurdo. Dessa forma, o **sistema é impossível.**

Todos os casos prováveis quanto a classificação de um sistema linear, que vimos nos exemplos anteriores, estão formalizados no teorema do posto a seguir, apresentado após a definição de posto.

Definição 14.2.1.1 (Posto): Seja uma matriz A de ordem mxn. Denominamos de posto P_A da matriz A, o número de linhas não nulas dessa matriz escalonada. E sendo $AX = B$ um sistema linear, denominamos de posto P_S do sistema, o número de equações não-nulas desse sistema escalonado.

Exemplo: $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 6 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{x (-1)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -2 \\ 0 + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_A = 2 \; e \; P_S = 2}$.

2º exemplo: $\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{x (-2)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_A = 1 \; e \; P_S = 1}$.

3º exemplo: $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 9 \\ 2x - 4y + 6z = 4 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{x (-2)} \\ \hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 9 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \\ \text{x (-3)} \\ \hookleftarrow + \end{matrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 0 + 4y - 5z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 4y - 5z = 3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_A = 2 \; e \; P_S = 2}.$$

4º exemplo: $\begin{cases} x+y+3z=1 \\ x-y+z=2 \\ 3x+3y+9z=0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \Leftarrow \text{x (-3)} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=1 \\ x-y+z=2 \\ 0=-3 \end{cases} \begin{matrix} \Leftarrow \text{x (-1)} \\ + \\ \\ \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z=1 \\ -2y-2z=1 \\ 0=-3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_A = 2 \; e \; P_S = 3}.$$

Teorema 14.2.1.1 (Teorema do posto): Consideremos um sistema de equações lineares $AX = B$ de m equações e n incógnitas. Sejam P_A o posto da matriz A (matriz dos coeficientes) e P_S o posto do sistema, então:

(1) O sistema é impossível se, e somente se, $P_A < P_S$.

(2) O sistema é possível se, e somente se, $P_A = P_S$.

(3) O sistema é possível e determinado se $P_A = P_S = n$.

(4) O sistema é possível e indeterminado se $P_A = P_S < n$. Onde, $n - P_S$ é o número de incógnitas livres (incógnitas que podem assumir qualquer valor real).

Demonstração: Inicialmente vamos nos concentrar em um sistema linear **escalonado** que resulta em possível e determinado, conforme a seguir.

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 + \ldots + a_{1n}.x_n = b_1 \leftarrow X^{a} \; equação. \\ a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \ldots + a_{2n}.x_n = b_2 \leftarrow (X-1)^{a} \; equação. \\ \vdots \\ a_{(m-2)(n-2)}.x_{n-2} + a_{(m-2)(n-1)}.x_{n-1} + a_{(m-2)n}.x_n = b_{m-2} \leftarrow 3^{a} \; equação \\ a_{(m-1)(n-1)}.x_{n-1} + a_{(m-1)n}.x_n = b_{m-1} \leftarrow 2^{a} \; equação \\ a_{mn}.x_n = b_m \leftarrow 1^{a} \; equação. \end{cases}$$

Uma vez escalonado, para ser **possível e determinado** é necessário (e também suficiente) que a 1ª equação (de baixo para cima) tenha exatamente uma incógnita, que a 2ª equação tenha duas incógnitas, que a 3ª equação tenha três incógnitas, ou seja, que a X^{a} equação tenha X incógnitas (basta pensar na solução utilizando substituições sucessivas e encadeadas no sistema escalonado). Em outras palavras, o número de incógnitas precisa ser igual ao número de equações, isto é, $\boldsymbol{P_A = P_S = n}$.

Caso $\boldsymbol{P_A < P_S}$: Nesse caso, incorre mais linhas nulas na matriz dos coeficientes A do que equações nulas no sistema escalonado. Em outros termos, ocorre um absurdo em alguma linha do sistema escalonado, como $\underbrace{0}_{nulo} = \underbrace{1}_{não\,nulo}$, por exemplo, o que implica em **sistema impossível** (e vice-versa).

Caso $\boldsymbol{P_A = P_S < n}$: Nesse caso, há mais incógnitas que equações no sistema escalonado. Nesse cenário, suponha que a X^{a} equação tenha $X + q$ incógnitas (q incógnitas livres). Como $X + q = n$ e, nesse caso, $X = P_S$, temos

$$P_S + q = n \Rightarrow \boxed{q = n - P_S}.$$

Exemplo: Classifique o sistema $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x-y-z-w=-1 \\ x-y-2z-3w=-2 \\ x+2y-z-3w=1. \end{cases}$

Solução: $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x-y-z-w=-1 \\ x-y-2z-3w=-2 \\ x+2y-z-3w=1. \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(-1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x-y-z-w=-1 \\ x-y-2z-3w=-2 \\ y-2z-4w=0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(-1) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x-y-z-w=-1 \\ -2y-3z-4w=-3 \\ y-2z-4w=0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(-1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ -2y-2z-2w=-2 \\ -2y-3z-4w=-3 \\ y-2z-4w=0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(1/2) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ -2y-2z-2w=-2 \\ -2y-3z-4w=-3 \\ -3z-5w=-1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(-1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ -2y-2z-2w=-2 \\ -z-2w=-1 \\ -3z-5w=-1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(-3) $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ -2y-2z-2w=-2 \\ -z-2w=-1 \\ \boxed{w=2} \end{cases}$. Como $P_A = P_S = 4$, o **sistema é possível e determinado.**

Substituindo $w=2$ na 3ª equação: $-z-2w=-1 \Rightarrow z=1-2.2 \Rightarrow \boxed{z=-3}$.

Substituindo $w=2$ e $z=-3$ na 2ª equação

$-2y-2z-2w=-2 \Rightarrow -2y-2.(-3)-2.2=-2 \Rightarrow -2y=-2 \Rightarrow \boxed{y=2}$.

Substituindo $w=2, z=-3$ e $y=2$ na 1ª equação

$x+y+z+w=1 \Rightarrow x+2-3+2=1 \Rightarrow \boxed{x=0}$.

Solução: $\boxed{S=(0,2,-3,2)}$.

2º exemplo: Vamos resolver o sistema $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x+2y-3z+w=0 \end{cases}$.

Solução: $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ x+2y-3z+w=0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ x(-1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ y-4z=-1 \end{cases}$

Note que $P_A = P_S = 2 < n$. Portanto, o **sistema é possível e indeterminado.**

Fazendo $z=t \Rightarrow \boxed{y=-1+4t}$.

Substituindo na 1ª equação e fazendo $w=s$, temos

$x+y+z+w=1 \Rightarrow x-1+4t+t+s=1 \Rightarrow \boxed{x=2-5t-s}$.

As soluções são da forma: $\boxed{S=(2-5t-s,-1+4t,t,s)}$.

Na subseção seguinte, será apresentada também uma justificativa geométrica para os sistemas lineares de duas e três incógnitas, quando esse é possível (determinado ou indeterminado) ou impossível.

EXERCÍCIOS 14.7

1) Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas lineares.

a) $\begin{cases} 10x + 2y = 20 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 8 \\ -x - 3y + 2z = 3 \\ 2x + y - z = -4 \end{cases}$

2) Resolva os seguintes sistemas lineares usando o escalonamento e classifique-os.

a) $\begin{cases} x + 11y = 1 \\ -2x - 4y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -4x + 6y = -10 \\ 2x - y = 15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 12x + 4y = 18 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x - y - 2z = -4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x + y + 2z = 3 \\ 4x - y + 2z = 1 \\ 4x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 3y + 4z = -19 \\ -2x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 12 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x - y - 2z = -4 \\ -x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 5x - 5y - 15z = 15 \\ x - y - 3z = 3 \\ x + 3y - z = -1 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x - 2y - 5z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 5x - 7y - 13z = 0 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x + y + z + w = 4 \\ 2x - y - z - w = -1 \\ 3x - y - 2z - 3w = -3 \\ 5x + 2y - 4z - 3w = 0 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 5 \\ -x + y - 3z + 2w = 0 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x + y - 3z + w = -1 \\ -4x - 2y + 6z - 2w = 0 \end{cases}$

3) (FGV-SP) O sistema de equações $\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$ é equivalente a:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \end{pmatrix}$

4) (FGV-SP) Seja (a, b, c) a solução do sistema linear $\begin{cases} x + y - z = -5 \\ 2x + y + z = -1 \\ 4x + 2y - z = -11 \end{cases}$. Então, teremos:

a) $a = 1$ b) $b = 3$ c) $c = 2$ d) $a.b.c = 0$

5) (FEI-SP) Os valores de a e b para que o sistema $\begin{cases} 5x + ay = 3 \\ bx + 8y = 6 \end{cases}$ seja

indeterminado são:

a) 5 e 10 b) 4 e 10 c) 6 e 10 d) 7 e 11 e) 10 e 11

6) (ITA-SP) O sistema linear $\begin{cases} bx + y = 1 \\ bx + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$ não admite solução se, e somente se, o número real b for igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) -2

7) Um sistema linear é classificado como possível e determinado, quando:

a) a quantidade de incógnitas é maior que a quantidade de equações;

b) a quantidade de equações é maior que a quantidade de incógnitas;

c) a quantidade de incógnitas, o posto da matriz dos coeficientes e o posto do sistema são iguais.

d) a quantidade de equações é igual a quantidade de incógnitas e o posto da matriz dos coeficientes é não nulo.

e) o sistema é homogêneo.

8) (UFC-CE) Se um comerciante misturar 2 kg de café em pó do tipo I com3 kg de café em pó do tipo II, ele obtém um tipo de café cujo preço é R$ 4,80 o quilograma. Mas, se misturar 3 kg de café em pó do tipo I com2 kg de café do tipo II, a nova mistura custará R$ 5,20 o quilograma. Os preços do quilograma do café do tipo I e do quilograma do café do tipo II são, respectivamente

a) R$5,00 e R$ 3,00
b) R$6,40 e R$ 4,30
c) R$5,50 e R$ 4,00
d) R$5,30 e R$ 4,50
e) R$6,00 e R$ 4,00

9) (UFG – GO) - Um caminhão transportou, em duas viagens, 50 toneladas de soja. Sabendo que, na primeira viagem, o caminhão, carregado, pesou 45 toneladas e que, na segunda, o caminhão e a carga pesaram 35 toneladas, calcule a quantidade de soja transportada na primeira viagem e o peso do caminhão vazio.

10) Uma empresa vende adubos em sacos de 50 kg conforme o percentual de nutrientes que está na tabela a seguir.

	Nutriente A	Nutriente B	Preço (R$)
Adubo 1	10%	20%	50,00
Adubo 2	40%	30%	80,00
Adubo 3	30%	20%	?

Se somente os nutrientes influenciam no preço do adubo, qual deve ser o preço do adubo 3?

14.2.2. Interpretação geométrica de sistemas lineares

Nesta subseção, abordaremos a intepretação geométrica de sistemas lineares de duas e três incógnitas, associada ao tipo de solução desses sistemas: possível determinado, possível e indeterminado e impossível.

Solução para um sistema linear com duas incógnitas: $\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$.

Cada equação $\begin{cases} ax+by=e \Rightarrow r_1 \\ cx+dy=f \Rightarrow r_2 \end{cases}$ representa uma reta r_1 e r_2 no plano cartesiano e a representação geométrica da solução, em cada um dos casos possíveis, está nas figuras 14.2.2.1, 14.2.2.2 e 14.2.2.3.

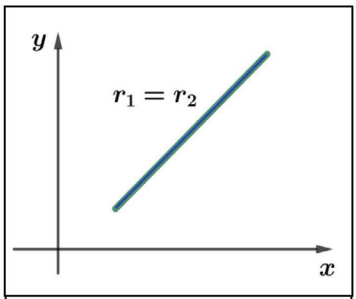


Figura 14.2.2.1

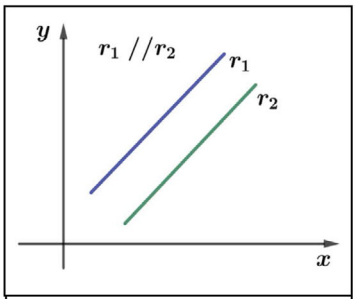


Figura 14.2.2.2

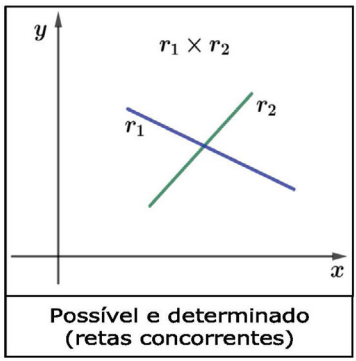


Figura 14.2.2.3

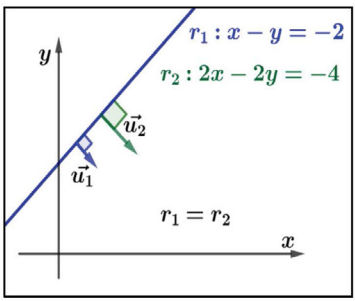


Figura 14.2.2.4

1º exemplo: $\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-2y=-4 \end{cases}$

Solução: Escalonando o sistema, temos

$$\begin{cases} x-y=-2 \\ 2x-2y=-4 \end{cases} \begin{matrix} \Leftarrow \\ \text{x(-2)} \\ + \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=4 \\ 0+0=0 \Rightarrow\ 0=0 \end{cases}.$$

O **sistema é possível e indeterminado** e sua solução é uma reta, pois a expressão $0 = 0$ denota que as retas do sistema são coincidentes.

Esse caso foi anunciado genericamente na figura 14.2.2.1 como retas coincidentes, corroborado pelo gráfico real das duas retas do sistema na figura 14.2.2.4. Veja nessa mesma figura, que além das retas serem coincidentes, os seus respectivos vetores normais: $\overrightarrow{u_1} = (1,-1)$ e $\overrightarrow{u_2} = (2,-2)$ são paralelos.

2º exemplo: $\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

Solução: Escalonando o sistema, encontramos

$$\begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \xleftarrow{\text{x (-1/2)}} \xleftarrow{+} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -1 \\ 0 + 0 = 5/2 \Rightarrow 0 = 5/2 \end{cases} \Longleftarrow \text{Absurdo!}$$

O **sistema é impossível** e não há ponto em comum entre as retas do sistema. Esse é o caso de retas paralelas generalizadas na figura 14.2.2.2.

A figura 14.2.2.5 mostra o gráfico das duas retas e os seus respectivos vetores normais: $\overrightarrow{u_1} = (2,-4)$ e $\overrightarrow{u_2} = (1,-2)$. Observe que as retas são paralelas e os vetores normais também.

3º exemplo: $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Solução: O sistema escalonado nos dá

$$\begin{cases} x - 2y = -3 \\ x + y = 3 \end{cases} \xleftarrow{\text{x (-1)}} \xleftarrow{+} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 0 + 3y = 6 \Rightarrow \boxed{y = 2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 1}.$$

O **sistema é possível e determinado** e sua solução é geometricamente o ponto (1,2).

Esse é o caso da figura 14.2.2.3 em que as retas são concorrentes. A verificação desse fato está no gráfico dessas retas na figura 14.2.2.6, em que o ponto em comum é (1, 2) e que os vetores normais não são múltiplos.

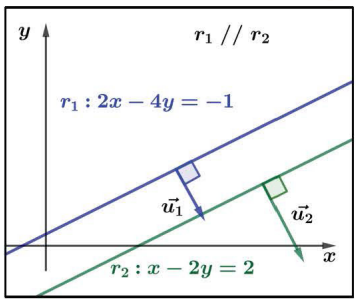


Figura 14.2.2.5

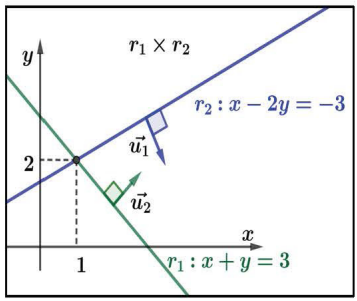


Figura 14.2.2.6

Diante dos três casos, o sistema $\begin{cases} ax + by = e \Rightarrow r_1 \\ cx + dy = f \Rightarrow r_2 \end{cases}$ só será possível e determinado (uma única solução), quando os vetores normais às retas $\overrightarrow{u_1} = (a,b)$ e $\overrightarrow{u_2} = (c,d)$ não forem paralelos (não múltiplos). Isto é, quando o determinante da matriz $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ for diferente de zero (lembre-se que quando as linhas são proporcionais, o determinante da matriz é nulo).

Solução para um sistema linear com três incógnitas: Cada equação do sistema representa um plano α_1, α_2 e α_3 no espaço tridimensional[7].

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & \Leftarrow \alpha_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & \Leftarrow \alpha_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & \Leftarrow \alpha_3 \end{cases}$$

Cada um dos casos possíveis está a seguir.

➢ Se o sistema for **possível**:

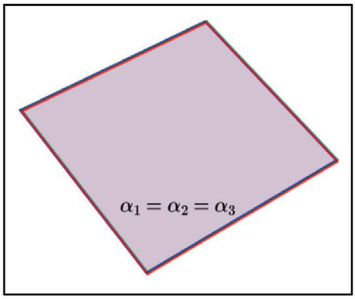


Figura 14.2.2.7

⇔ Os três planos são coincidentes: o sistema linear é possível e indeterminado, ou seja, há infinitas soluções.

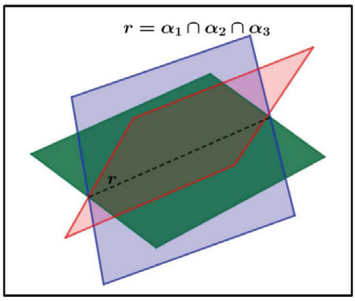


Figura 14.2.2.8

⇔ Os três planos possui uma reta de interseção: o sistema linear é possível e indeterminado, isto é, há infinitas soluções.

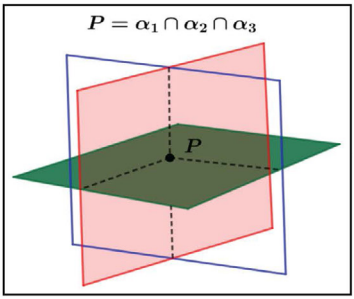
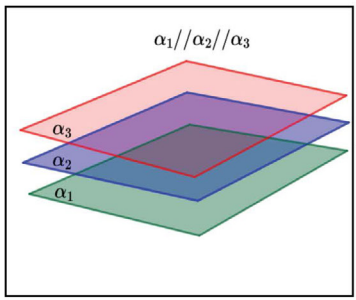


Figura 14.2.2.9

⇔ Os três planos possui um ponto de interseção: o sistema linear é possível e determinado. Por isso, há uma única solução.

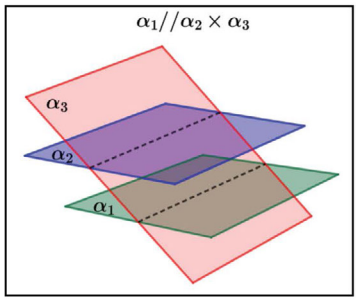
[7] A representação de planos no espaço tridimensional será estudada em detalhes no volume 4 dessa coleção. A abordagem dessa representação, sem o estudo prévio, tem o intuito apenas de dar sentido às soluções encontradas (ou não encontradas).

➢ Se o sistema for **impossível:**



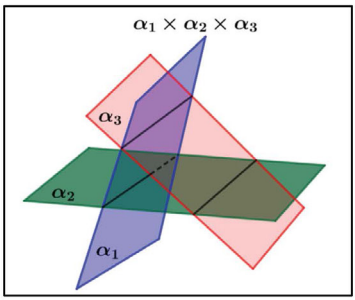
⇔ Os três planos são paralelos: o sistema linear é impossível, por conseguinte, não existe solução.

Figura 14.2.2.10



⇔ Dois planos apenas são paralelos: o sistema linear é impossível, ou seja, não existe solução.

Figura 14.2.2.11



⇔ Os três planos são concorrentes, mas não possui ponto em comum: o sistema linear é impossível. Dessa forma, não existe solução.

Figura 14.2.2.12

1º exemplo: $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \\ 3x + 6y - 9z = -3 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \\ 3x + 6y - 9z = -3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \text{x (-3)} \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 2x + 4y - 6z = -2 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \\ \text{x (-2)} \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O **sistema é possível e indeterminado** e a solução é um plano.

Esse exemplo está representado no caso da figura 14.2.2.7 em que os três planos são coincidentes (veja que duas equações foram eliminadas).

Analisando a matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{vmatrix}$ desse exemplo, vemos que o determinante é nulo, pois as demais colunas são proporcionais a primeira.

2º exemplo: $\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ -2x - 2y + 4z = 1 \\ 4x + 4y - 8z = 2 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ -2x - 2y + 4z = 1 \\ 4x + 4y - 8z = 2 \end{cases} \Leftarrow \text{x 4} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ -2x - 2y + 4z = 1 \\ 0 + 0 + 0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + 2z = -1 \\ -2x - 2y + 4z = 1 \\ 0 = -2 \end{cases} \Leftarrow \text{Absurdo!}$$

O **sistema é impossível**. Esse caso está representado na figura 14.2.2.10 em que os três planos são paralelos.

Analisando a matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{vmatrix}$, é possível perceber que o determinante é nulo, pois há linhas proporcionais.

A diferença entre o 1º exemplo e o 2º exemplo, está na proporcionalidade que ocorre também entre os termos independentes. No 1º exemplo, os termos independentes acompanham a proporção dos demais coeficientes, e por esse motivo, os planos são coincidentes. O mesmo não acontece no 2º exemplo, resultando em planos paralelos.

3º exemplo: $\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 9 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 9 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \end{cases} \Leftarrow \text{x (-2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y + 4z = 9 \\ 0 = -4 \end{cases} \Longleftarrow \text{Absurdo!}$$

O sistema é impossível. Esse exemplo está representado no caso da figura 14.2.2.11 em que apenas dois planos são paralelos.

O determinante da matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}$ desse exemplo é nulo, pois a 1ª e a 3ª linha são proporcionais.

4º exemplo: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = 3 \\ 3x - 3y + 3z = 8 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+z=3 \\ 3x-3y+3z=8 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{x(-3)} \\ \\ \hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x-2y+z=3 \\ -6y=2 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{x(-1)} \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ -3y=1 \\ -6y=2 \end{cases} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{x(-2)} \\ \hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ -3y=1 \\ 0=0 \end{cases}$$

O **sistema é possível e indeterminado** e neste caso a solução é uma reta, conforme a representação da figura 14.2.2.8. Para calcular algumas soluções (ou a equação dessa reta), vamos substituir a incógnita $y=-\frac{1}{3}$ e fazer $z=t$ na primeira equação,

$$x-2.\left(-\frac{1}{3}\right)+3z=2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}+5t \Rightarrow \boxed{x=\frac{-2+15t}{3}}.$$

Logo, qualquer solução do sistema é da forma $s=(\frac{-2+15t}{3}, \frac{-1}{3}, t)$, para todo $z \in \mathbb{R}$.

A matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix}$ desse exemplo possui determinante nulo, pois há uma combinação linear entre as linhas. Veja que a 3ª linha é igual a 1ª mais o dobro da 2ª linha (propriedade 7 dos determinantes de matrizes).

5º exemplo: $\begin{cases} 2x-y-3z=-8 \\ 5x+2y+z=10 \\ -3x+10y-2z=1 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{cases} 2x-y-3z=-8 \\ 5x+2y+z=10 \\ -3x+10y-2z=1 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{x(-5)} \\ \leftarrow \text{x(2)} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x+5y+15z=40 \\ 10x+4y+2z=20 \\ -3x+10y-2z=1 \end{cases} \begin{matrix} \hookleftarrow + \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-3z=-8 \\ 9y+17z=60 \\ -3x+10y-2z=1 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow \text{x 3} \\ \\ \leftarrow \text{x 2} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3y-9z=-24 \\ 9y+17z=60 \\ -6x+20y-4z=2 \end{cases} \begin{matrix} \leftarrow + \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-3y-9z=-24 \\ 9y+17z=60 \\ 17y-13z=-22 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-3z=-8 \\ 9y+17z=60 \\ 17y-13z=-22 \end{cases} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{x 17} \\ \leftarrow \text{x(-9)} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-3z=-8 \\ 153y+289z=1020 \\ -153y+117z=198 \end{cases} \begin{matrix} \\ \leftarrow + \\ \hookleftarrow \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y-3z=-8 \\ 9y+17z=60 \\ 406z=1218 \end{cases}$$

Da terceira equação: $406z=1218 \Rightarrow z=\frac{1218}{406} \Rightarrow \boxed{z=3}$.

Substituindo na segunda equação: $9y+17z=60 \Rightarrow 9y+17.3=60 \Rightarrow$

$$9y+51=60 \Rightarrow y=\frac{60-51}{9} \Rightarrow \boxed{y=1}.$$

Substituindo na primeira equação: $2x-y-3z=-8 \Rightarrow 2x-1-3.3=-8 \Rightarrow$

$$2x-1-9=-8 \Rightarrow 2x-10=-8 \Rightarrow x=\frac{-8+10}{2} \Rightarrow \boxed{x=1}.$$

Conclusão: o **sistema é possível e determinado** e a solução é o ponto $(1, 1, 3)$.

Esse exemplo está representado no caso da figura 14.2.2.9 em que os planos possui um único ponto de interseção. Esse é o único caso em que o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo.

Vimos que o sistema linear de duas e de três incógnitas só possui única solução (possível e determinado), quando o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo. Isso se estende, obviamente, a sistemas lineares com qualquer quantidade de incógnitas, uma vez que essa é a própria definição de determinante de matrizes (ver subseção 14.1.6). De qualquer forma, essa informação está formalizada a seguir como teorema, para referências futuras.

Teorema 14.2.2.1: Um sistema de equações lineares $AX = B$, será possível e determinado se, e somente se, o determinante de A for não nulo.

Perceba que esse teorema converge com a regra de Cramer: $x = \frac{D_x}{D_A}$, $y = \frac{D_y}{D_A}$ e $z = \frac{D_z}{D_A}$, em que D_A precisa ser diferente de zero, para haver solução em um sistema linear.

Exemplo: Para que valor de a abaixo, o sistema é possível e determinado

$$\begin{cases} x + ay = -10 \\ 2x - 4y = -11 \end{cases} ?$$

Solução: Para que o sistema seja possível é determinado, é necessário que o determinante da matriz A (dos coeficientes) seja diferente de zero.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \Rightarrow detA = -4 - 2a \neq 0 \Rightarrow -2.a \neq 4 \Rightarrow a \neq \frac{4}{-2} \Rightarrow \boxed{a \neq -2}.$$

Agora, usando o escalonamento, encontramos

$$\begin{cases} x + ay = -10 \\ 2x - 4y = -11 \end{cases} \overset{\text{x -2}}{\Rightarrow} \begin{cases} x + ay = -10 \\ \underbrace{(-2a - 4)}_{\neq 0} y = -11 \end{cases} \Rightarrow -2.a \neq 4 \Rightarrow \boxed{a \neq -2}.$$

2º exemplo: Determine os valores de m e n, para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ -x + y + mz = n \end{cases}$ seja:

a) Indeterminado

b) Impossível

Solução: Em ambos os casos, o determinante da matriz deve ser nulo, sendo portanto, difícil de identificar cada caso. Optaremos então, pelo escalonamento.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ -x + y + mz = n \end{cases} \overset{\text{x (-1)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ -x + y + mz = n \end{cases} \overset{\text{x (1)}}{\Leftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ 2y + (m+1)z = n + 1 \end{cases} \overset{\text{x (-2)}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \\ (m+5)z = n - 1 \end{cases}$$

Escalonado.

a) Para ser indeterminado é preciso que a última equação seja da forma $0 = 0$. Assim, $m = -5$ e $n = 1$.

b) Para ser impossível é preciso que a última equação seja um absurdo, o que ocorre quando $m = -5$ e $n \neq 1$.

14.2.3. Solução de um sistema linear homogêneo

Um sistema é dito homogêneo quando os termos independentes são todos iguais a zero.

Exemplos:

- $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ dx + ey + fz = 0 \\ gx + hy + iz = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} ax + by + cz + dw = 0 \\ ex + fy + gz + hw = 0 \\ ix + jy + kz + lw = 0 \\ mx + ny + oz + pw = 0 \end{cases}$

Em um sistema homogêneo há sempre como uma das soluções, as incógnitas nulas: (0, 0, 0, 0, ..., 0), chamada de **solução trivial** ou **solução nula**, por isso, é sempre um **sistema possível**. Para verificação da solução desses sistema utilizamos o seguinte teorema.

Teorema 14.2.3.1: Consideremos o sistema linear $AX = 0$ de m equações e n incógnitas. Se $m = n$ e $detA \neq 0$, o sistema apresenta apenas a solução trivial. Caso $m = n$ e $detA = 0$, o sistema apresenta outras (infinitas) soluções além da trivial.

Esse teorema é um caso particular do teorema 14.2.2.1.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ x - y + 7z = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

Solução: A matriz dos coeficientes é $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$. Calculando o determinante, temos

$$detA = 5.(-1)^{1+3}.(-3+2) + 7.(-1)^{2+3}.(-3-4) = -5 + 49 = 44.$$

Como é diferente de zero, o sistema é possível e determinado. Assim, o sistema possui apenas a solução trivial.

Para sistemas lineares homogêneos com $m \neq n$ (número de equações diferentes do número de incógnitas) utilizamos o seguinte teorema.

Teorema 14.2.3.2 (Teorema do posto para sistemas homogêneos): Consideremos o sistema linear $AX = 0$ de m equações e n incógnitas. Sejam P_A o posto da matriz A (matriz dos coeficientes):

(1) Se $P_A = n$, então o sistema possui apenas a solução trivial.

(2) Se $P_A < n$, então o sistema apresenta outras (infinitas) soluções além da trivial.

Demonstração: Esse teorema é uma aplicação particular do teorema 14.2.1.1 (teorema do posto), sendo que neste caso, o sistema é sempre possível.

Para provar sua validade, usaremos a parte da demonstração desse teorema (14.2.1.1) para o caso $P_A = P_S = n$. Em sistemas lineares homogêneos, a última equação (de cima para baixo) é da forma: $a_{mn}.x_n = 0$, o que implica em sistema determinado e possível com única solução nula.

Se caso $P_A = P_S < n$ (ver demonstração do teorema 14.2.1.1), incorre em mais incógnitas que equações. Nesse caso, o sistema terá outras soluções, além da nula.

Exemplo: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases}$

Solução: $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases} \overset{\text{x (-2)}}{\Leftarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 0 + 11y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{y = 0}$ e $\boxed{x = 0}$.

O sistema é possível e determinado, e possui somente a solução nula (0, 0).

2º exemplo: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$

Solução: $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases} \overset{\text{x (-3)}}{\Leftarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 0 + 0 + 3z = 0 \end{cases} \overset{\text{x (-1)}}{\Leftarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 0 + 0 + z = 0 \\ 0 + 0 + 3z = 0 \end{cases}$

$z = 0 \Rightarrow \boxed{x = y}$.

O sistema é possível e indeterminado, pois possui outras soluções além da solução trivial, basta apenas que seja da forma $(x, x, 0)$. Exemplos: (1, 1, 0), (3, 3, 0), (-2, -2, 0), etc.

EXERCÍCIOS 14.8

1) Escalone os sistemas lineares e faça uma interpretação geométrica da solução.

a) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ -2x - 4y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 6x + 3y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -10x - 5y = 1 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ -x - y + z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ -x - 3y - z = -1 \\ 2x + 6y + 2z = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ -x - y - z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y - z = -4 \\ 3x + 6y + z = -1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = -1 \\ -2x + 3y - 5z = 3 \\ -x - 4y - z = 2 \end{cases}$

2) Determine para que valores de a, cada sistema linear a seguir, é possível e determinado, possível e indeterminado e impossível.

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - ay = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} ax + 2y = 1 \\ 2ax - ay = 2 \end{cases}$

3) Determine para que valores de m e n, cada sistema linear a seguir, é possível e determinado, possível e indeterminado e impossível.

a) $\begin{cases} -x-2y+mz=1 \\ x+2y-z=n \\ -x+y+mz=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+my+z+w=1 \\ x+ny-z+w=0 \end{cases}$

4) (UFPI) Os valores de a para que o sistema linear $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-ay+z=0 \\ ax-y-z=0 \end{cases}$ admita soluções diferentes da trivial são:

a) 0 e 1 b) -1 e 1 c)-1 d)-1 e 0

5) O valor de k para que o sistema linear $\begin{cases} -x+y+2z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-y-kz=0 \end{cases}$ admita solução não trivial é:

b) 1 b) 2 c)-2 d)-1 e)0

6) (ENADE-MATEMÁTICA-2008)Considere o sistema de equações a seguir.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=4 \\ 3x+3y+4z=5 \end{cases}$$

Analise as asserções seguintes relativas à resolução desse sistema de equações lineares.

O sistema não tem solução

porque

o determinante da matriz dos coeficientes é igual a zero.

A respeito dessa afirmação, assinale a opção correta.

a) As duas asserções são proposições verdadeiras e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

b) As duas asserções são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

c) A primeira asserção é uma proposição verdadeira, e a segunda é falsa.

d) A primeira asserção é uma proposição falsa, e a segunda é verdadeira.

e) Ambas as asserções são proposições falsas.

7) Sempre será um sistema linear possível e determinado, **exceto**:

a) Um sistema linear homogêneo.

b) Um sistema linear em que o determinante dos coeficientes é não nulo.

c) Um sistema linear em que o posto da matriz dos coeficientes é igual ao posto do sistema.

d) Um sistema linear homogêneo em que posto da matriz dos coeficientes é igual ao número de incógnitas.

e) Nenhuma das anteriores.

8) (UFV-MG) Um pecuarista fica sabendo que seus animais devem ingerir diariamente 60 g do nutriente A e 40 g do nutriente B. Este pecuarista dispõe de três tipos de ração, com as seguintes características, por quilograma:

– A ração I contém 5 gramas do nutriente A e 8 gramas do nutriente B; custa R$ 4,00.

– A ração II contém 5 gramas do nutriente A e 4 gramas do nutriente B; custa R$ 3,00.

– A ração III contém 15 gramas do nutriente A e 8 gramas do nutriente B; custa R$ 8,00.

O pecuarista pretende misturar as rações I, II e III, de maneira que seus animais possam ingerir a quantidade de nutrientes recomendada. Se, além disso, ele deseja gastar exatamente R$ 32,00, é **correto** afirmar que:

a) É impossível o pecuarista fazer a mistura de modo que seus animais possam ingerir diariamente 60 g do nutriente A, 40 g do nutriente B e gastar exatamente R$ 32,00.

b) É possível o pecuarista fazer a mistura combinando 2 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

c) A mistura deve ser feita combinando 1 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

d) Existem várias formas de fazer a mistura de modo que seus animais possam ingerir diariamente 60 g do nutriente A, 40 g do nutriente B e gastar exatamente R$ 32,00.

e) A mistura deve ser feita combinando 4 kg da ração I, 4 kg da ração II e 2 kg da ração III.

9) (UFV – MG) Se (x, y, z) é solução do sistema linear $\begin{cases} 3^{-x}.9^{y}.3^{z} = \frac{1}{3} \\ \frac{7^{x}}{7^{y}.7^{z}} = 49 \\ 5^{x}.5^{y}.5^{z} = 1 \end{cases}$, então $x + y + z$ é igual a:

a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

10) A tabela abaixo mostra a porcentagem de nutrientes em três tipos de adubos.

	Adubo 1	Adubo 2	Adubo 3
Nutriente A	30%	50%	20%
Nutriente B	30%	30%	70%
Nutriente C	40%	20%	10%

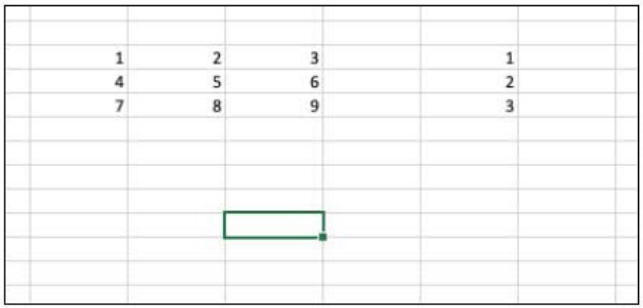
Considerando que há adubos a vontade, quantos quilogramas de cada adubo é necessário para que se obtenha um novo adubo de 100kg com 40% de nutriente A, 40% de nutriente B e 20% de nutriente C?

14.3. Determinante e matriz inversa em planilha eletrônica

Multiplicação de matrizes: É preciso que o número de colunas da 1ª matriz seja igual ao número de linhas da 2ª matriz.

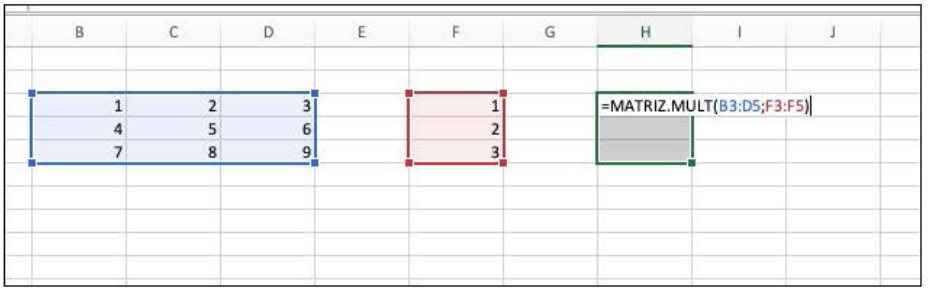
Em uma planilha em branco digite os elementos das matrizes, sendo um elemento em cada célula.

Veja o exemplo do produto de duas matrizes $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ a seguir:

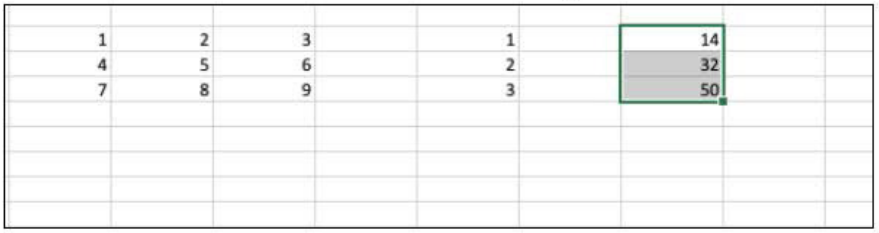


O resultado é uma matriz 3x1, então devemos selecionar três linhas e uma coluna no destino pretendido.

Em seguida digitar: "=matriz.mult", selecionar a primeira matriz, digitar ";" (ponto e vírgula) e depois seleciona a segunda matriz, conforme a imagem:



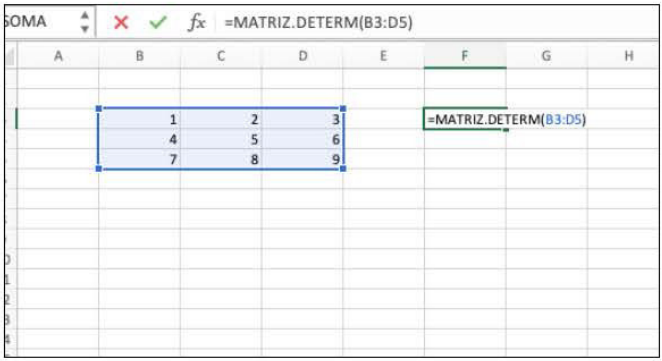
Por fim, segure "shift" e "Ctrl" do teclado (importante manter pressionado esses botões) e tecle em "enter". O resultado do produto será mostrado:



Determinante de matrizes: Em uma planilha em branco digite os elementos das matrizes, um elemento em cada célula.

Em seguida, escolha uma célula onde resultará o determinante. Digite: "=matriz.determ(" e selecione os elementos da matriz.

Veja o exemplo do determinante da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ a seguir:



O resultado desse determinante, desse exemplo, foi zero.

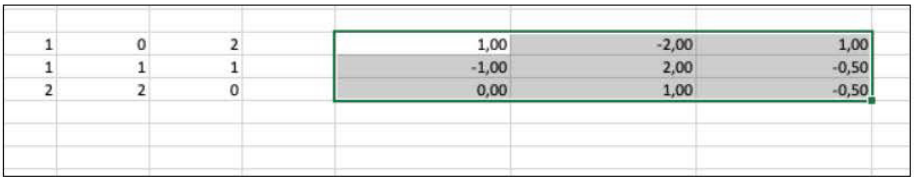
A inversa de matrizes: Em uma planilha em branco digite os elementos das matrizes, um elemento em cada célula.

Em seguida, selecione as células onde resultará a matriz inversa, digite: "=matriz.inverso(" e selecione os elementos da matriz.

Veja o exemplo da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ a seguir:



Após selecionar os elementos, segure os botões: "Shift" e "Ctrl" do teclado, finalizando com um "enter". A planilha mostrará a matriz inversa:



14.4. Sistemas lineares em planilha eletrônica

Para uso de planilha eletrônica, consideraremos apenas sistemas possíveis e determinados. Os passos que se seguem, parte do principio de que um sistema linear pode ser escrito como:

$$AX = B \Rightarrow \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}B \quad \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}.$$

Onde A é a matriz dos coeficiente, A^{-1} é matriz inversa de A, B é a matriz coluna dos termos independentes e X será dado como uma matriz coluna.

Como exemplo, resolveremos o sistema linear: $\begin{cases} 2x + y + 4z = -1 \\ -2x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = -1 \end{cases}$.

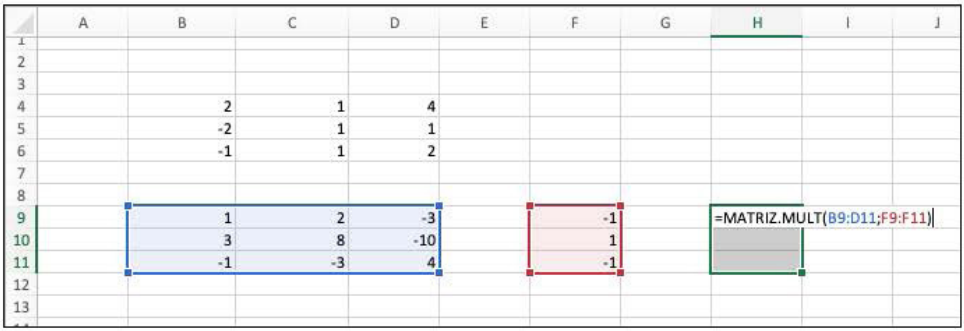
Na planilha, digite a matriz dos coeficientes, conforme a imagem:

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4		2	1	4		
5		-2	1	1		
6		-1	1	2		
7						
8						
9						
10						
11						
12						

Siga os passos da subseção anterior e calcule a inversa dessa matriz. A imagem da matriz inversa está a seguir:

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4		2	1	4	
5		-2	1	1	
6		-1	1	2	
7					
8					
9		1	2	-3	
10		3	8	-10	
11		-1	-3	4	
12					
13					

Digite os termos independentes em coluna. E em seguida, use o comando de multiplicar matrizes (ensinado na seção anterior), conforme a imagem a seguir:



Após o enter, a planilha exibirá a solução do sistema (4, 15, -6):

1	2	-3	-1	4
3	8	-10	1	15
-1	-3	4	-1	-6

O interessante que é possível utilizar os passos já feitos, alterando apenas os dados, para resolver vários sistemas lineares com mesma quantidade de incógnitas e equações.

CAPÍTULO

15

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

15. ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

A análise combinatória e a probabilidade são dois conteúdos matemáticos imprescindíveis para diversas áreas do conhecimento, além da própria Matemática e as ciências agrárias. Esses temas fornecem bases essenciais para o desenvolvimento de outras teorias e métodos, como o cálculo de projeções, previsões e chances de ocorrência de eventos específicos. Assim, são ferramentas indispensáveis para auxiliar na tomada de decisão em diversas situações.

15.1. Análise combinatória

15.1.1. Princípio fundamental da contagem (P.F.C)

A análise combinatória tem como objetivo desenvolver métodos que permitam calcular, por meio da análise de possibilidades, formas, maneiras e combinações, o número de elementos de um conjunto ou de uma determinada situação, sem a necessidade de listá-los ou enumerá-los individualmente. Um dos métodos fundamentais nessa área é o princípio fundamental da contagem.

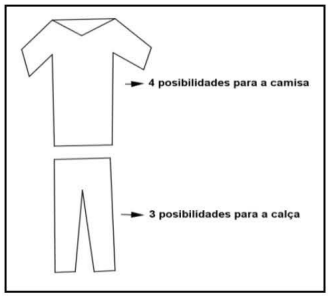
O **princípio fundamental da contagem (P.F.C)**, também conhecido como **princípio multiplicativo**, afirma que se existem x_1 maneiras (ou modos, ou formas ou possibilidades) de tomar uma decisão D_1 e, para cada uma delas, x_2 maneiras de tomar uma decisão D_2, então o número total de maneiras de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é dado por $x_1.x_2$. Esse principio pode ser aplicado a n decisões sucessivas, de modo que o número total de maneiras possíveis será dado por: $x_1.x_2.x_3...x_n$.

Exemplo: João possui em seu guarda-roupa 3 calças e 4 camisas, todas diferentes. De quantas formas distintas João pode se vestir usando uma calça e uma camisa?

Solução: Para entender o princípio, vamos inicialmente enumerar os elementos e contá-los. Usando c1, c2, c3 para o nome das calças e d1, d2, d3 e d4 para o nome das camisas, podemos listar o conjunto solução:

{(c1,d1),(c1,d2),(c1,d3),(c1,d4),(c2,d1),(c2,d2),(c2,d3),(c2,d4),(c3,d1),(c3,d2),(c3,d3),(c3,d4)}

Resposta: João pode se vestir de 12 formas diferentes.



Agora, vamos resolver utilizando o princípio fundamental da contagem (PFC).

Decisão 1: Escolher uma calça, são 3 possibilidades.

Decisão 2: Escolher uma camisa: 4 possibilidades.

Então, o total de formas diferentes de ser vestir é:

$3 \cdot 4 = 12$ formas.

Observe que combinar cada calça (são três) com cada uma das quatro camisas é a ideia por trás do princípio multiplicativo: $3 \cdot 4 = 12$ formas.

2º exemplo: Cinco pessoas desejam tirar várias fotos mudando apenas de lugar entre elas, conforme a imagem a seguir. Quantas fotos diferentes são possíveis?


Pexels.com

Solução: Poderíamos até pensar em uma estratégia de enumerar as pessoas com os números 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente, em seguida listar todas as permutações possíveis e contar. Porém, correríamos o risco de esquecer alguma permutação (ou foto) entre tantas ou até mesmo de repetir alguma já existente.

Este exemplo é uma excelente aplicação do princípio fundamental da contagem (PFC). Acompanhe o pensamento a seguir, elaborado como se fôssemos o fotógrafo organizador das fotos.

Inicialmente devemos decidir quem será a pessoa que ficará na 1ª posição, temos para essa posição: 5 possibilidades. Uma vez escolhida essa pessoa, devemos decidir agora, quem ficará na 2ª posição da foto. Como restaram 4 pessoas, são então: 4 possibilidades. Para a 3ª posição da foto, uma vez já posicionadas, uma pessoa na 1ª posição e outra na 2ª posição, temos somente 3 possibilidades (pessoas), pois quem está na 1ª posição e na 2ª posição, não pode estar na 3ª posição. Estendo esse entendimento as demais posições, temos o seguinte esquema:

$$(\underbrace{\overbrace{5}^{\text{Possibilidades}}}_{1ª\text{ posição}}, \underbrace{\overbrace{4}^{\text{Possibilidades}}}_{2ª\text{ posição}}, \underbrace{\overbrace{3}^{\text{Possibilidades}}}_{3ª\text{ posição}}, \underbrace{\overbrace{2}^{\text{Possibilidades}}}_{4ª\text{ posição}}, \underbrace{\overbrace{1}^{\text{Possibilidade}}}_{5ª\text{ posição}})$$

Pelo princípio multiplicativo, o total de fotos é: $5.4.3.2.1 = 120$.

Já imaginou tirar todas essas fotos e contá-las?

3º exemplo: Cinco atletas participam de uma corrida. Quantos resultados diferentes existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Solução: Inicialmente vamos decidir quem chegará em 1º lugar, nesse caso, são 5 possibilidades (são 5 atletas). Para o 2º lugar, uma vez determinado o ganhador do 1º lugar, há 4 possibilidades, pois é o total de atletas, menos o atleta que chegou em 1º lugar. Para o 3º lugar, há 3 possibilidades, pois é o total de atletas menos os dois que chegaram em 1º e 2º. Portanto, são $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ resultados diferentes.



Primeira dica: Individualizar o problema, dividi-lo em partes. O 1º exemplo foi resolvido verificando as possibilidades para a calça e camisa separadamente e não em conjunto. No 2º exemplo, foi analisada a posição de cada pessoa na foto e não a foto em si. E no terceiro exemplo, foi analisado os lugares do pódio individualmente e por partes e não o pódio já com as posições definidas.

Segunda dica: Se colocar no papel da pessoa que irá tomar a decisão. O 1º exemplo foi resolvido nos colocando no lugar de quem irá vestir a calça e a camisa. No 2º exemplo, nos colocamos no papel do fotógrafo, organizando a posição de cada pessoa, e no 3º exemplo, nos colocamos no papel do organizador do pódio.

4º exemplo: Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Solução: Individualizando o problema, temos para o 1º lançamento duas possibilidades: cara ou coroa. E duas possibilidades também para os demais lançamentos. Veja o esquema a seguir.

$$(\overbrace{\underbrace{2}_{\text{possibilidades: cara ou coroa}}}^{\text{1º lançamento}}, \overbrace{\underbrace{2}_{\text{possibilidades: cara ou coroa}}}^{\text{2º lançmento}}, \overbrace{\underbrace{2}_{\text{possibilidades: cara ou coroa}}}^{\text{3º lançamento}})$$

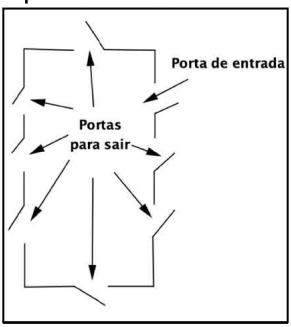
Logo: são $2.2.2 = 8$ sequências.

Observe que ao contrário dos outros dois exemplos, o resultado de um lançamento independe do resultado dos lançamentos anteriores. Para fins de comprovação, o conjunto solução está listado a seguir, usando a letra K para cara e C para coroa.

$$\{(K,K,K),(K,K,C),(K,C,K),(K,C,C),(C,K,K),(C,K,C),(C,C,K),(C,C,C)\} = 8 \text{ sequências.}$$

5º exemplo: Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

Solução: Vamos nos colocar no papel da pessoa que irá entrar e sair do edifício. Para entrar, ela tem a disposição 8 portas (pode entrar por qualquer uma), então são 8 maneiras diferentes para entrar. Uma vez dentro do edifício, ela tem disponível apenas 7 portas para sair, pois não pode sair pela mesma porta que entrou. Desse modo, são 7 maneiras diferentes para sair do edifício.



Pelo princípio fundamental da contagem, são $8 . 7 = 56$ formas.

Reformulando a pergunta: Supondo que a pessoa possa sair pela mesma porta que entrou, quantas são as formas diferentes que uma pessoa pode entrar e sair do edifício?

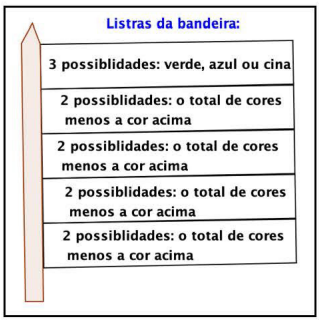
Solução: $8.8 = 64$, pois agora ela pode sair e entrar pela mesma porta.

6º exemplo: Uma bandeira é formada por cinco listras que devem ser coloridas usando apenas as cores verde, azul e cinza. Se cada listra deve ter apenas uma cor e não se pode usar cores iguais em listras adjacentes, de quantos modos diferentes se pode colorir a bandeira?

Solução: Vamos colorir a bandeira listra por listra. Para a 1ª listra, há 3 cores disponíveis e que podem ser utilizadas. Para a 2ª listra em diante, são somente (3-1=2) duas cores como possibilidade para cada uma, pois cada listra não pode ter cor igual à adjacente a ela. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$3. 2 . 2 . 2 . 2 = 48$ modos diferentes de colorir a bandeira.

Em caso de não haver restrição em colorir listras adjacentes, seriam $3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243$ modos diferentes de colorir a bandeira.



EXERCÍCIOS 15.1

1)Em um banco de automóvel, o assento pode ocupar 4 posições diferentes e o encosto 3 posições diferentes, independentemente da posição do assento. Combinando assento e encosto, quantas posições diferentes esse banco pode assumir?

2)Numa festa existem 10 homens e 20 mulheres. Quantos casais diferentes podem ser formados?

3)Um edifício tem 11 portas. De quantas formas diferentes uma pessoa poderá entrar no edifício e sair por uma porta diferente da que usou para entrar?

4) Uma prova consta de 8 testes do tipo verdadeiro ou falso. De quantas formas diferentes uma pessoa poderá responder aos 8 testes?

5) Um estádio de futebol tem 4 portões de entrada e 3 portões de saída. De quantas formas diferentes um torcedor pode entrar e sair desse estádio?

6)Um estádio de futebol possui 7 portões (que podem ser usados tanto para entrar, como também para sair). De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar nesse estádio por um portão e sair por outro diferente?

7)Dois dados são lançados simultaneamente, quantos são as combinações de resultados possíveis?

8)Dispomos de 7 cores e queremos pintar uma bandeira de 4 listras, cada listra com uma cor. De quantas formas distintas isso pode ser feito:

a)Se listras adjacentes não podem ser pintadas com a mesma cor?

b)Se a primeira e a última listra devem ter cores iguais e listras adjacentes podem ser pintadas com mesma cor?

9)Para ir de uma cidade A à uma cidade B, há 3 estradas. Para ir dessa cidade B à cidade A, há 2 estradas. De quantas formas diferentes um motorista pode ir da cidade A à cidade C, passando por B?

10) (ENEM) Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos - uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores. O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

a) 1.320.
b) 2.090.
c) 5.845.
d) 6.600.
e) 7.245.

Grupos taxonômicos	Número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

Agora, após esses exercícios, seguiremos com exemplos mais sofisticados.

7º exemplo: Uma igreja possui 3 portas. De quantos modos ela pode ser aberta?

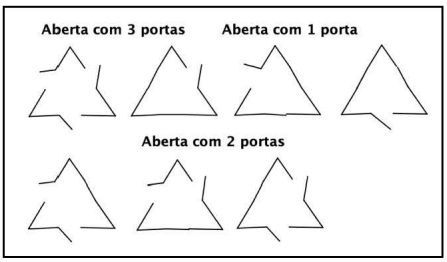
Solução: Há dois modos para cada porta, pois uma porta pode está fechada ou aberta e pelo PFC, 2.2.2 = 8 modos. Entretanto, está incluída nessa contagem uma possibilidade de as três portas estarem fechadas, e nesse caso, a igreja não estará aberta. Subtraindo 8 -1 = 7. Resposta: 7 modos.

Para entender melhor este exemplo, está listada a seguir os 7 modos da igreja estar aberta, em que A simboliza porta "aberta" e F "fechada".

S = {(A,A,A), (A,A,F), (A,F,F), (F,A,A), (A,F,A), (F,F,A), (F,A,F)}.

Observe que o elemento (F,F,F) que representa as três portas fechadas, não faz parte do conjunto solução da questão.

A ilustração está ao lado.



8º exemplo: Quantos números naturais existem com três algarismos?

Solução: Analisemos cada algarismo. O algarismo que irá compor a primeira posição não pode ser zero, pois o zero à esquerda não tem valor (perceba que o número 045, por exemplo, é o número 45, que possui somente dois algarismos e não três). Assim, temos 9 possibilidades, uma vez que há 9 algarismos disponíveis: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e o 9. Para a segunda e a terceira posição, temos 10 algarismos como possibilidades (podem ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9), pois nessas posições não há problemas com o zero e nenhum outro algarismo. Veja o esquema:

1ª posição	2ª posição	3ª posição
9	10	10
possibilidades: 1,2,3,4,5,6,7,8,9	possibilidades: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9	possibilidades: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Logo, pelo PFC: $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ números.

De fato, conferindo do número 100 (o menor número de três algarismos) ao 999 (o maior número de 3 algarismos) são realmente, 900 números. Verifique!

SAIBA MAIS!

Algarismos ou dígitos *são símbolos que compõem o número. No nosso sistema numérico qualquer número pode ser escrito com apenas 10 algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.*

9º exemplo: Quantos números naturais existem com três algarismos distintos?

Solução: A diferença entre essa pergunta e a anterior está no acréscimo da palavra "distintos". Isso quer dizer que devemos contar somente os números naturais em que todos os seus algarismos são diferentes, ou seja, **não devemos contar**, por exemplo: 222, 888, 111, 232, 788, 990, pois esses números possuem dois ou três algarismos iguais.

A solução é simples e similar a outros exemplos já resolvidos. Iniciando pelo algarismo da primeira posição (à esquerda), temos: 9 possibilidades (são 10 algarismos menos o zero – lembre-se!). Para a segunda posição, seriam 10 possibilidades (esse algarismo pode ser zero), porém não devemos repetir o algarismo já escolhido na primeira posição (devem ser distintos), assim, são 9 possibilidades. No mesmo entendimento, há 8 possibilidades para a terceira posição, pois não podemos por os algarismos que estão na primeira e na segunda posição. Veja o esquema:

1ª posição	2ª posição	3ª posição
9	9	8
possibilidades: 1,2,3,4,5,6,7,8,9	possibilidades: não pode ser o algarismo da 1ª posição	possibilidades: não pode ser o algarismo da 1ª e da 2ª posição.

Logo, pelo PFC: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números.

Por que iniciamos sempre pela 1ª posição à esquerda? Podemos iniciar a análise por qualquer parte? Veja a dica a seguir.

Terceira dica: Uma vez dividido o problema em partes, sempre comece a análise pela parte mais restrita. Veja no exemplo anterior, que a análise iniciou pela a parte mais restrita (ou a única que tinha restrição), ou seja, pela primeira posição, que não podia ter o algarismo zero.

Vejamos uma solução **errônea** para o exemplo anterior, iniciando pela parte não restrita.

Solução errônea: Iniciando pela terceira posição, são 10 possibilidades. Para a segunda posição, são 9 possibilidades, pois não pode ser o algarismo que está na terceira posição. E para a primeira posição, são 7 possibilidades, pois não pode ser o zero e não pode ser os algarismos que estão na terceira e na segunda posição. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, deveríamos ter: 10.9.7 = 630 números.

O erro a menor dessa solução está no fato de que diminuímos duas possibilidades para a 1ª posição, por não poder ser zero e também por não poder repetir algarismo. Mas, se esse algarismo que não pode se repetir for o zero?

Se o algarismo for o zero, a 1ª posição possui 9 possibilidades e, se não for o zero, serão 8 possibilidades. Eis o impasse que resultou no erro.

É claro que para resolver esse impasse basta seguir a terceira dica. Porém, há situações em que mesmo seguindo todas as dicas, os impasses podem vir a ocorrer (ver 11º exemplo a seguir). Nesse contexto, devemos dividir a contagem em categorias (ou casos), calculá-las separadamente e ao final, contabilizar os resultados. Veja a solução desse exemplo dividindo-o em categorias:

Primeira categoria: Supondo não haver restrição para o zero na 1ª posição, podemos então começar pela 3ª posição: são 10 possibilidades, 2ª posição: 9 possibilidades e 1ª posição: 8 possibilidades (esqueça o zero). Então, são 10.9.8 = 720 números.

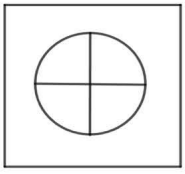
Segunda categoria: Vamos calcular a quantidade de números que começam com zero. Para a 1ª posição: 1 possibilidade (só o zero), para a 2ª posição: 9 (não pode ser zero), e para a 3ª posição: 8 possibilidades (não pode ser o algarismo da 2ª posição e nem o zero). Então, são 1.9.8 = 72 números que começam com zero.

Subtraindo as categorias, dispomos de 720 - 72 = 648 números.

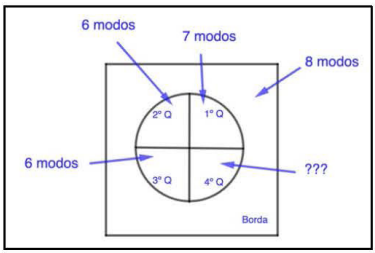
10º exemplo: Quantos números naturais de três algarismos existem com ao menos dois algarismos iguais?

Solução: Poderíamos calcular os números com dois algarismos iguais (variando as posições) e também com três algarismos iguais, mas isso poderia levar a impasses e interseções indesejadas. A melhor abordagem é dividir a contagem em duas categorias que já foram calculadas nos exemplos anteriores. No 8º exemplo, calculamos a quantidade total de números com três algarismos, e no 9º exemplo, a quantidade de números com três algarismos distintos. Se subtrairmos a quantidade total de números pela quantidade de números com algarismos distintos, encontraremos a quantidade de números com pelo menos dois algarismos iguais. Assim, temos 900 - 648 = 252 números.

11º exemplo: A bandeira ao lado deve ser pintada de forma que os quadrantes adjacentes do círculo e a borda da bandeira, tenham cores diferentes. Com 8 cores disponíveis, quantos modos diferentes podemos pintar essa bandeira?



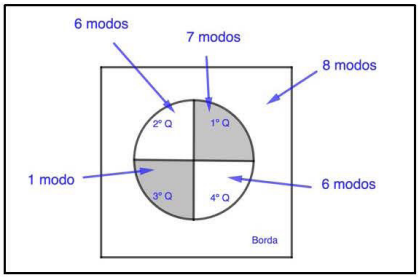
Solução: Iniciando pela borda, são 8 modos diferentes de pintá-la (podemos pintar com todas as 8 cores disponíveis). Para o 1º quadrante, são 7 modos, pois não pode ter cor igual à da borda. Para o 2º quadrante, são 6 modos. Para o 3º quadrante, são 6 modos (pode ser igual ao 1º quadrante). Para o 4º quadrante, temos um impasse, pois esse quadrante é adjacente tanto ao 3º quanto ao 1º quadrante já pintados, e a quantidade de modos de pintá-lo depende das cores desses quadrantes.



Perceba que se o 3º e o 1º quadrantes forem pintados com a mesma cor, o 4º quadrante deverá ser pintado de uma cor diferente dessa. Caso sejam pintados de cores diferentes, o 4º quadrante deverá ser pintado de uma cor distinta dessas duas cores.

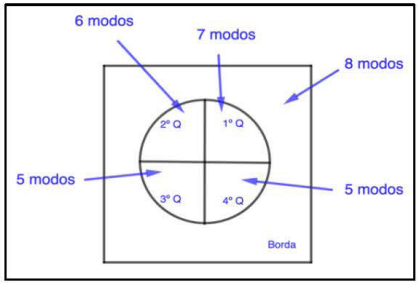
Para resolver esse impasse, vamos dividir a bandeira em duas categorias: bandeiras com 1º e 3º quadrantes com cores iguais e bandeiras com 1º e 3º quadrantes com cores diferentes. Do seguinte modo:

Bandeiras com 1º e 3º quadrantes com cores iguais: São 8 modos de pintar a borda, 7 modos de pintar o 1º quadrante, 6 modos de pintar o 2º quadrante, 1 modo de pintar o 3º quadrante (pois, precisa ser de mesma cor do 1º quadrante) e 6 modos para o 4º quadrante (pode ser igual ao 2º quadrante, mas não pode ser igual ao 1º e a borda).



São 8.7.6.1.6 = 2016 modos.

Bandeiras com 1º e 3º quadrantes com cores diferentes: São 8 modos de pintar a borda, 7 modos de pintar o 1º quadrante, 6 modos de pintar o 2º quadrante, 5 modos de pintar o 3º quadrante e 5 modos para o 4º quadrante.



São 8.7.6.5.5 = 8400 modos.

Total: 2016+8400 = 10416 modos diferentes.

Quarta dica: Estar atento as restrições e em caso de impasse, dividir a contagem em categorias (ou casos). No 7º exemplo, há 8 modos das 3 portas estarem abertas ou fechadas ($2.2.2 = 2^3 = 8$), mas entre esses modos, há um em que as três portas estão fechadas e lógico, a igreja não estará aberta (temos uma restrição). Portanto, a resposta é apenas 7 modos. No 10º exemplo, a solução foi dividida em duas categorias: todos os números e os números com algarismos distintos. No 11º exemplo, a bandeira, diante do impasse, foi dividida em duas categorias: uma com o 1º e 3º quadrantes de mesma cor, e outra, com esses quadrantes com cores diferentes.

EXERCÍCIOS 15.2

1)Quantos números de 3 algarismos (iguais ou distintos) podemos formar com os dígitos 1, 2, 3, 7, 8?

2)Quantos números naturais existem com 4 algarismos?

3)Quantos números naturais existem com 4 algarismos distintos?

4)Quantos números naturais de 4 algarismos existem com ao menos dois algarismos iguais?

5)Quantos números naturais pares existem com 2 dígitos distintos?

6)Quantos números naturais existem de 3 dígitos distintos que são divisíveis por 5?

7)Uma senha para acessar um cofre é composta de 5 dígitos (só números). Qual o número máximo de tentativas necessárias para abrir este cofre?

8)Um computador possui uma senha alfanumérica, em que se pode usar 26 letras (maiúsculas e minúsculas geram senhas distintas) e/ou os 10 dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Qual o número de combinações possíveis para uma senha de 4 dígitos?

9) Em um campeonato de futebol, participam 10 times. Quantos resultados diferentes são possíveis para os três primeiros lugares? Quantos jogos são disputados no 1º turno?

10)Uma locadora de vídeo possui 8 filmes de ação, 10 de suspense e 5 de comédia. De quantas maneiras distintas um cliente pode locar 3 filmes, sendo um de cada gênero?

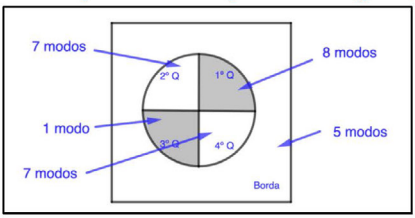
11)Há placas de automóveis que são formadas por três letras (de um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos. Quantas placas diferentes podem ser formadas?

12) Um aluno apresentou uma solução alternativa para 11º exemplo anterior, no caso em que 1º e 3º quadrantes devem ter cores iguais.

Solução alternativa:

Bandeiras com 1º e 3º quadrantes com cores iguais: São 8 modos de pintar o 1º quadrante, 7 modos de pintar o 2º quadrante, 1 modo de pintar o 3º quadrante (pois, precisa ter a mesma cor do 1º quadrante), 7 modos para o 4º quadrante. E por fim, para a borda, são 5 modos diferentes, pois não pode ser igual às três cores já utilizadas.

Resposta: 8.7.1.7.5 = 1960 modos.



Explique por que essa solução não está correta.

13)(ENEM) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

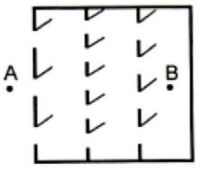
O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

a)6.
b)7.
c)8.
d)9.
e)10.



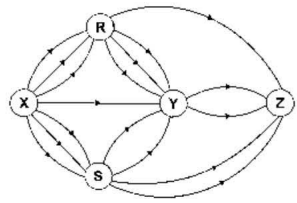
14)(FCMMG) Observe a figura. Nela está representada a planta de um cômodo contendo 3 portas na primeira parede, 5 na segunda e 4 na terceira. Uma pessoa deseja chegar ao ponto B, partindo do ponto A, passando exatamente por três das portas indicadas na figura. O número de maneiras distintas que ela pode fazer isso é

a)11
b)23
c)32
d)60



15)(UFMG) Observe o diagrama. O número de ligações distintas entre X e Z é:

a) 39
b) 41
c) 35
d) 45

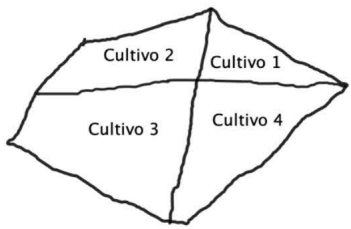


16)(MACK) Cada um dos círculos da figura ao lado deverá ser pintado com uma única cor, escolhida dentre quatro disponíveis. Sabendo-se que dois círculos consecutivos nunca serão pintados com a mesma cor, então o número de formas de se pintar os círculos é:



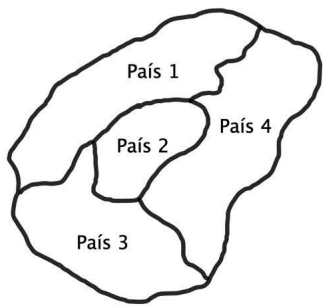
a) 100 b) 240 c) 729 d) 2916 e) 5040

17)Um fazendeiro deseja pintar o mapa de sua fazenda (que está na figura a seguir) com 6 cores diferentes. Ele quer garantir que áreas de cultivos adjacentes tenham cores distintas (considere o ponto de encontro das divisões como não adjacente). De quantas formas diferentes, esse fazendeiro pode pintar o mapa de sua fazenda?



18)O Problema das Quatro Cores é um desafio matemático que consiste em colorir um mapa de forma que países com fronteiras comuns tenham cores diferentes. A conjectura original, foi proposta por Francis Guthrie em 1852, que afirmou que no máximo quatro cores seriam suficientes para colorir qualquer mapa de forma adequada. No entanto, apenas em 1976, após mais de cem anos, foi possível provar o Teorema das Quatro Cores, demonstrando que essa conjectura estava correta.

Explique, utilizando o princípio fundamental da contagem, por que três cores não são suficientes para pintar o mapa ao lado, de modo que países fronteiriços tenha cores diferentes.



15.1.2. Fatorial

Definição 15.1.2.1: Dado um número natural n, definimos seu fatorial, indicado por $n!$, como sendo o produto dos n números naturais consecutivos (decrescentes) de n até 1.

$$n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)...3.2.1$$

Exemplos:
- 3! (lê-se três fatorial) = 3.2.1 = 6;
- 6! (lê-se seis fatorial) = 6.5.4.3.2.1 = 720;
- 7! (lê-se sete fatorial) = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040.

Podemos notar que:
- 3! = 3.2! (Não é preciso usar o 1, pois é elemento neutro da multiplicação).
- 7! = 7.6.5! (No desenvolvimento do fatorial, às vezes, pode ser útil não desenvolver toda a expressão. Neste exemplo, o desenvolvimento parou em 5!).
- 10! = 10.9.8.7.6! (Nesse exemplo, o desenvolvimento parou em 6!).

Nesse entendimento, é imediato perceber que:
- $n! = n.(n-1)!$
- $n! = n.(n-1).(n-2)!$
- $n! = n.(n-1).(n-2)(n-3)!...$

Ou ainda que:
- $(n+1)! = (n+1).n!$
- $(n+2)! = (n+2).(n+1).n!$

Por mais que o zero não seja um número natural, o **0!** (zero fatorial) possui um valor definido. Essa afirmativa pode ser averiguada partindo das premissas de que: $n! = n.(n-1)!$ e **1! = 1**. E ao fazer $n = 1$ na primeira expressão, obtemos:

1! = 1.(1-1)! ⇒ 1 = 1.0! ⇒ **0! = 1** (ou seja, 0! é igual a um e não igual a zero).

Exemplo: Calcule.

a) $\frac{7!}{5!} = \frac{7.6.\cancel{5.4.3.2.1}}{\cancel{5.4.3.2.1}} = 7.6 = 42.$

Pode-se também desenvolver o 7! e parar no 5!, para cancelar com o 5! do denominador.

b) $\frac{5!.3!}{4!.2!} = \frac{5.\cancel{4!}.3.\cancel{2!}}{\cancel{4!}.\cancel{2!}} = 5.3 = 15.$

2º exemplo: Resolva a equação: $(x - 1)! = 24$

Solução:

Por tentativas, vemos que $4! = 4.3.2.1 = 24$.

Logo: $(x - 1)! = 4!$ consequentemente, $x - 1 = 4 \Rightarrow \boxed{x = 5}$.

3º exemplo: Resolva a equação: $\frac{n!}{(n-2)!} = 20$

Solução: Usando a definição de que $n! = n.(n-1).(n-2)!$, podemos escrever

$$\frac{n.(n-1).\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 20 \Rightarrow n.(n-1) = 20 \Rightarrow$$

$$n^2 - n - 20 = 0 \ (a = 1, b = -1, c = -20).$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-20) = 1 + 80 \Rightarrow \Delta = 81.$$

$$\begin{cases} n' = \dfrac{-(-1) + \sqrt{81}}{2.1} = \dfrac{+1+9}{2} = \dfrac{10}{2} = 5. \\ n'' = \dfrac{+1-9}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4 \text{ (não serve, negativo).} \end{cases} \Rightarrow S = \{5\}.$$

EXERCÍCIOS 15.3

1) Calcule:

a) 4!
b) 9!
c) 4!.2!.1!.0!
d) 6! – 5!
e) $\dfrac{5!}{(6-2)!}$
f) $\dfrac{1000!}{999!}$
g) $\dfrac{10!6!4!}{9!5!3!}$
h) $\dfrac{10!11!8!7!}{11!10!8!6!}$

2) Resolva as equações:

a) $(x - 3)! = 120$
b) $(x - 1)! = 720$
c) $(x - 2)! = 0!$
d) $(x + 1)! = 4.x!$

15.1.3. Permutação simples

Definição 15.1.3.1: Denominamos de permutação simples as formas pelas quais podemos ordenar em fila n elementos[8] distintos em n posições diferentes.

A partir dessa definição e usando o princípio fundamental da contagem, temos para a 1ª posição: n modos, para 2ª posição: $n-1$ modos, para 3ª posição: $n-2$, e etc., até 1. O que equivale a $n.(n-1).(n-2)(n-3)\ldots 4.3.2.1$, isto é:

O número de permutações simples de n elementos é $n!$

Exemplo: De quantas formas diferentes podem 3 pessoas ficar em fila indiana?

Solução: O cálculo deste exemplo nada mais é que uma permutação simples entre as pessoas na fila, isto é, a cada pessoa que troca de lugar com a outra, forma uma fila diferente. Assim:

$3! = 3.2.1 = 6$ formas diferentes.

Para melhor compreensão da resposta, denominando as três pessoas de a, b e c, temos o seguinte conjunto solução de todas as filas diferentes possíveis:

{(a, b, c),(a, c, b),(b, a, c),(b, c, a),(c, a, b),(c, b, a)}.

De fato, são 6 formas diferentes.

[8] A ideia de elementos pode ser entendida como objetos, pessoas, etc.

2º exemplo: Qual o número de anagramas da palavra ESTUDAR?

Solução: Anagrama é a mudança de ordem das letras que compõe uma palavra. O resultado dessa mudança pode ter significado ou não na nossa língua. A própria palavra é considerada um anagrama. Veja alguns anagramas da palavra ESTUDAR:

SETUDAR, TUSEDAR, DRATUSE, ...

Como a mudança de ordem das letras é uma permutação simples, dispomos para 7 letras: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, o que equivale a 5040 anagramas.

3º exemplo: Quantos anagramas existem da palavra ESTUDAR que começam com a letra D?

Solução: Neste caso, devemos pensar nos anagramas com a letra "D" fixa no início, e somente as demais letras permutando entre si: $\underbrace{D}_{\text{"fixa"}}\ \underbrace{ESTUAR}_{\text{permuta}}$.

Como são apenas 6 letras permutando, dispomos de:

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ anagramas.

4º exemplo: Quantos números de cinco algarismos distintos podem ser formados usando os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

Solução: Basta calcular as permutações possíveis. Como são cinco algarismos, há: $5! = 5.4.3.2.1 = 120$ números.

15.1.4. Permutação com elementos repetidos

Como exemplo, vamos calcular a quantidade de anagramas da palavra ALA.

Claramente, o número de anagramas possíveis dessa palavra **não** é 3! = 6. Pois, temos duas letras iguais: "A" e ao listar todos anagramas possíveis, encontramos apenas três anagramas: {ALA, AAL, LAA}.

Para entender o procedimento do cálculo e, consequentemente, a fórmula, vamos listar os anagramas dessa palavra substituindo uma letra A por A_1 e a outra letra A, por A_2. Da seguinte forma:

$\{A_1 \text{L} A_2,\ A_1 A_2 \text{L},\ \text{L} A_1 A_2, \text{L} A_2 A_1, A_2 \text{L} A_1, A_2 A_1 \text{L}\} = 6$ anagramas.

Como $A_2 = A_1$, temos os seguintes anagramas iguais:

$A_1 \text{L} A_2 = A_2 \text{L} A_1$, $A_1 A_2 \text{L} = A_2 A_1 \text{L}$ e $\text{L} A_1 A_2 = \text{L} A_2 A_1$.

Observe que a permutação entre as letras repetidas não alteram o anagrama, portanto, precisamos dividir 6! por 2!, e por conseguinte

$$P = \frac{6!}{2!} = 3\ anagramas.$$

Esse raciocínio se aplica, evidentemente, a qualquer palavra de n letras, com uma quantidade n' de letras repetidas:

$$P = \frac{n!}{n'!}$$

Em que P é o números de permutações, n é o número total de letras (objetos ou elementos) e n' é o número de letras (objetos ou elementos) repetidos.

Caso tenha mais de uma letra repetida, usamos a fórmula geral:

$$P = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_r!}$$

Em que P é o números de permutações, n é o número total de letras (objetos ou elementos) e n_1, n_2.... n_r é o número de cada letra (objeto ou elemento) repetidos.

Exemplo: Quantos anagramas existem da palavra ESTATISTICA?

Solução: Total $n = 11$ letras. Vamos conferir as letras repetidas: são duas letras "S", três letras "T", duas letras "A" e duas letras "I". As demais não possui repetições. Assim

$$P = \frac{11!}{2!\,3!\,2!\,2!} = \frac{39916800}{48} = 831.600\ anagramas.$$

2º exemplo: Quantos anagramas existem da palavra SABEDORIA que começam com as letras DOR nessa ordem?

Solução: Utilizando o mesmo raciocínio do 3º exemplo anterior, devemos pensar nas letras DOR fixadas no início do anagrama e apenas as demais (6 letras) permutando entre si: $\underbrace{\text{DOR}}_{\text{"fixa"}}\ \underbrace{\text{SABEIA}}_{\text{permuta}}$. Como há duas letras "A" na parte que permuta, o total de anagramas que começam com DOR é

$$P = \frac{6!}{2!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2} = 360\ anagramas.$$

3º exemplo: Dez pessoas, entre elas Antônio e Beatriz, devem ficar em fila. De quantas formas isso pode ser feito se Antônio e Beatriz devem ficar sempre juntos?

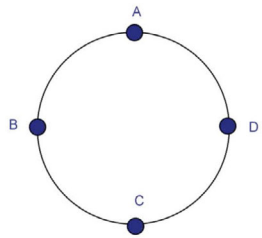
Solução: Uma forma de resolver problemas em que dois ou mais elementos (pessoas ou objetos) devem ficar juntos, é tratá-los como se fossem somente um. Nesse entendimento, se Antônio e Beatriz devem ficar juntos, eles serão tratados como se fossem "uma única pessoa". Assim, a permutação ocorrerá somente entre 9 pessoas. Entretanto, em cada uma dessas permutações, Antônio e Beatriz, podem também permutar entre si (AB ou BA) de 2 formas (ou seja, 2!), que ainda sim, continuam juntos. Logo, o total de filas em que eles aparecem juntos é: $2.9! = 725.760$.

Observação: Suponha que sejam agora três pessoas que devem ficar juntas: Antônio, Beatriz e Cláudia, e essas pessoas devam estar sempre juntas na fila. Nesse caso, as três pessoas devem ser tratadas como uma "única pessoa", e que juntas com as outras 7, formariam 8 pessoas a serem permutadas (8!). Como as três pessoas poderão também permutar entre si (3!), teremos para este caso: $3!.8! = 241.920$ filas diferentes.

15.1.5. Permutação circular

É uma forma de permutação em que os objetos são dispostos ao redor de um círculo (ou roda, ou circunferência, etc.).

Pare entender a concepção da fórmula, consideremos a permutação circular com quatro elementos apenas:



De quantas formas esses elementos podem formar uma roda?

Pensando em uma permutação simples, deveriam ser 4! =24 formas diferentes de formar a roda. Entretanto, as sequências: (A, B, C, D), (D, A, B, C), (C, D, A, B) e (B, C, D, A) são iguais, pois representam a mesma roda girando no sentido anti-horário (verifique!). O mesmo acontece a cada permutação entre os elementos da roda, excedendo assim, a contagem em 4 vezes o seu valor. Conclusão:

$$P = \frac{4!}{4} = 3! = 6\ formas.$$

Esse raciocínio se estende a n elementos em uma roda, portanto, o número de permutações circulares é dado por:

$$P = \frac{n!}{n} \quad \text{ou} \quad P = (n-1)!$$

Exemplo: Seis pessoas irão jogar baralho em uma mesa circular com seis cadeiras. De quantas formas eles podem sentar-se à mesa?

Solução: Como se trata de permutação circular, dispomos de

$$P = \frac{6!}{6} = \frac{6.5.4.3.2.1}{6} = 5! = 120\ formas.$$

2º exemplo: João e alguns amigos foram a um restaurante e perceberam que trocando de lugar uns com os outros, poderiam sentar-se à uma mesa circular de 24 formas diferentes. Quantos amigos estavam com João?

Solução: Sabendo que $4! = 24$ e substituindo na expressão $P = (n-1)!$, obtemos

$$4! = (n-1)! \Rightarrow \boxed{n = 5}.$$

Resposta: 4 amigos (João não conta).

EXERCÍCIOS 15.4

1)Quantos anagramas existem da palavra ESCOLA?

2)Quantos anagramas existem da palavra GEOGRAFIA?

3)Quantos anagramas existem da palavra ARARA?

4)Quantos anagramas existem da palavra BACABA que começam com B e terminam com B?

5)Quantos números pares podemos formar permutando os algarismos 1, 4, 6, 7 e 9?

6)Um código de criptografia foi criado a fim de proteger conversas entre alunos. Eles usam em seus códigos sempre com 10 caracteres. Sendo cinco "@", três "$" e dois "#". Exemplos: @@@@@$$$##, $@@@@$$##, ... Quantos códigos diferentes podem ser criados?

7)De quantas formas diferentes 6 crianças podem formar uma roda?

8)Um artesão faz colares utilizando sempre 10 bijuterias diferentes. Quantos colares diferentes ele pode comercializar?

9)Um aluno encontra-se na origem do sistema cartesiano ortogonal. Ele só pode dar um passo de cada vez, para o norte (N) ou para o leste(L). Quantas trajetórias (caminhos) existem da origem ao ponto (5, 3)? Sugestão: Analise cada passo como (N,L,L,N.....)

10)De quantas formas 3 homens e 4 mulheres podem ficar em fila, se:

a) Os homens devem ficar juntos;
b) Os homens devem ficar juntos e as mulheres também?

11) Pedro possui 4 livros de matemática, 2 de física e 3 de química. De quantas formas diferentes ele pode empilhar esses livros, com os livros de química sempre juntos?

12)(ENEM) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as 7 letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @. O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem. Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado. De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a)59 b) 60 c)118 d) 119 e)120

15.1.6. Combinação simples

Definição 15.1.6.1: Denominamos de combinação simples, a quantidade de formas de selecionar r elementos distintos, não importa a ordem, de um conjunto de n elementos.

Exemplo: Quantas duplas podem ser formadas a partir de um grupo de 5 pessoas?

Solução: Aplicando o princípio fundamental da contagem.

$$\overbrace{(\underbrace{5}_{1ª\ pessoa}, \underbrace{4}_{2ª\ pessoa})}^{Possibilidades} \Rightarrow 5.4 = 20 \text{ duplas.}$$

Nesse cálculo, as duplas ordenadas (A, B) e (B, A), (D, E) e (E, D), (C, D) e (D, C), etc., estão computadas duas vezes, porém, tratam-se de mesma dupla (combinação simples). Assim, devemos corrigir essa contagem dividindo pela permutação entre as pessoas da dupla (por 2!): $\frac{20}{2!} = \frac{20}{2} = 10$ duplas.

De fato, são dez: (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E) e (D, E).

2º exemplo: Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas de um grupo de 6 pessoas?

Solução: Aplicando o PFC, temos: $\overbrace{(\underbrace{6}_{1ª}, \underbrace{5}_{2ª}, \underbrace{4}_{3ª})}^{Possibilidades} \Rightarrow 6.5.4 = 120$ comissões (trios).

Porém, devemos descontar a permutação entre as pessoas da comissão (3!), desse modo

$$\frac{120}{3!} = \frac{120}{6} = 20 \text{ comissões.}$$

Para não recorrer ao Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e, em seguida, fazer correções de contagem (embora seja didaticamente viável), utilizamos a seguinte fórmula para combinação simples, para selecionar, não importando a ordem, r elementos distintos de um conjunto de n elementos:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Sendo $n,\ r \in \mathbb{N}$, com $r < n$.

Lê-se: n elementos tomados de r em r.

Demonstração: De acordo com o princípio fundamental contagem, temos

$$\overbrace{(\underbrace{n}_{1º}, \underbrace{n-1}_{2º}, \underbrace{n-2}_{3º}, \ldots, \underbrace{n-r+1}_{r})}^{Possibilidades} \Rightarrow \overbrace{n.(n-1).(n-2).(n-3)\ldots(n-r+1)}^{Pelo\ PFC}$$

O que é equivalente a $\frac{n!}{(n-r)!}$ (Verifique!). Porém, devemos fazer a correção dividindo pela permutação entre os $r!$ elementos. Assim: $\frac{\frac{n!}{r!(n-r)!}}{r!} = \boxed{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$.

Vamos resolver os exemplos anteriores utilizando a fórmula.

Solução do 1º exemplo:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.1.3.2.1} = 10\ duplas.$$

Solução do 2º exemplo:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!.3.2.1} = 20 comissões\ (trios).$$

Como aplicação do uso da fórmula, estão os 3º e 4º exemplos a seguir.

3º exemplo: Calcule.

a) $\binom{5}{3} = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1\ (2!)} = 10.$

b) $\binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1\ (2!)} = 15.$

c) $\binom{8}{1} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1!.(8-1)!} = \frac{8}{1} = 8.$

d) $C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4.3.2.1}{3.2.1\ (1!)} = 4.$

e) $\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!.(3-0)!} = \frac{3!}{3!} = 1.$

Lembrando que 0! =1.

4º exemplo: Resolva a equação: $\binom{n}{2} = 28$

Solução: Da fórmula, temos que

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!.(n-2)!} = 28.$$

Mas, $n! = n.(n-1).(n-2)!$ Assim

$$\frac{n!}{2!.(n-2)!} = 28 \Rightarrow \frac{n.(n-1).(n-2)!}{2!.(n-2)!} = 28 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$$

$$n^2 - n - 56 = 0\ \ (a = 1, b = -4, c = -56).$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(-56) = 1 + 224 \Rightarrow \Delta = 225.$$

$$n \Rightarrow \begin{cases} n' = \dfrac{-(-1) + \sqrt{225}}{2.1} = \dfrac{+1+15}{2} = \dfrac{16}{2} = 8. \\ n'' = \dfrac{+1-15}{2} = \dfrac{-14}{2} = -4\ (não\ serve, negativo) \end{cases} \Rightarrow S = \{8\}.$$

Para identificar se devemos utilizar uma combinação simples ou princípio fundamental da contagem (PFC) na solução de uma questão, devemos analisar o ordenamento dos r objetos no conjunto. Caso a ordem dos objetos configure um conjunto diferente, utilizamos o PFC, caso contrário, isto é, se independentemente da ordem dos objetos o conjunto é o mesmo, devemos utilizar então, a combinação simples.

Por exemplo, suponha que serão escolhidos dois alunos de uma turma:

1) Para ser representante e vice representante, respectivamente dessa turma. A ordem de escolha (representante, vice) configura um conjunto diferente, portanto, devemos calcular as duplas utilizando o PFC.

2) Para representar a escola em um evento. Nesse caso, independentemente da ordem de escolha, a dupla será a mesma, e assim, devemos calcular as duplas utilizando a combinação simples.

5º exemplo: Deseja-se montar um campeonato com 4 times com um único turno, ou seja, os times irão se enfrentar uma única vez. Quantas partidas serão necessárias?.

Solução: São 4 objetos tomados dois a dois (uma partida é formada por dois times). Assim, são:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6\ partidas.$$

Listando as partidas utilizando A, B, C e D como os nomes dos times, temos

A x B, A x C, A x D, B x C, B x D, C x D (total de 6 partidas).

Outra solução: Uma partida é composta pelo 1º time x 2º time. Para o 1º time, existem 4 possibilidades e, para o segundo time, 3 possibilidades. Assim, pelo PFC, são $4 \times 3 = 12$ jogos. No entanto, nesses jogos estão computados os dois turnos, com A x B (jogo de ida) e B x A (jogo de volta). Dividindo por 2, obtemos: $\frac{12}{2} = 6$ partidas.

6º exemplo: Em uma sala há 8 cadeiras e 4 pessoas. De quantos modos distintos essas pessoas podem se sentar?

Solução: Como a ordem das pessoas sentadas nas cadeiras trata-se de um modo distinto, devemos utilizar o PFC. A 1ª pessoa possui 8 opções de cadeiras para se sentar, a 2ª pessoa possui 7 opções, a 3ª pessoa possui 6 opções e a 4ª pessoa possui 5 opções. Então, existem $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$ modos possíveis de arranjar as pessoas nas cadeiras.

Outra solução: Usar a combinação simples $\binom{8}{4} = 70$ e multiplicar pelas permutações entre as 4 pessoas (4!), pois para cada ordem temos um modo distinto:

$$70.\ 4! = 70.4.3.2.1 = 1680 \text{ modos.}$$

7º exemplo: Um grupo consta de 6 pessoas, das quais 2 são matemáticos. Quantas comissões de 3 pessoas podem ser formadas, de modo que:

a) Nenhum membro seja matemático?
b) Todos os matemáticos participem da comissão?
c) Haja exatamente um matemático na comissão?
d) Pelo menos um membro da comissão seja matemático?

Solução:

a) Para que nenhum membro seja matemático é preciso retirar os matemáticos do grupo das 6 pessoas e combinar os restantes: $\binom{4}{3} = 4$ comissões.

b) Como todos os matemáticos participam da comissão, então sobra uma vaga apenas a ser preenchida: $\binom{4}{1} = 4$ comissões.

c) Já que na comissão precisa ter exatamente um matemático, escolheremos ele primeiro. E isso pode ser feito de $\binom{2}{1}$ modos. Os dois demais lugares, precisam ser

preenchidos entre os quatro que não são matemáticos: $\binom{4}{2}$. Dessa forma: $\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 2.6 = 12$ comissões.

d) Comissões com um matemático: $\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{2} = 2.6 = 12$ comissões. Com dois matemáticos: $\binom{2}{2} \cdot \binom{4}{1} = 1.4 = 4$ comissões. Total: $12 + 4 = 16$ comissões.

Outra solução: Subtrair do total, as comissões em que nenhum membro é matemático.

Resposta: $\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{total de comissões}} - \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{Calculado na letra a)}} = 20 - 4 = 16$ comissões.

8º exemplo: Em uma urna existem 12 bolas, das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais 2 são brancas?

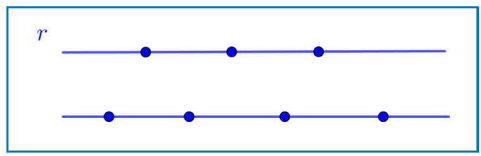
Solução: Vamos escolher primeiro as duas bolas brancas entre as cinco existentes, o que pode ser feito de $\binom{5}{2}$ modos. Em seguida, escolher as outras quatro bolas entre as pretas (já que precisamos ter exatamente duas brancas), o que pode ser feito de $\binom{7}{4}$ modos. Resposta: $\binom{5}{2}.\binom{7}{4} = 350$ modos.

9º exemplo: (PUC-RS) Marcam-se 3 pontos sobre uma reta r e 4 pontos sobre outra reta paralela a r. O número de triângulos que existem, com vértices nesses pontos, é:

a) 60 b) 35 c) 30 d) 9 e) 7

Solução:

Vamos dividir os triângulos formados em dois tipos: o 1º tipo são triângulos formados com dois pontos de r e um não. O que pode ser construído de $\binom{3}{2}.\binom{4}{1} = 3.4 = 12$ modos.



O 2º tipo são triângulos formados com um ponto de r e dois não, o que pode ser construído de $\binom{3}{1}.\binom{4}{2} = 3 . 6 = 18$ modos.

Assim, são: $12+18 = 30$ triângulos (letra c).

10º exemplo: Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?

Solução: Temos total de $\binom{9}{5} = 126$ comissões.

As comissões com um homem exatamente, são $\binom{5}{1}.\binom{4}{4} = 5$. As comissões com exatamente dois homens são $\binom{5}{2}.\binom{4}{3} = 40$. Então, a quantidade de comissões que possuem ao menos três homens é : $126 - 5 - 40 = 81$ comissões.

Outra solução: Há comissões com 3 homens e 2 mulheres, 4 homens e 1 mulher e 5 homens. A resposta é: $\binom{5}{3}.\binom{4}{2} + \binom{5}{4}.\binom{4}{1} + \binom{5}{5}.\binom{4}{0} = 10.6 + 5.4 + 1 = 81$ comissões.

EXERCÍCIOS 15.5

1)Calcule:

a) $\binom{5}{4}$ d) $C_{6,3}$ g) $\binom{8}{4}$

b) $\binom{11}{10}$ e) $\binom{99}{0}$ h) $\binom{20}{19}$

c) $\binom{1000}{1000}$ f) $\binom{7}{2}$ i) $\binom{a+1}{a}$

2)Resolva a equação: $\binom{x}{3} = 35$.

3) De um baralho de 52 cartas, são extraídas 3 cartas concomitantemente. Qual o número de resultados possíveis?

4) Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de 4 pessoas podem ser formadas?

5) Doze clubes de futebol pretende disputar um campeonato em único turno. Quantos jogos serão realizados?

6)Um fazendeiro pretende contratar uma dupla: agricultor e ajudante, para realizar um trabalho em sua fazenda. Compareceram para a seleção, seis agricultores e quatro ajudantes.

a)Quantas duplas diferentes é possível formar, sendo um agricultor e um ajudante?

b)Quantas duplas diferentes é possível formar, podendo ser dois agricultores, ou dois ajudantes ou ainda, um agricultor e um ajudante?

7)Uma turma possui 25 alunos e 3 professores. Quantas formas diferentes podemos formar um grupo de 10 alunos e um professor?

8)Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, contendo no mínimo um diretor?

9)Uma empresa tem 20 formas diferentes de montar uma comissão com 3 funcionários para uma viagem de negócios. Quantos funcionários possui essa empresa?

10) (UNITAU) O número de maneiras que se pode escolher uma comissão de três elementos num conjunto de dez pessoas é:

a) 120. b) 210. c) 102. d) 220. e) 110.

11) (UFU) Para participar de um campeonato de Futsal, um técnico dispõe de 3 goleiros, 3 defensores, 6 alas e 4 atacantes. Sabendo-se que sua equipe sempre jogará com 1 goleiro, 1 defensor, 2 alas e 1 atacante, quantos times diferentes o técnico poderá montar?

a) 216 b) 432 c) 480 d) 540

12) (PUC-SP) De um grupo de 9 professores, 5 lecionam matemática. Quantas comissões de 3 componentes podem ser formadas, de modo que em cada uma compareça pelo menos um professor de matemática?

a) 80 b) 79 c) 84 d) 83 e) n.d.a.

13)Um jogo de loteria denominado de "mega sena" consiste em marcar de 6 a 15 dezenas em um cartão com 60 números.

a) Quantas apostas são possíveis para um jogo com 6 números apenas?

b) Um jogador que marca apenas 6 números em sua aposta, paga R$ 3,50. Quanto deverá pagar um jogador que marcar 7 números?

14)(ENEM) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo. O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

a) $\frac{62^6}{10^6}$ b) $\frac{62!}{10!}$ c) $\frac{62!4!}{10!56!}$ d) $62! - 10!$ e) $62^6 - 10^6$

15) (UDESC) O valor de n, para que o número de combinações de n elementos tomados dois a dois seja igual ao número de combinações de n elementos tomados quatro a quatro é:

a) 4 b) 7 c) 5 d) 8 e)6

16)Uma empresa especializada em adubos, possui cinco nutrientes à vontade para formulações.

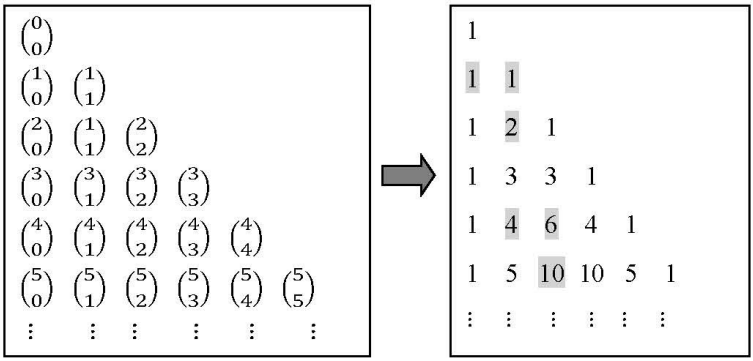
a) Se em cada adubo deve ter exatamente dois desses nutrientes, quantos adubos diferentes é possível formular?

b) Se em cada adubo deve ter ao menos um desses nutrientes, quantos adubos diferentes é possível formular?

17)Suponha que a mesma empresa especializada em adubos da questão anterior, possua agora, 100 nutrientes à vontade para formulações. Quantos adubos diferentes é possível formular, se em cada adubo deve ter ao menos um desses nutrientes? Dica: Use o teorema das linhas – teorema 15.2.1 – a seguir.

15.2. Triângulo aritmético e binômio de Newton

O triângulo aritmético ou triângulo de Tartaglia[9] - Pascal[10] é o nome atribuído ao números binomiais $\binom{n}{r}$ dispostos em forma ordenada e triangular, em que os números binomiais de mesmo n são colocados na mesma linha e os números binomiais de mesmo r são colocados na mesma coluna, conforme a seguir.



Essa forma de disposição dos números binomiais nos permite visualizar algumas propriedades e teoremas importantes.

1ª Propriedade (Relação de Stifel[11]): $\boxed{\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}}$.

Em outras palavras: A soma de qualquer número do triângulo aritmético, pelo número imediatamente ao seu lado direito, é igual ao número que está embaixo à direita.

Demonstração: Seja um conjunto com n elementos: $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$.

O total de subconjuntos em que o elemento a_1 não está presente é $\binom{n-1}{r}$ e o total de subconjuntos em que o elemento a_1 está presente é $\binom{n-1}{r-1}$. Isso nos dá o total de subconjuntos $\binom{n}{r}$. Então

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}.$$

Fazendo $n = n+1$ e $r = r+1$, encontramos: $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r}$.

2ª Propriedade (combinações complementares): $\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}}$.

[9] Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557).
[10] Blaise Pascal (1623-1662).
[11] Michael Stifel (1487-1567).

Essa propriedade nos diz que, em qualquer linha, dois números binomiais equidistantes dos extremos, são iguais.

Para demonstrar essa propriedade basta desenvolver ambos os lados da igualdade.

Teorema 15.2.1 (Teorema das linhas): A soma dos elementos de uma linha é igual a 2^n.

Demonstração: Sabemos, da unidade 1, que o total de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n. No entanto, esse total de subconjuntos também pode ser calculado utilizando combinação simples:

$$\underbrace{\binom{n}{0}}_{\text{Conjunto vazio}} + \underbrace{\binom{n}{1}}_{\substack{\text{Número de subconjuntos}\\ \text{tomados 1 a 1}}} + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\substack{\text{Número de subconjuntos}\\ \text{tomados 2 a 2}}} + \underbrace{\binom{n}{3}}_{\substack{\text{Número de subconjuntos}\\ \text{tomados 3 a 3}}} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Exemplo: A soma dos números da linha 4 do triângulo aritmético em que n = 3 é 1+3+3+1 = 8 o que equivale a 2^3.

Outra relação importante é a do triângulo aritmético com o binômio $(a+b)^n$, denominado **binômio de Newton**[12].

Cada número do triângulo representa um coeficiente do binômio:

$(a+b)^n \Rightarrow$ para $n = 0 \Rightarrow (a+b)^0 \Rightarrow 1 \Rightarrow$ 1ª linha.

$(a+b)^n \Rightarrow$ para $n = 1 \Rightarrow (a+b)^1 \Rightarrow 1a + 1b \Rightarrow$ 2ª linha.

$(a+b)^n \Rightarrow$ para $n = 2 \Rightarrow (a+b)^2 \Rightarrow 1a^2 + 2.a.b + 1b^2 \Rightarrow$ 3ª linha.

$(a+b)^n \Rightarrow$ para $n = 3 \Rightarrow (a+b)^3 \Rightarrow 1a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + 1b^3 \Rightarrow$ 4ª linha (...).

Generalizando, essa é a fórmula do binômio de Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \binom{n}{n}a^0 b^n$$

O binômio de Newton é uma forma alternativa de desenvolver o binômio $(a+b)^n$ utilizando os números binominais.

Exemplo: Desenvolver $(x+3)^4$ utilizando o binômio de Newton.

Solução:

$$(x+3)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}x^4 3^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}x^{4-1}3^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}x^{4-2}3^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}x^{4-3}3^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}a^0 3^4 \Rightarrow$$

$$(x+3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81.$$

É interessante observar que ao fazer $a = 1$ e $b = 1$ no binômio de Newton, obtém-se o teorema das linhas:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} + \cdots \binom{n}{n} = 2^n.$$

[12] Isaac Newton (1642-1727).

15.3. Probabilidade

15.3.1. Definições

Ao lançarmos uma moeda ao chão para observarmos a face que ficou para cima, o resultado é imprevisível, mas sabemos que tanto pode ser cara quanto pode ser coroa, ou seja, há dois casos possíveis de ocorrer: {cara, coroa}.

Ao lançarmos um dado, o resultado a ser obtido é ainda mais imprevisível, pois passa a existir 6 possibilidades: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

E ao escolhermos em uma urna, uma bola entre 10 bolas numeradas de 1 a 10, o número da bola escolhida é mais ainda imprevisível, visto que, passam a existir 10 resultados possíveis: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Esses e outros experimentos que podem apresentar resultados diferentes a cada ocorrência, recebe o nome de **experimento aleatório**.

Os conjuntos {cara, coroa}, {1, 2, 3, 4, 5, 6} e {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} são denominados de **espaço amostral**. Quando no espaço amostral todos os seus elementos possuem a mesma possibilidade de acontecer, esse espaço amostral é denominado de **equiprovável** (ou equiprobalístico)**.**

Qualquer um dos subconjuntos do espaço amostral é chamado de **evento.** Por exemplo, a possibilidade de dar coroa no lançamento de uma moeda é representada pelo evento $A = \{coroa\}$ do espaço amostral $\Omega = \{cara, coroa\}$.

É claro que diante dos exemplos anteriores, é bem mais fácil acertar, em um palpite, o resultado do lançamento da moeda, que pode ser apenas cara ou coroa, do que acertar o resultado dos dados ou das bolas enumeradas. Mas, é mais fácil quanto? Essa quantificação é medida pela probabilidade.

Probabilidade é uma medida que quantifica, em valores ou percentuais, a certeza de um acontecimento provável frente ao demais.

Para um espaço amostral equiprovável:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{Número de elementos de um evento A}}{\text{Número de elementos do espaço amostral}}$$

De outra forma:

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos (possibilidades) favoráveis}}{\text{Número de casos(possibilidades) possíveis}}$$

Em que $P(A)$ é a probabilidade de um evento A ocorrer.

A probabilidade de um evento A ocorrer é sempre um número entre 0 e 1, isto é, $0 \leq P(A) \leq 1$. O que pode ser representado por porcentagem.

Quando $P(A) = 1$ (ou 100%) dizemos que esse evento é um **evento certo**.

Exemplo: Qual a probabilidade de ao lançar um dado, o resultado ser menor que 7?

Solução: Esse é um evento certo, portanto, a probabilidade é 100% (ou 1).

Quando $P(A) = 0$ (ou 0%) dizemos que esse evento é um **evento impossível**.

2º exemplo: Numa urna há 10 bolas numeradas de 1 à 10. Qual a probabilidade de tirarmos, sem olhar, uma bola com o número 11?

Solução: Esse evento é impossível, portanto, a probabilidade de ocorrer é 0%.

3º exemplo: No lançamento de um dado não viciado[13], qual a probabilidade do resultado ser 2 ou 6? E qual a probabilidade de não ser 2 ou 6?

Solução: $A = \{2, 6\}$ e $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

Resposta: A probabilidade é de 33,33% para que o resultado seja 2 ou 6.

A probabilidade de não ser 2 ou 6 é $\overline{A} = \{1, 3, 4, 5\}$ e $(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Logo,

$$P(\overline{A}) = \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots$$

Resposta: A probabilidade é de 66,67% para que o resultado não seja 2 ou 6.

$P(\overline{A})$ é chamado de evento complementar de A em relação a Ω, ou seja, é a probabilidade do evento A não ocorrer. E é notadamente calculado por:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Poderíamos ter calculado $P(\overline{A})$ no exemplo anterior da seguinte forma

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ ou\ 0{,}666\ldots ou\ 66{,}67\%.$$

4º exemplo: João apostou com Pedro, que ao lançar uma moeda três vezes, encontraria como resultado duas caras e uma coroa. Pedro apostou que isso não irá ocorrer. Quem tem mais chances de ganhar a aposta?

Solução: Vamos listar os resultados possíveis, fazendo C para coroa e K para cara: {(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (K, C, C), (C, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (C, C, C)} ⇒ total de 8.

Listando os resultados favoráveis à João: {(C, K, K), (K, C, K), (K, K, C)} ⇒ total de 3.

$$P(\text{João ganhar}) = \frac{\text{Número de casos (possibilidades) favoráveis}}{\text{Número de casos(possibilidades) possíveis}} = \frac{3}{8} \text{ ou } 37{,}5\%.$$

$$P(\text{João perder ou Pedro ganhar}) = 1 - P(\text{João ganhar}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \text{ ou } 62{,}5\%.$$

Desse modo, João tem mais chances de ganhar.

[13] Um objeto "não viciado" é um objeto honesto (perfeito), que não possui tendência ou preferência por qualquer evento, ou seja, todos os eventos têm a mesma chance de ocorrer (espaço equiprovável). Todos os objetos utilizados nos exemplos e exercícios terão essa propriedade, mesmo sem mencionar.

Na maioria dos casos não é viável (ou impossível) listar ou enumerar todos os casos possíveis e favoráveis. Imagine a situação do exemplo anterior com uma moeda lançada 100 vezes, por exemplo.

Nesses casos, sugerimos sempre utilizar o princípio fundamental da contagem PFC, a permutação (simples ou circular) ou a combinação simples, para calcular os casos possíveis e os casos prováveis. Claro que a ferramenta a ser utilizada depende do contexto da questão.

Vamos resolver a questão anterior sem listar os resultados possíveis e favoráveis.

Outra solução:

Uma moeda é lançada três vezes. O número de possibilidades para o primeiro lançamento é 2 (cara ou coroa), e o mesmo se aplica ao segundo e ao terceiro. Portanto, pelo PFC, temos: $2.2.2 = 8$ possibilidades (casos) possíveis.

Para os casos favoráveis podemos usar a "ideia" de permutação de anagramas com letras repetidas: $(K, K, C) = \frac{3!}{2!} = 3$. Dessa forma,

$$P(\text{João ganhar}) = \frac{\text{Número de casos (possibilidades) favoráveis}}{\text{Número de casos(possibilidades) possíveis}} = \frac{3}{8} \text{ ou } 37{,}5\%.$$

$$P(\text{João perder ou Pedro ganhar}) = 1 - P(\text{João ganhar}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \textit{ ou } 62{,}5\%.$$

5º exemplo: Quais dos espaços amostrais abaixo são equiprováveis?

a) $\Omega = \{1, 3, 6, 9\} \Rightarrow$ Sim.

b) $\Omega = \{5, 5, 5, 5{,}2\} \Rightarrow$ Não, a probabilidade de ocorrer o 5 é maior que o 2.

c) $\Omega = \{7,7,5,5,1,1\} \Rightarrow$ Sim, embora repetidos o 7, 5 , e o 1, possuem probabilidades iguais.

d) $\Omega = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow$ Sim.

e) $\Omega = \{\text{leste, oeste, sul, norte}\} \Rightarrow$ Sim.

6º exemplo: Num baralho de 52 cartas, duas são escolhidas sem reposição. Qual a probabilidade de ambas serem de espadas?

Solução: Há 52 formas de escolher a primeira carta, 51 formas (já que é sem reposição) de retirar a segunda carta e, de acordo com o PFC,

$$n(\Omega) = 51.52 = 2652 \text{ (casos possíveis).}$$

Para os casos favoráveis, devemos pensar nas 13 cartas de espadas do baralho. Para a primeira carta, há 13 formas de escolher e para a segunda carta, 12 formas (já que é sem reposição). Consoante ao PFC, encontramos: $13.12 = 156$ casos favoráveis.

Portanto, $P(A) = \frac{156}{2652} = \frac{1}{17}$.

Alternativamente, podemos utilizar a combinação simples para calcular os casos favoráveis e possíveis, o que resulta em $P(A) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{17}$.

7º exemplo: Numa loteria com números de 1 à 60, ganha o prêmio máximo quem acertar os 6 números escolhidos. Qual a probabilidade de uma pessoa ganhar o prêmio máximo?

Solução: As ordens dos números sorteados não alteram o resultado; portanto, trata-se de uma combinação simples.

$$\binom{60}{6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60.59.58.57.56.55.54!}{6.5.4.3.2.1.54!} = \frac{36045979200}{720} = 50.053.860.$$

São cinquenta milhões, sessenta e três mil, oitocentos e sessenta combinações possíveis de 6 números. O ganhador precisa acertar uma combinação entre essas, o que corresponde a uma probabilidade de

$$P(A) = \frac{1}{50.063.860} = 0{,}000001997448858316\%.$$

Por esse motivo, é muito difícil "ganhar" nesse tipo de loteria. Veja um bilhete de apostas denominada "Mega-Sena" aqui no Brasil e confirme no seu verso essa probabilidade calculada.

8º exemplo: Num grupo de 23 pessoas qual a probabilidade de pelo menos duas pessoas nascerem no mesmo dia?

Solução: A melhor estratégia para a solução dessa caso é calcular a probabilidade de ninguém ter nascido no mesmo dia e, em seguida, usar $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Para os cálculos, usaremos um ano comum de 365 dias.

Os casos favoráveis são os seguintes:

– A 1ª pessoa tem 365 possibilidades de dias para nascer;

– A 2ª pessoa: 364 possibilidades (já que não pode ter nascido no mesmo dia da 1ª pessoa);

– A 3ª pessoa: 363 possibilidades (já que não pode ter nascido no mesmo dia da 1ª e 2ª pessoa; e assim sucessivamente;

– A 23ª pessoa tem 343 possibilidades.

Então, os casos favoráveis são: 365.364.363...343.

Os casos possíveis são: Todos podem nascer no mesmo dia ou em dias diferentes, sendo portanto,

$365.365.365...365 = 365^{23}$ casos possíveis.

Com isso, a probabilidade de ninguém ter nascido no mesmo dia é

$$P(\overline{A}) = \frac{365.364.363 \ldots 343}{365^{23}} = 0{,}493 = 49{,}3\%.$$

E a probabilidade de pelo menos duas pessoas nascerem no mesmo dia é

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}493 \Rightarrow \boxed{P(A) = 50{,}7\%}.$$

Logo, é mais provável que, em um grupo de 23 pessoas, pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia, do que não existir tal coincidência. Interessante mencionar que, em um grupo de 50 pessoas, a probabilidade disso ocorrer é de 97% (quase certeza).

EXERCÍCIOS 15.6

1)Em uma urna estão os nomes de 20 pessoas que irão participar de uma brincadeira chamada "amigo oculto", em que cada pessoa retira da urna o nome da pessoa que irá presentear. Qual a probabilidade de uma pessoa tirar o próprio nome?

2)Em um jogo tradicional de par ou ímpar entre duas pessoas, são válidos os resultados: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Explique porquê excluindo o resultado zero desse jogo, o mesmo deixa de ser equiprovável.

3)Jogando dois dados concomitantemente, os resultados possíveis são: {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

a)Explique por que a probabilidade de alguém acertar qualquer um desses resultados não é 1/11.

b)Calcule a probabilidade do resultado ser 7.

c)Calcule a probabilidade do resultado ser 2.

d)Calcule a probabilidade do resultado ser 13?

e)Calcule a probabilidade do resultado ser um número ímpar?

4)Em uma urna existem 2 bolas vermelhas e 4 brancas.

a) Sorteando-se uma bola, qual a probabilidade dela ser branca?

b) Sorteando-se duas bolas, qual a probabilidade de ambas serem vermelhas?

5)Uma moeda é lançada três vezes.

a)Qual a probabilidade de se obter três coroas?

b)Qual a probabilidade de se obter duas coroas e uma cara?

c)Qual a probabilidade de se obter duas caras consecutivas?

6)De um baralho de 52 cartas, duas são extraídas ao acaso. Qual a probabilidade delas serem dois reis ou dois valetes?

7)Em uma urna existem 60 bolas numeradas de 1 a 60. Ao sortear uma bola, qual a probabilidade:

a)de ser um número par?

b)de ser um número múltiplo de 5?

c)de ser um número primo?

8)(UEL-PR) Um dado não viciado foi lançado duas vezes e em cada uma delas o resultado foi anotado. Qual é probabilidade de a soma dos números anotados ser maior ou igual a 7?

9)Uma urna contém 4 bolas pretas, 2 bolas brancas e 3 amarelas. Três bolas

são escolhidas ao acaso. Qual a probabilidade da escolha conter uma bola de cada cor?

10)10 alunos, entre eles João e Maria, resolvem ao acaso, ficar em fila para o recebimento do lanche na escola. Qual a probabilidade de João e Maria ficarem juntos?

11)A chance de uma pessoa ser atingida diretamente por um raio é muito baixa, sendo em média menor do que um para um milhão. Contudo, se a pessoa estiver numa área descampada em baixo de uma tempestade forte esta chance pode aumentar em até um para mil. Entretanto, não é a incidência direta do raio a maior causadora de mortes e ferimentos. Geralmente isso acontece por efeitos indiretos associados a incidências próximas ou efeitos secundários dos raios. As descargas também provocam incêndios ou queda de linhas de energia, o que pode atingir uma pessoa.

Disponível em: (http://www.inpe.br/webelat/homepage/menu/el.atm/perguntas.e.respostas.php) acessado em 09/07/2013 (adaptado).

Baseado nas informações contidas no texto acima, a probabilidade de uma pessoa ser atingida por um raio quando estiver numa área descampada em baixo de uma tempestade forte é a mesma de:

a) dar duas caras no lançamento de dois dados;
b) acertar 10 números entre dez mil;
c) acertar um número em um milhão;
d) acertar o dia de nascimento de uma pessoa;

12) (PUC RJ) Em uma amostra de 20 peças, existem 4 defeituosas. Retirando-se ao acaso, sem reposição, 3 peças, qual a probabilidade de todas as 3 serem perfeitas?

13)(UFPA) As últimas eleições têm surpreendido os institutos de pesquisa, principalmente quando dois candidatos se encontram empatados tecnicamente. Tentando entender essa questão, um estudante investigou a opção de votos de seus colegas de classe e verificou que, dos 30 investigados, 15 votaram no candidato A e 15 votaram no candidato B. Fez-se, então, a seguinte consideração: se o instituto de pesquisa fizesse uma sondagem, consultando apenas 4 alunos aleatoriamente, a probabilidade de o instituto acertar o resultado da eleição na sala, por meio dessa amostra, seria de, aproximadamente:

a)27% b) 40% c) 50% d) 78% e) 92%

14)(UNIFESP)Três dados honestos são lançados. A probabilidade de que os três números sorteados possam ser posicionados para formar progressões aritméticas de razão 1 ou 2 é :

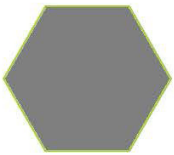
a) 1/36 b) 1/9 c) 1/6 d) 7/36 e) 5/18

15)(ENEM) Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante 3 fichas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R$ 200,00.

I – A probabilidade de o participante não ganhar nenhum prêmio é igual a:
a) 0 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/2 e) 1/6

II – A probabilidade de o participante ganhar exatamente o valor de R$ 400,00 é igual a:
a) 0 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) 1/6

16)Considere que três vértices de um hexágono regular sejam escolhidos aleatoriamente. Qual a probabilidade de que esses vértices formem um triângulo equilátero?



17)O jogo da memória é um clássico jogo formado por peças que apresentam uma figura em um dos lados. Cada figura se repete em duas peças diferentes. Para começar o jogo, as peças são postas com as figuras voltadas para baixo, para que não possam ser vistas. Cada participante deve, na sua vez, virar duas peças e deixar que todos as vejam. Caso as figuras sejam iguais, o participante deve recolher consigo esse par e jogar novamente. Se forem peças diferentes, estas devem ser viradas novamente, e sendo passada a vez ao participante seguinte. Ganha o jogo quem tiver mais pares no final do jogo.



Fonte adaptada: (WIKIPÉDIA, 2019)

Qual a probabilidade do participante que irá iniciar o jogo formar um par na primeira tentativa?

18)(ENEM)Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emílio Ribas, de São Paulo, a imunização "deve mudar", no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

a)8%.
b)9%.
c)11%.
d)12%.
e)22%.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: http://img.terra.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado). (Foto: Reprodução/Enem)

19)(ENEM) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1.132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

(Disponível em: http:www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010)

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

a) 63,31% b) 60,18% c) 56,52% d) 49,96% e) 43,27%

20)(ENEM) Uma empresa sorteia prêmios entre os funcionários como reconhecimento pelo tempo trabalhado. A tabela mostra a distribuição de frequência de 20 empregados dessa empresa que têm de 25 a 35 anos trabalhados. A empresa sorteou, entre esses empregados, uma viagem de uma semana, sendo dois deles escolhidos aleatoriamente.

Qual a probabilidade de que ambos os sorteados tenham 34 anos de trabalho?

a)1/20
b)1/19
c)1/16
d)2/20
e)5/20

Tempo de serviço	Número de empregados
25	4
27	1
29	2
30	2
32	3
34	5
35	3

21)Uma prova contém 10 questões. Cada questão contém 5 itens A, B, C, D e E. Sabendo que em cada questão há um único item correto:

a) Qual a probabilidade de um aluno que não estudou e marcou aleatoriamente os itens, acertar as 10 questões?

b) Qual a probabilidade de acertar exatamente 1 questão, um aluno que marcar o item C em todas.

15.3.2. Probabilidade da união de eventos

A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, isto é, de ocorrer o evento $A \cup B$, é igual à probabilidade de ocorrer o evento A adicionada a probabilidade de ocorrer o evento B, menos a probabilidade de ocorrer ambos os eventos, $A \cap B$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Demonstração: Na unidade 1, sobre noções de conjuntos, vimos que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Dividindo tudo pelo espaço amostral $n(\Omega)$, obtemos

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}.$$

Exemplo: Uma carta é extraída, ao caso, de um baralho de 52 cartas.

a) Qual a probabilidade de ser um ás ou ser do naipe de paus?

Solução: A probabilidade de ser um ás é: $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

A probabilidade de ser de paus é: $P(p) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

A probabilidade de ser ás e também ser de paus é: $P(A \cap p) = \frac{1}{52}$.

Substituindo em $P(A \cup p) = P(A) + P(p) - P(A \cap p)$, encontramos

$$P(A \cup p) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} \Rightarrow \boxed{P(A \cup p) = \frac{4}{13}}.$$

b) Qual a probabilidade de ser um ás ou um rei?

Solução: A probabilidade de ser um ás é: $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

A probabilidade de ser um rei é: $P(R) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

A probabilidade de ser ás e também ser um rei não existe: $P(A \cap R) = 0$.

Substituindo em $P(A \cup R) = P(A) + P(R) - P(A \cap R)$, encontramos

$$P(A \cup B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - 0 = \frac{2}{13}.$$

SAIBA MAIS!

Quando $P(A \cap B) = 0$, *dizemos que os eventos são* ***mutuamente exclusivos****. Nesse caso, tem-se:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

c) Qual a probabilidade de ser um rei, se alguém informar que é do naipe de copas?

Solução: $P(R) = \frac{1}{13}$.

As probabilidades calculadas nos itens a) e b) são denominadas de probabilidades ***a priori***, ou seja, calculadas antes que a experiência se realize. Enquanto, a probabilidade do item c), denomina-se probabilidade ***a posteriori***, solicitada após a constatação de que algum evento ocorreu ou não ocorreu, modificando, portanto, o seu resultado.

A seguir está um exemplo clássico de probabilidade *a posteriori*, ***o problema de Monty Hall***.

O problema de Monty Hall é um problema matemático que surgiu em um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado "Let's Make a Deal", exibido na década de 1970. O jogo consistia em o apresentador mostrar três portas ao jogador. Atrás de uma delas estava um prêmio (um carro) e, atrás das outras duas, dois bodes. No primeiro momento, o jogador escolhe uma das três portas (que ainda não é aberta). Uma vez escolhida a porta, o apresentador que sabe onde está o prêmio (o carro), abre um das outras duas portas que o jogador não escolheu, revelando um bode. Após esse momento, o apresentador pergunta se o jogador pretende continuar com a mesma porta escolhida inicialmente, ou se deseja mudar para outra porta.

Qual das duas opções o jogador tem maior probabilidade de ganhar o prêmio?

Solução: Inicialmente, qualquer uma das três portas tem a mesma probabilidade a priori de conter o prêmio, ou seja, 1/3. Após a revelação de uma porta, onde está um bode, a probabilidade (a posteriori) de acertar a porta foi modificada, restando-nos analisar as possibilidades:

1ª possibilidade: Inicialmente o jogador escolheu a porta onde está o prêmio.



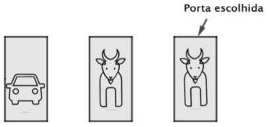
Nesse caso, como o apresentador irá mostrar um dos bodes, mudar de porta ocasionaria perda do prêmio.

2ª possibilidade: Inicialmente o jogador escolheu a primeira das portas onde está um bode.



Nesse caso, o apresentador irá mostrar a outra porta com um dos bodes, e o jogador ao mudar de porta, ganhará o prêmio.

3ª possibilidade: O jogador escolheu a segunda das portas onde está um bode.



Também nesse caso, se o jogador mudar de porta ganha o prêmio.

Resposta: o jogador terá maior probabilidade de ganhar o prêmio se mudar de porta.

Outro exemplo de probabilidade *a posteriori* é a probabilidade condicional a seguir.

15.3.3. Probabilidade condicional

Exemplo: O resultado de uma pesquisa de acesso ao nível superior em ciências agrárias a partir do sexo e da modalidade de ensino, estão na tabela a seguir.

Ensino médio \ sexo	Masculino	Feminino	Total
Técnico	35	15	50
Regular	20	5	25
Total	55	20	75

Se um desses alunos é selecionado ao acaso:

a) Qual a probabilidade de que esse aluno seja do sexo masculino?

Solução: $P(M) = \frac{55}{75} = \frac{11}{15}$ ou 73,33 %.

b) Qual a probabilidade de que esse aluno seja do sexo masculino, sabendo que ele cursou o ensino médio técnico?

Solução: Nesse caso, o espaço amostral passa a ser 50, uma vez que a probabilidade deve ser calculada na certeza (ou na condição) de que ele cursou o ensino médio técnico. Assim:

$P(M|T) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$ ou 70 %.

Usou-se $P(M|T)$ para representar a probabilidade de ser masculino na certeza de que cursou o ensino médio técnico.

Denominamos essa probabilidade (do item b) de probabilidade condicional de M na certeza de T. Essa probabilidade foi calculada utilizando $P(M|T) = \frac{n(M \cap T)}{n(T)}$. Porém, podemos calculá-la dividindo ambos os eventos pelo espaço amostral geral, veja:

$$P(M|T) = \frac{\frac{n(M \cap T)}{n(total)}}{\frac{n(T)}{n(total)}} \Rightarrow \boxed{P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}}$$

Onde $n(total)$ é o espaço amostral.

Assim, podemos calcular $P(M|T)$ do exemplo anterior utilizando as probabilidades $P(M \cap T)$ e $P(T)$, da seguinte forma:

$$\left.\begin{array}{l} P(M \cap T) = \frac{35}{75} = \frac{7}{15}. \\ P(T) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}. \end{array}\right\} \quad P(M|T) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{21}{30} = 70\%.$$

Raramente utilizamos a fórmula acima da forma como está. Normalmente, utilizamos as informações para encontrar a interseção dessas probabilidades

$$P(M \cap T) = P(M|T).P(T).$$

Nesse contexto, considere dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral. A probabilidade de ocorrer o evento B condicionado ao fato de o evento A ter ocorrido (ou B na certeza de A) é indicada por $P(B|A)$ e dada por:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

2º exemplo: Uma caixa contém 5 bolas brancas, 3 bolas pretas e 2 bolas vermelhas. Serão retiradas, de modo aleatório, duas bolas da caixa, sucessivamente e sem reposição.

a) Qual a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda vermelha?

Solução: A probabilidade da primeira bola ser branca é: $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

A probabilidade da segunda bola ser vermelha, na certeza que é a primeira é branca, é: $P(V|B) = \frac{2}{9}$. Assim,

$$P(B \cap V) = P(B).P(V|B) = \frac{1}{2}.\frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

Agora, resolva esse mesmo item, sem usar a probabilidade condicional.

b) Qual a probabilidade de que ambas as bolas sejam de mesma cor?

Solução: A probabilidade das duas boas serem brancas é

$$P(B \cap B) = P(B).P(B|B) = \frac{5}{10}.\frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

A probabilidade das duas boas serem pretas é

$$P(P \cap P) = P(P).P(P|P) = \frac{3}{10}.\frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

A probabilidade das duas boas serem vermelhas é

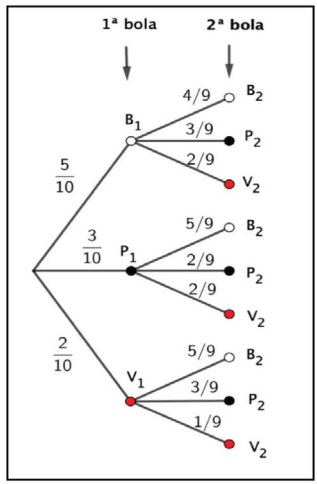
$$P(V \cap V) = P(V).P(V|V) = \frac{2}{10}.\frac{1}{9} = \frac{1}{45}.$$

A probabilidade total é dada pela somas das probabilidades:

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} = \frac{10+3+1}{45} = \frac{14}{45}.$$

c) Construa a árvore das probabilidades.

Solução: A árvore das probabilidades consiste em um diagrama onde dispomos as probabilidades condicionais nas extremidade de cada galho (caminho) na certeza que a origem do galho ocorreu. Veja a árvore construída na figura ao lado, a partir dos dados desse exemplo.



Para calcular uma probabilidade, basta multiplicar as probabilidades de cada caminho e somar os produtos ao longo de vários caminhos. Alguns exemplos:

– A probabilidade da primeira bola ser branca e a segunda ser vermelha é

$$P(B_1 \cap V_2) = \frac{5}{10}.\frac{2}{9} = \frac{1}{9} \ (\textit{Siga o caminho } B_1 \rightarrow V_2).$$

– A probabilidade da segunda bola ser branca é

$$\frac{5}{10}.\frac{4}{9} + \frac{3}{10}.\frac{5}{9} + \frac{2}{10}.\frac{5}{9} = \frac{20+15+10}{90} = \frac{1}{2}.$$

Siga os caminhos que terminam em B_2.

d) Qual a probabilidade da primeira bola ser branca na certeza que a segunda é preta?

Solução: Observe que essa é uma probabilidade no passado na certeza de um futuro. Neste caso, devemos utilizar a fórmula

$$P(B_1|P_2) = \frac{P(B_1 \cap P_2)}{P(P_2)}.$$

De acordo com a árvore, dispomos de

$$P(B_1 \cap P_2) = \frac{5}{10}.\frac{3}{9} = \frac{1}{6}.$$

$$P(P_2) = \frac{5}{10}.\frac{3}{9} + \frac{3}{10}.\frac{2}{9} + \frac{2}{10}.\frac{3}{9} = \frac{15+6+6}{90} = \frac{27}{90} = \frac{3}{10}$$

Logo,

$$P(B_1|P_2) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{10}} = \frac{10}{18} \Rightarrow \boxed{P(B_1|P_2) = \frac{5}{9}}.$$

Em alguns casos, é possível que um evento B ocorra, independentemente de um evento A ocorrer. Nesse caso, dizemos que os eventos A e B são independentes e $P(B|A) = P(B)$, resultando em $P(A \cap B) = \underbrace{P(B|A)}_{P(B)}.P(A) = P(B).P(A)$. Consoante ao teorema a seguir.

Teorema 15.3.3.1: Dois eventos A e B são chamados de independentes se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

A recíproca desse teorema e sua extensão a três ou mais eventos, é evidente.

3º exemplo: Dois atletas de basquete praticam lances livres. Em um único lance, o atleta A tem probabilidade de 25% de acertar a cesta, enquanto o atleta B, mais experiente, tem 75% de probabilidade de acertá-la.

a) Qual a probabilidade de ambos acertarem a cesta?

Solução: Admitindo eventos independentes, podemos fazer

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

b) Qual a probabilidade de ao menos um acertar a cesta?

Solução:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{4+12-3}{16} = \frac{13}{16}.$$

c) Qual a probabilidade de ninguém acertar a cesta?

Solução:

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16} \; ou \; P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{4}.\frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

EXERCÍCIOS 15.7

1)Em uma prova de Matemática realizada em uma sala de aula com 40 alunos, o professor constatou que 25 alunos acertaram a questão A, 20 alunos acertaram a questão B e 15 alunos acertaram ambas as questões. Sorteando ao acaso, um aluno, qual a probabilidade dele ter errado ambas as questões?

2)Em um espaço amostral, a probabilidade de ocorrer um evento A é 3/5, de ocorrer um evento B é 1/5 e de ocorrer ambos os eventos é 2/5. Qual a probabilidade de não ocorrer o evento A ou B?

3)Em um baralho comum de 52 cartas, uma carta é extraída aleatoriamente. Qual a probabilidade da carta:

a) ser um rei de ouro?
b) ser uma dama ou uma carta de copas?
c) não ser um valete e não ser de espadas?
d) ser de paus, na certeza de que não é um às?

4)(ESAF) Luís é prisioneiro do temível imperador Ivan. Ivan coloca Luís à frente de três portas e lhe diz: "Atrás de uma destas portas encontra-se uma barra de ouro, atrás de cada uma das outras, um tigre feroz. Eu sei onde cada um deles está. Podes escolher uma porta qualquer. Feita tua escolha, abrirei uma das portas, entre as que não escolheste, atrás da qual sei que se encontra um dos tigres, para que tu mesmo vejas uma das feras. Aí, se quiseres, poderás mudar a tua escolha". Luís, então, escolhe uma porta e o imperador abre uma das portas não-escolhidas por Luís e lhe mostra um tigre. Luís, após ver a fera, e aproveitando-se do que dissera o imperador, muda sua escolha e diz: "Temível imperador, não quero mais a porta que escolhi; quero, entre as duas portas que eu não havia escolhido, aquela que não abriste". A probabilidade de que, agora, nessa nova escolha, Luís tenha escolhido a porta que conduz à barra de ouro é igual a

a) 1/2. b) 1/3. c) 2/3. d) 2/5. e) 1.

5) O resultado de uma pesquisa sobre a preferência dos alunos para com duas disciplinas de um curso, estão na tabela a seguir.

Disciplina \ sexo	Masculino	Feminino	Total
Inglês	20	15	35
Química	15	10	25
Total	35	25	60

Um desses alunos é selecionado ao acaso.

a) Qual a probabilidade de que esse aluno seja do sexo masculino?

b) Qual a probabilidade de que esse aluno seja do sexo feminino, sabendo que ele tem preferência pela disciplina de Química?

6)Uma moeda é lançada três vezes.

a) Construa a árvore das probabilidades.

b) Qual a probabilidade de se obter três caras?

7) Considere as seguintes situações e os seguintes eventos.

Primeiro: Um dado é lançado duas vezes.

Evento A: {o resultado do primeiro lançamento é ímpar }. Evento B = {o resultado do segundo lançamento é par}.

Segundo: Uma moeda é lançada duas vezes.

Evento A: {o resultado do primeiro lançamento é cara }. Evento B = {o resultado do segundo lançamento é cara}.

Terceiro: Duas cartas são retiradas, sem reposição, de um baralho.

Evento A: {A primeira carta é um rei}. Evento B = {A segunda carta é de paus}.

Indique em qual(is) situação(ões) os eventos A e B são independentes.

8)Uma caixa contém 3 bolas brancas, 2 bolas pretas e 1 bola vermelha. Serão retiradas, de modo aleatório, duas bolas da caixa, sucessivamente e sem reposição.

a) Qual a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda ser vermelha?

b) Qual a probabilidade de que ambas as bolas sejam de mesma cor?

c) Construa a árvore das probabilidades.

d) Qual a probabilidade da primeira bola ser branca na certeza que a segunda é vermelha?

9)Dois jogadores de futebol A e B, tem aproveitamento de 60% e 40% dos pênaltis cobrados, respectivamente. Em uma única cobrança para cada jogador:

a) Qual a probabilidade de ambos converterem os pênaltis?

b) Qual a probabilidade de ao menos um converter?

c) Qual a probabilidade de ninguém converter?

10)Um jogador de futebol tem aproveitamento de 80% dos pênaltis cobrados. Considerando 3 cobranças:

a) Calcule a probabilidade dele converter os 3 pênaltis.

b) Calcule a probabilidade dele errar os 3 pênaltis.

c) Calcule a probabilidade dele converter 1 e errar 2 pênaltis.

11)(ENEM) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

a) $2.(0{,}2\%)^4$.

b) $4.(0{,}2\%)^4$.

c) $6.(0{,}2\%)^2.(99{,}8\%)^2$.

d) $4.(0{,}2\%)$.

e) $6.(0{,}2\%).(99{,}8\%)$.

12)(UPE) Carlos precisa fazer um teste psicotécnico para ocupar uma vaga em uma indústria de alimentos. O teste consta de 10 questões do tipo verdadeiro e falso. Carlos não se preparou para este teste e não sabe responder nenhuma pergunta, resolvendo chutar todas as questões. A probabilidade de Carlos acertar 5 questões é, aproximadamente, de

a) 24% b) 10% c)6% d)50% e)60%

CAPÍTULO

16

NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

16. NÚMEROS COMPLEXOS E POLINÔMIOS

Veremos nesta unidade, a história e o desenvolvimento da interessante teoria que envolve os números complexos e sua relação com os polinômios. A abordagem sobre esses conteúdos será restrita apenas a matemática pura, exatamente como se estuda no ensino médio. Quanto às aplicações, incluindo as ciências agrárias, podem ser apreciadas no volume 4 desta coleção, com o uso concomitante do cálculo diferencial integral.

16.1. Números complexos

Historicamente, os números complexos surgiram quando os matemáticos tentavam encontrar soluções para a equação do 3º grau na forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

A fórmula resolutiva para esse tipo de equação foi publicada pela primeira vez no livro "Ars Magna" (1545), do matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576). Eis a fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^3}}.$$

Após essa publicação e por muitos séculos, a fórmula acima ficou relacionada ao seu nome[14]. Entretanto, bem mais importante que a descoberta dessa fórmula para a matemática, foi a ideia proporcionada por ela.

Em algumas equações, a fórmula apresentava raízes quadradas negativas que eram inaceitáveis à época. A equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, por exemplo, tinha a seguinte solução acusada pela fórmula

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

O que se sabia de antemão era que $x = 4$ era solução da equação. A partir dessa informação outro matemático italiano Bombelli (1526-1572), passou operar livremente com raízes quadradas negativas e mostrou que

[14] Muito embora, o próprio Girolamo Cardano tenha dito que tal fórmula foi descoberta por Scipione del Ferro (1465-1526).

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.\left(\sqrt{-1}\right)^2.2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12.\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} =$$
$$2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}.$$

E que $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ apresentada pela fórmula é equivalente a $x = 2+\sqrt{-1} + 2-\sqrt{-1}$ obtendo assim, a solução $x = 4$ esperada.

A partir da solução encontrada por Bombelli, vários matemáticos passaram a utilizar $\sqrt{-1}$ como unidade imaginária i, base para o desenvolvimento de toda a teoria dos números complexos que veremos a seguir.

16.1.1. Forma algébrica

A representação algébrica de um número complexo é dada por $\boldsymbol{z = x + yi}$, onde o número real $\boldsymbol{x}$ é chamado de **parte real** de $\boldsymbol{z}$ e o número real $\boldsymbol{y}$ de **parte imaginária**. Escreve-se: $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

Exemplos:

- $\boldsymbol{z_1 = 3 + 7i} \Rightarrow x = 3$ e $y = 7$ ou $Re(z_1) = 3$ e $Im(z_1) = 7$.
- $\boldsymbol{z_2 = 1 - 9i} \Rightarrow x = 1$ e $y = -9$ ou $Re(z_2) = 1$ e $Im(z_2) = -9$.
- $\boldsymbol{z_3 = 2 - i} \Rightarrow x = 2$ e $y = -1$ ou $Re(z_3) = 2$ e $Im(z_3) = -1$.
- $\boldsymbol{z_4 = 2i} \Rightarrow x = 0$ e $y = 2$ ou $Re(z_4) = 0$ e $Im(z_4) = 2$.
- $\boldsymbol{z_5 = -1} \Rightarrow x = -1$ e $y = 0$ ou $Re(z_5) = -1$ e $Im(z_4) = 0$.

Na representação $\boldsymbol{z = x + yi}$, a unidade $\boldsymbol{i}$ é chamada de **unidade imaginária** e o seu valor é $i = \sqrt{-1}$ ou $i^2 = -1$.

Em particular, se $\boldsymbol{y = 0}$ (parte imaginária nula), temos um **número real**. Se $\boldsymbol{x = 0}$ (parte real nula), denominamos o número de **imaginário puro**.

Exemplos:

- $\boldsymbol{z_1 = -12} \Rightarrow Re(z_1) = -12$ e $Im(z_1) = 0$ (numero real).
- $\boldsymbol{z_2 = -5i} \Rightarrow Re(z_2) = 0$ e $Im(z_2) = -5$ (imaginário puro).

Perceba que, de fato, o conjunto dos números reais $(\mathbb{R})$ está contido no conjunto dos números complexos $(\mathbb{C})$, conforme anunciamos na unidade 1. Pois, um número real é também um número complexo (observe que $\boldsymbol{y = 0}$ torna o número real), mas nem todo número complexo é um número real, são os casos em que $\boldsymbol{y \neq 0}$.

Exemplo: Calcule o valor de m para que o número complexo $z = 5 + (2m - 4)i$ seja um número real.

Solução: Para que seja um número real, a parte imaginária do complexo precisa ser nula, ou seja, $\mathrm{Im}(z) = 0$. Desse modo,

$$2m - 4 = 0 \Rightarrow 2m = 0 + 4 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{2} \Rightarrow \boxed{m = 2}.$$

A unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$ permite a existência da raiz quadrada ou qualquer raiz par de um número negativo no conjunto dos números complexos.

Exemplo: Encontre a solução de equação $x^2 + 2x + 5 = 0$, no conjunto dos números complexos.

Solução: $x^2 + 2x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 2^2 - 4.1.5$

$\Delta = 4 - 20 \Rightarrow \Delta = -16$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = ?$$

Já sabemos que $\sqrt{-16}$ não existe no conjunto dos números reais, vamos representá-lo no conjunto dos números complexos.

Como $\sqrt{-16} = \sqrt{16.(-1)} = \sqrt{16}.\sqrt{(-1)} = 4\sqrt{-1}$ e $\sqrt{-1} = i$, podemos escrever: $\sqrt{-16}$ como $4i$ e dessa forma, a equação passa a apresentar as seguintes soluções

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} -1 + 2i \\ -1 - 2i \end{cases} \Rightarrow \text{Solução: } \{-1 + 2i, -1 - 2i\}.$$

Os valores de $x = -1 + 2i$ ou $x = -1 - 2i$, satisfazem a equação $x^2 + 2x + 5 = 0$. Faremos o teste para $x = -1 + 2i$, ficando o teste da outra solução como exercício.

$$\underbrace{(-1 + 2i)^2}_{x^2} + 2\underbrace{(-1 + 2i)}_{x} + 5 = 1 + 2.(-1).2\,i + 4\underbrace{i^2}_{-1} - 2 + 4i + 5 = 0.$$

Lembre-se sempre que: $i = \sqrt{(-1)}$ e $i^2 = -1$.

16.1.2. Igualdade de números complexos

Definição 16.1.2.1: Dois números complexos são iguais se, e somente se, as partes reais e as partes imaginárias são respectivamente iguais.

Sendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \Rightarrow z_1 = z_2 \Leftrightarrow \boxed{a = c}$ e $\boxed{b = d}$.

16.1.3. Soma e subtração de números complexos na forma algébrica

Na soma ou subtração de números complexos, operamos separadamente, as partes reais e as imaginárias.

Exemplo: Sendo $z_1 = -2 + 11i$ e $z_2 = 7 - 4i$, temos

$$z_1 + z_2 = -2 + 11i + 7 - 4i = \boxed{5 + 7i}.$$

$$z_1 - z_2 = -2 + 11i - (7 - 4i) = -2 + 11i - 7 + 4i = \boxed{-9 + 15i}.$$

2º exemplo: Considere os números complexos $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 5i$ e $z_3 = -2 + i$, calcule.

a) $z_1 + z_2 - z_3$

Solução: $z_1 + z_2 - z_3 = 1 - 2i + 5i - (-2 + i) = 1 + 3i + 2 - i = \boxed{3 + 2i}$.

b) $z_3 - z_2 - 5.z_1$

Solução:

$$z_3 - z_2 - 5.z_1 = -2 + i - 5i - 5.(1 - 2i) = -2 - 4i - 5 + 10i = \boxed{-7 + 6i}.$$

3º exemplo: Determine o número complexo z na equação $z - 4 + 5i = -3 - i$.

Solução: $z - 4 + 5i = -3 - i \Rightarrow \quad z = -3 - i + 4 - 5i \Rightarrow \boxed{z = 1 - 6i}$.

16.1.4. Multiplicação de números complexos na forma algébrica

Na multiplicação de números complexos, aplica-se inicialmente a propriedade distributiva e, posteriormente, a contabilização dos termos semelhantes.

Exemplo: $(-1 - 5i).(4 - 2i) = -1.4 - 1.(-2i) - 5.4i + 10.\underbrace{i^2}_{-1}$

$$= -4 + 2i - 20i - 10 = \boxed{-14 - 18i}.$$

2º exemplo: $(2 - 3i).(1 + i)^2$

Solução:

Primeiro, $(1 + i)^2 = (1 + i).(1 + i) = 1 + i + i + \underbrace{i^2}_{-1} = 1 + 2i - 1 = 2i.$

Assim: $(2 - 3i).\underbrace{(1 + i)^2}_{2i} = (2 - 3i).2i = 4i - 6.\underbrace{i^2}_{-1} = \boxed{6 + 4i}$.

3º exemplo: Considere os números complexos $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 1 + i$ e $z_3 = 2i$ e calcule.

a) $z_1.z_2.z_3$

Solução:

$$(1 - i).(1 + i).2i = \left(1 + i - i - \underbrace{i^2}_{-1}\right).2i = (1 + 1).2i = \boxed{4i}.$$

b) $z_1{}^2.z_2$

Solução:

$$(1 - i)^2.(1 + i) = \left(1 - 2.1.i + \underbrace{i^2}_{-1}\right).(1 + i) = -2i.(1 + i) = -2i - 2\underbrace{i^2}_{-1} = \boxed{2 - 2i}.$$

c) $z_3{}^5$

Solução:

$$(2.i)^5 = \underbrace{(2.i).(2.i).(2.i).(2.i).(2.i)}_{5\ vezes} = \overbrace{4.\underbrace{i^2}_{-1}}^{2i.2i}.\overbrace{4.\underbrace{i^2}_{-1}}^{2i.2i}.2i = \boxed{16i}.$$

16.1.5. Potências da unidade imaginária i

Para calcular potências como i^n, utilizamos as mesmas propriedades de potências de um número real.

Exemplo: Calcule:

a) i^{10}

Solução:

$$i^{10} = \underbrace{i.i.i.i.i.i.i.i.i.i}_{\mathbf{10\ vezes}} = \underbrace{\overbrace{i^2}^{-1}.\overbrace{i^2}^{-1}}_{(-1).(-1)} . \underbrace{\overbrace{i^2}^{-1}.\overbrace{i^2}^{-1}}_{(-1).(-1)} .i^2 = -1.$$

b) i^{14}

Solução: No exemplo anterior, vimos que $i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$. Dessa forma, podemos agrupar a sequência de i na multiplicação de quatro em quatro. Da seguinte maneira:

$$i^{14} = \underbrace{\overbrace{i.i.i.i}^{1}.\overbrace{i.i.i.i}^{1}.\overbrace{i.i.i.i}^{1}.i.i}_{\mathbf{14\ vezes}} = i^2 = -1.$$

De uma forma geral, como i^4 é elemento neutro da multiplicação nas potências de i^n, então a potência i^n tem como resultado o mesmo valor de i elevado ao resto da divisão de n por 4. Veja a solução dos próximos itens.

c) i^{101}

Solução: $101 \mid 4$

Resto $\rightarrow 1 \quad 25$

Assim: $i^{101} = i^1 = i.$

d) i^{1035}

Solução: $1035 \mid 4$

Resto $\rightarrow 3 \quad 258$

Assim: $i^{1035} = i^3 = i^2.i = -i.$

SAIBA MAIS!

É prático memorizar ;que:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

e) $i^{5148} - i^{5149} + i^{5150} - i^{5147}$

Solução: $5148 \mid 4$

Resto $\rightarrow 0 \quad 1287$

Como 5148 dividido por 4 tem resto zero, significa que o resto de 5149 por 4 é 1, o resto de 5150 é 2, e o resto de 5147, ao ser dividido por 4, é 3. Substituindo, encontramos:

$$i^{5148} - i^{5149} + i^{5150} - i^{5147} = i^0 - i^1 + i^2 - i^3 = 1 - i + -1 - (-i) = 0.$$

EXERCÍCIOS 16.1

1) Calcule o valor de a para que o número complexo $z = (a^2 - 16) + i$ seja imaginário puro.

2) Encontre a solução de equação $x^2 + 1 = 0$, no conjunto dos números complexos.

3) Encontre a solução de equação $x^2 + 2x + 2 = 0$, no conjunto dos números complexos.

4) Considere os números complexos $z_1 = 7 - i$, $z_2 = 1 - 5i$ e $z_3 = i$ e calcule:

a) $z_1 + z_3$

b) $z_1 - z_2$

c) $z_1 + 2.z_2 + 11.z_3$

d) $2.z_1 - z_2 - z_3$

5) Considere os números complexos $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = -1 + i$ e calcule.

a) $z_1.z_2.z_3$ b) ${z_1}^2.{z_2}^2$ c) $(z_3)^4$

6) Calcule os produtos:

a) $(1 - 5i).(1 + 5i)$ b) $(7 - 5i).(1 + 2i)^2$ c) $(3 - i)^3.(3 + i)^3$

7) Calcule as potências:

a) i^7

b) i^{50}

c) i^{201}

d) $i^{100000000}$

8) Qual o valor das expressões:

a) $i^{3000} - i^{3001} + i^{3002} - i^{3003}$

b) $i^{37} - i^{48} + i^{433} - i^{502}$

c) $i^{10}.i^{-7} + i^{133}.i^{-132}$

d) $i + i^2 + i^3 ... + i^{20}$

9) (UEFS) Se $m - 1 + ni = (3 + i).(1 + 3i)$, então m e n são respectivamente:

a) 1 e 10 b) 5 e 10 c) 7 e 9 d) 5 e 9 e) 0 e -9

10) (FESP/UPE) Seja $z = 1 + i$, onde i é a unidade imaginária. Podemos afirmar que z^8 é igual a:

a) 16 b) 161 c) 32 d) $32i$ **e)** $32 + 16i$

11) (UNEB) Se i é a unidade imaginária, então $i^{25} + i^{39} - i^{108} + i.i^{50}$ é igual a:

a) $-1 - i$ b) $-1 + i$ **c)** $1 - i$ d) $1 + i$ e) 0

16.1.6. Divisão de números complexos na forma algébrica

Vamos dividir o número complexo $a+bi$ por $c+di$. O resultado dessa divisão é outro número complexo $z = x + yi$, tal que

$$\frac{a+bi}{c+di} = x + yi \Rightarrow (x + yi).(c+di) = a+bi$$

$$xc + xdi + yci + yd\underbrace{i^2}_{-1} = a+bi \Rightarrow \underbrace{xc-yd}_{a} + i(\underbrace{xd+yc}_{b}) = a+bi \Rightarrow$$

Montando o sistema e resolvendo-o, encontramos:

$$\begin{cases} xc - yd = a \\ xd + yc = b \end{cases} \times \left(\frac{c}{d}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{xc^2}{d} - yc = \frac{ac}{d} \\ xd + yc = b \end{cases}$$

$$x\left(\frac{c^2+d^2}{d}\right) = \frac{ac+bd}{d} \Rightarrow \boxed{x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}}.$$

$$xc - yd = a \Rightarrow \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)c - yd = a \Rightarrow \boxed{y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}}.$$

Dessa maneira, a divisão de $a+bi$ por $c+di$ é:

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i.\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Podemos reescrever esse resultado como:

$$\frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi-d^2i^2} = \boxed{\frac{a+bi}{c+di}.\frac{(c-di)}{(c-di)}}$$

Ou seja, basta multiplicar o dividendo e o divisor de $\frac{a+bi}{c+di}$ por $c-di$.

Denominamos $\boldsymbol{c-di}$ de conjugado do número complexo $\boldsymbol{c+di}$ e vice-versa, conforme a definição a seguir.

Definição 16.1.6.1 (conjugado de um complexo): Dado um número complexo $\boldsymbol{z = x + yi}$, chama-se conjugado de $\mathbf{z}$, o número complexo $\boldsymbol{x - yi}$ e indicamos por $\overline{\boldsymbol{z}}$.

Exemplos:

- $z = 11 + 13i$, o conjugado é $\overline{z} = 11 - 13i$;
- $z = -1 - i$, o conjugado é $\overline{z} = -1 + i$;
- $z = 5i$, o conjugado é $\overline{z} = -5i$;
- $z = 2$, o conjugado é $\overline{z} = 2$.

O **conjugado** de um número complexo é o mesmo número complexo com o sinal trocado na parte imaginária.

Com base nessas informações, podemos calcular a divisão entre dois números complexos, multiplicando o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}.\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Observe ainda que $z.\bar{z}$ resulta em um número real não negativo:

$$z.\bar{z} = (x + yi).(x - yi) = x^2 - \cancel{xy}i + \cancel{yx}i - y^2 \underbrace{i^2}_{-1} = x^2 + y^2.$$

Essencialmente, multiplicar o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor consiste em transformar a divisão entre dois números complexos em uma divisão de um número complexo por um número real não negativo.

Exemplo: Vamos calcular $\frac{26-13i}{12-5i}$.

Solução: Multiplicando o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor, dispomos de

$$\frac{26-13i}{12-5i} = \frac{26-13i}{12-5i}.\frac{(12+5i)}{(12+5i)} = \frac{312+130i-156i-65i^2}{12^2-(5i)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{377-26i}{144+25} = \frac{377-26i}{169} = \frac{377}{169} - \frac{26i}{169} = \boxed{\frac{29}{13} - \frac{2i}{13}}.$$

2º exemplo: Vamos calcular $\frac{4-3i}{1+2i}$.

Solução: Multiplicando o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor $(1-2i)$, encontramos

$$\frac{4-3i}{1+2i}.\frac{(1-2i)}{(1-2i)} = \frac{4-8i-3i+6i^2}{1^2-4i^2} = \frac{-2-11i}{5} = \boxed{\frac{-2}{5} - \frac{11i}{5}}.$$

3º exemplo: Escreva na forma $z = x + yi$ o número complexo $\frac{1}{1+i} - \frac{1+4i}{3i}$.

Solução:

Resolvendo a primeira divisão:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}.\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-i}{1^2-i^2} = \boxed{\frac{1-i}{2}}.$$

Resolvendo a segunda divisão:

$$\frac{1+4i}{3i} = \frac{1+4i}{3i}.\frac{(-3i)}{(-3i)} = \frac{-3i-12i^2}{-9i^2} = \boxed{\frac{12-3i}{9}}.$$

Substituindo na expressão inicial, temos

$$\frac{1-i}{2} - \frac{12-3i}{9} = \frac{9-9i-24+6i}{18} = \frac{-15-3i}{18} = \boxed{-\frac{5}{6} - \frac{i}{6}}.$$

Outra solução seria operar livremente a expressão inicial:

$$\frac{1}{1+i} - \frac{1+4i}{3i} = \frac{3i-(1+4i).(1+i)}{(1+i).3i} = \frac{3i-(1+i+4i+4i^2)}{3i+3i^2} \Rightarrow$$

$$\frac{3i-(-3+5i)}{3i+3i^2} = \frac{3i+3-5i}{3i-3} = \frac{3-2i}{-3+3i} \Rightarrow$$

$$\frac{3-2i}{-3+3i}.\frac{(-3-3i)}{(-3-3i)} = \frac{-9-9i+6i+6i^2}{(-3)^2-(3i)^2} = \frac{-15-3i}{18} = \boxed{-\frac{5}{6} - \frac{i}{6}}.$$

EXERCÍCIOS 16.2

1) Calcule as divisões entre os números complexos a seguir.

a) $\frac{1-i}{1+i}$

b) $\frac{5-3i}{1-2i}$

c) $\frac{1+2i}{1-2i}$

d) $\frac{(1+i)^2}{1-i}$

e) $\frac{1}{i}+\frac{1}{1-i}$

f) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}$

2) Sabendo que $z=\frac{8+i}{1-i}$, calcule o seu conjugado.

3) Calcule $\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^{10}}$.

4) (UNESP-SP) Se $z=(2+i)\cdot(1+i)\cdot i$, o conjugado de z, será dado por

a) $-3-i$. b) $1-3i$. c) $3-i$. d) $-3+i$. e) $3+i$.

5) (UEPB-PB) O número complexo $z=\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}$ pode ser escrito como:

a) 1 b) $i-1$ c) $1+i$ d) i e) $1-i$

6) (UNESP-SP) Considere o número complexo $z=i$, onde i é a unidade imaginária. O valor de $z^4+z^3+z^2+z+\frac{1}{z}$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) i e) $-i$

7) (UFC-CE) O valor do número complexo $\left(\frac{1+i^9}{1+i^{27}}\right)^{20}$ é:

a) 1 b) i c) $-i$ d) -1 e) 2^{20}

8) Qual o valor de $\left(\frac{i^{100}+i^{17}}{i^{44}+i^{75}}\right)^{100001}$?

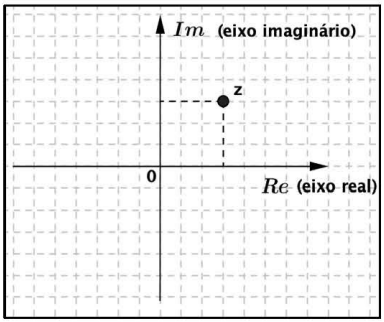
9) Resolva a equação $2z-\overline{z}=\frac{1+2i}{1+i}$, onde $\overline{z}$ é o conjugado de z.

10) Indique para que valores naturais de n, o número complexo $\left(\frac{1}{1+i}\right)^n$ é um número real.

16.1.7. Representação geométrica de um número complexo

Todo número complexo $z = x + yi$ pode ser representado geometricamente por um ponto $Z(x, y)$ em um plano, em que $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

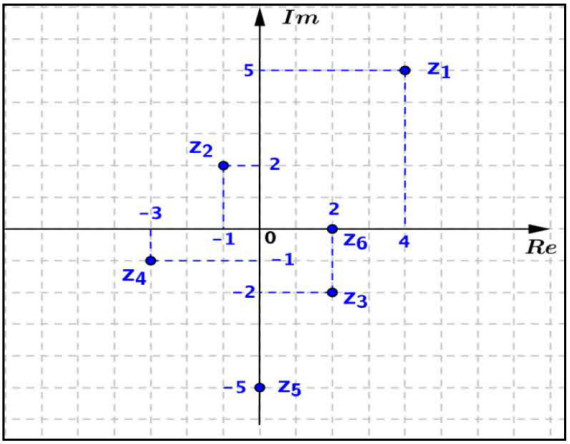
Semelhante ao plano cartesiano, o plano denominado de **Argand-Gauss**, em homenagem aos matemáticos Jean Argand (1768-1822) e Carl F. Gauss (1777-1855), precursores nos estudos com números complexos em um plano, apresenta o **eixo real** $Re(z) = x$ na horizontal e o **eixo imaginário** $Im(z) = y$ na vertical, conforme a figura a seguir.



Exemplos de representação:

- $z_1 = 4 + 5i \Rightarrow z_1(4, 5)$
- $z_2 = -1 + 2i \Rightarrow z_2(-1, 2)$
- $z_3 = 2 - 2i \Rightarrow z_3(2, -2)$
- $z_4 = -3 - i \Rightarrow z_4(-3, -1)$
- $z_5 = -5i \Rightarrow z_5(0, -5)$
- $z_6 = 2 \Rightarrow z_6(2, 0)$

A representação desses números complexos está no gráfico a seguir.



Observação: $(0,0)$ equivale a $z = 0 + 0i$.

16.1.8. Módulo e forma trigonométrica de um número complexo

Definição 16.1.8.1: Seja um número complexo $z = x + yi$. Indicamos por $|z|$ (o módulo de z), a expressão $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Geometricamente, $|z|$ é a distância de z à origem do plano Argand-Gauss.

Com efeito, a distância de z à origem calculada pelo teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura 16.1.8.1 é

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

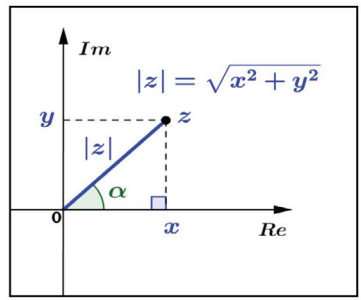


Figura 16.1.8.1

No mesmo triângulo da figura, podemos aplicar as razões trigonométricas:

$$cos\alpha = \frac{x}{|z|} \Rightarrow \boxed{x = |z|.cos\alpha}.$$

$$sen\alpha = \frac{y}{|z|} \Rightarrow \boxed{y = |z|.sen\alpha}.$$

Substituindo x e y na forma algébrica $z = x + yi$, obtemos

$$z = |z|.cos\alpha + |z|.sen\alpha i \Rightarrow \boxed{z = |z|.(cos\alpha + i.sen\alpha).}$$

Esta forma $z = |z|.(cos\alpha + i.sen\alpha)$ é chamada de **forma trigonométrica de z** e o ângulo α $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ de **argumento de z**.

1º exemplo: Calcule o módulo dos números complexos a seguir e represente-os no plano de Argand-Gauss.

a) $z_1 = 3 + i$

Solução:

$$x = 3 \; e \; y = 1 \Rightarrow |z_1| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} \Rightarrow |z_1| = \sqrt{10}.$$

A representação desse número complexo no plano está na figura 16.1.8.2.

b) $z_2 = 1 - 2\sqrt{2}\, i$

Solução:

$$x = 1 \; e \; y = -2\sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{1^2 + \left(-2\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$|z| = \sqrt{1 + 4.2} \Rightarrow |z| = \sqrt{9} \Rightarrow |z| = 3.$$

A representação desse número complexo no plano está na figura 16.1.8.3.

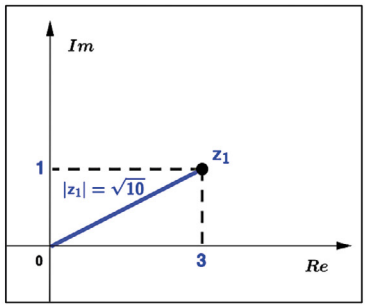


Figura 16.1.8.2

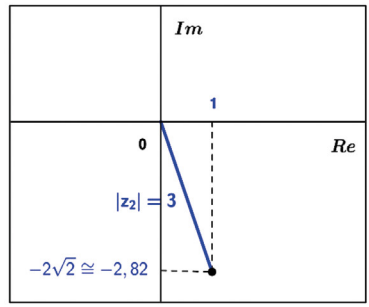


Figura 16.1.8.3

2º exemplo: Escreva os números complexos a seguir na forma trigonométrica e represente-os no plano de Argand-Gauss.

a) $z_1 = 1 - i$

Solução: $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$

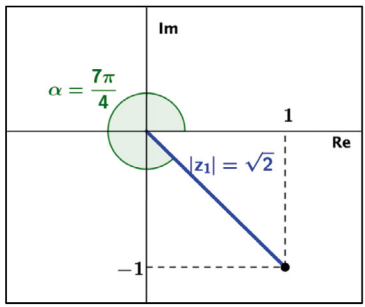
$$cos\alpha = \frac{x}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$sen\alpha = \frac{y}{|z_1|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Desconsiderando o sinal, o arco correspondente no primeiro quadrante é 45°. Como o seno é negativo e o cosseno é positivo, o arco α está no 4º quadrante. Fazendo o inverso da redução ao primeiro quadrante (ver seção 11.5 – volume 2), encontramos $\alpha = 360° - 45° = 315°$, o que equivale a:

$$180^o \rightarrow \pi\ rad$$
$$315^o \rightarrow x$$

$$\Rightarrow 180x = 315\pi\ rad \Rightarrow x = \frac{315\pi}{180} \Rightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{4}\ rad}.$$



A forma trigonométrica é, portanto,

$$z_1 = |z_1|.(cos\alpha + i.sen\alpha) \Rightarrow$$

$$\boxed{z_1 = \sqrt{2}.\left(cos\frac{7\pi}{4} + i.sen\frac{7\pi}{4}\right)}.$$

b) $z_2 = -\sqrt{3} + i$

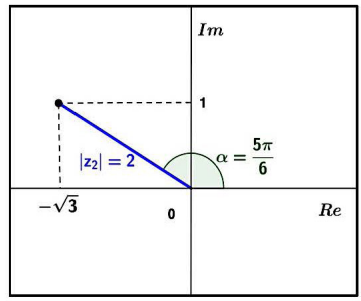
Solução: $|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2.$

$$cos\alpha = \frac{x}{|z_2|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$sen\alpha = \frac{y}{|z_2|} = \frac{1}{2}.$$

Os módulos de seno e cosseno referem-se ao arco de $\frac{\pi}{6}$ (30°). Como α está no 2º quadrante (veja que o cosseno é negativo e o seno é positivo), vamos fazer o inverso da redução ao primeiro quadrante:

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$



Desse modo, a forma trigonométrica de z_2 é

$$z_2 = |z_2|.(cos\alpha + i.sen\alpha) \Rightarrow$$

$$\boxed{z_2 = 2.\left(cos\frac{5\pi}{6} + i.sen\frac{5\pi}{6}\right)}.$$

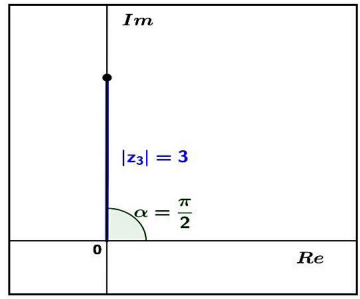
c) $z_3 = 3i$

Solução:

$$|z_2| = \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\alpha = \frac{x}{|z_3|} = \frac{0}{3} = 0. \\ sen\alpha = \frac{y}{|z_3|} = \frac{3}{3} = 1. \end{array}\right\} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

$$\boxed{z_3 = 3.(cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2})}.$$



3º exemplo: Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica.

a) $z_1 = 6.(cos\frac{2\pi}{3} + i.sen\frac{2\pi}{3})$

Solução: Para transformar a forma trigonométrica em algébrica, basta substituir os valores de cosseno e seno do argumento e eliminar os parênteses.

Como $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (ou 120°) está no II quadrante, o seno é positivo e o cosseno é negativo e possui os mesmos valores, em módulo, do arco de $180° - 120° = 60°$. Assim,

$$\boxed{cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}} \; e \; \boxed{sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

$$z_1 = 6.\left(cos\frac{2\pi}{3} + i.sen\frac{2\pi}{3}\right) = 6.\left(\frac{-1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i}.$$

b) $z_2 = 10.(cos\,\pi + i.sen\,\pi)$

Solução: $z_2 = 10.(cos\,\pi + i.sen\,\pi) = 10.(-1 + i.0) \Rightarrow \boxed{z_2 = -10}$.

Propriedades dos módulos de um número complexo:

- **Propriedade 1**: $\boxed{|\bar{z}| = |z| \geq 0}$.

Demonstração: $\begin{cases} z = x + yi \Rightarrow |z| = \boxed{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq 0 \\ \overline{z} = x - yi \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \boxed{\sqrt{x^2 + y^2}} \geq 0 \end{cases}$

◆ **Propriedade 2**: $\boxed{z.\overline{z} = |z|^2}$.

Demonstração: Sendo $z = x + yi$ e $\overline{z} = x - yi$

$z.\overline{z} = (x + yi).(x - yi) = x^2 + xyi - xyi - y^2i^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = |z|^2$.

◆ **Propriedade 3**: $\boxed{|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|}$.

Demonstração: $|z_1.z_2|^2 = (z_1.z_2).(\overline{z_1}.\overline{z_2}) = (z_1.z_2).(\overline{z_1}.\overline{z_2}) = \underbrace{z_1.\overline{z_1}}_{|z_1|}.\underbrace{z_2.\overline{z_2}}_{|z_2|}$

◆ **Propriedade 4**: $\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}}$ (com $z_2 \neq 0$).

Demonstração: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1.\overline{z_2}}{\underbrace{z_2.\overline{z_2}}_{|z_2|^2}}\right| = \left|\frac{z_1.\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right| = \frac{\overbrace{|z_1.\overline{z_2}|}^{(3)}}{|z_2|.|z_2|} = \frac{|z_1|.|\overline{z_2}|}{|z_2|.|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

◆ **Propriedade 5**: $\boxed{|z|^n = |z^n|}$ (Para todo n se $z \neq 0$ ou $n > 0$ se $z = 0$).

Demonstração: $|z^n| = \left|\underbrace{z.z.z.z\ldots z}_{n\text{ vezes}}\right| = \underbrace{|z|.|z|.|z|\ldots|z|}_{n\text{ vezes}} = |z|^n$.

1º exemplo: Dados: $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 12 - 5i$, calcule $|z_1.z_2|$.

Solução:

$z_1.z_2 = (3 + 4i).(12 - 5i) = 36 - 15i + 48i - 20i^2 \Rightarrow \boxed{z_1.z_2 = 56 + 33i}$.

$|z_1.z_2| = \sqrt{56^2 + 33^2} = \sqrt{3136 + 1089} = \sqrt{4225} = 65 \Rightarrow \boxed{|z_1.z_2| = 65}$.

Outra solução: Aplicando a propriedade (3), podemos fazer

$|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow |z_1| = 5.$

$|z_2| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \Rightarrow |z_2| = 13.$

$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = 5.13 = 65 \Rightarrow \boxed{|z_1.z_2| = 65}$.

2º exemplo: Calcule m em $z = 1 + (m - 1)i$, sabendo que $|z|.|\overline{z}| = 2$.

Solução: Pela propriedade (3), podemos escrever

$|z|.|\overline{z}| = 2 \Rightarrow \left|\underbrace{z.\overline{z}}_{|z|^2}\right| = 2 \Rightarrow |z|^2 = 2 \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{2}}$.

$|z| = \sqrt{1^2 + (m-1)^2} = \sqrt{1 + m^2 - 2.m + 1} = \sqrt{m^2 - 2.m + 2} = \sqrt{2}.$

Assim,

$m^2 - 2.m + 2 = 2 \Rightarrow m^2 - 2.m = 0 \Rightarrow m.(m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases} \Rightarrow S = \{0, 2\}.$

EXERCÍCIOS 16.3

1) Dados: $z_1 = 6 - 8i$ e $z_2 = 12 + 16i$ e $z_3 = -i$ calcule as expressões a seguir utilizando as propriedades quando conveniente.

a) $|z_1 . z_2|$

b) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

c) $\left|\frac{z_1 . z_3}{z_2 . \overline{z_3}}\right|$

d) $|z_1 + z_2 + 8z_3|$

2) Calcule a em $z = (a - 2) + 3i$, sabendo que $\overline{z} . z = 25$.

3) Sabendo que $z = 1 + i$, calcule $|z^{10}|$.

4) Calcule os argumentos de:

a) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

b) $z = -5 + 5i$

5) Escreva na forma trigonométrica os seguintes números complexos:

a) $z = 3 - 3\sqrt{3}i$

b) $z = -7 + 7i$

c) $z = i^{27}$

d) $z = 9$

6) (VUNESP) Seja o número complexo $z = 10 + 10i$, no qual $i = \sqrt{-1}$. A forma trigonométrica que representa este número é

a) $z = 10.(cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2})$

b) $z = 10.(cos\frac{\pi}{4} + i.sen\frac{\pi}{4})$

c) $z = 10\sqrt{10}.(cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2})$

d) $z = 10\sqrt{2}.(cos\frac{\pi}{2} + i.sen\frac{\pi}{2})$

e) $z = 10\sqrt{2}.(cos\frac{\pi}{4} + i.sen\frac{\pi}{4})$

7) (UEL) Seja z um número complexo de módulo 2 e argumento principal 120°. O conjugado de z é:

a) $2 - 2\sqrt{3}i$ b) $2 + 2\sqrt{3}i$ c) $-1 - \sqrt{3}i$ d) $-1 + \sqrt{3}i$ e) $1 + \sqrt{3}i$

8) (UNIRIO) Sejam Z_1 e Z_2 números complexos representados pelos seus afixos na figura. Então, o produto de Z_1 pelo conjugado de Z_2 é:

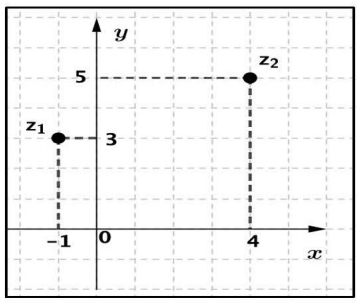
a) $19 + 10i$

b) $11 + 17i$

c) 10

d) $-19 + 17i$

e) $-19 + 7i$



16.1.9. Multiplicação e divisão de números complexos na forma trigonométrica

Neste tópico, vamos demonstrar e exemplificar o produto e a divisão entre dois números complexos na forma trigonométrica.

Dados $z_1 = |z_1|.(\cos\alpha + i.\text{sen}\alpha)$ e $z_2 = |z_2|.(\cos\theta + i.\text{sen}\theta)$, temos

$$z_1.z_2 = |z_1|.(cos\alpha + i.sen\alpha).|z_2|.(cos\theta + i.sen\theta)$$

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(cos\alpha.cos\theta + cos\alpha.i.sen\theta + i.sen\alpha.cos\theta + i^2.sen\alpha.sen\theta)$$

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.\left(\underbrace{cos\alpha.cos\theta - sen\alpha.sen\theta}_{cos(\alpha+\theta)} + i.(\underbrace{cos\alpha.sen\theta + sen\alpha.cos\theta)}_{sen(\alpha+\theta)}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|[cos(\alpha+\theta) + i\,sen(\alpha+\theta)]}$$

Portanto, o produto de dois números complexos na forma trigonométrica é dado pelo produto dos módulos e o seu argumento é a soma dos argumentos individuais.

De forma análoga, usando o recurso do conjugado na divisão e o arco da diferença, demonstra-se que

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos(\alpha-\theta) + i\,sen(\alpha-\theta)].}$$

A divisão de dois números complexos na forma trigonométrica é dada pela divisão dos módulos e o seu argumento pela diferença dos argumentos individuais.

Exemplo: Sendo $z_1 = 4.(\cos\frac{\pi}{3} + i.\frac{\pi}{3})$ e $z_2 = 2.(\cos\frac{\pi}{6} + i.\frac{\pi}{6})$, temos

$$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|(cos(\alpha+\theta) + i\,sen(\alpha+\theta) = 4.2\left[cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right] \Rightarrow$$

$$8.\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 8.(0 + i.1) \Rightarrow \boxed{z_1.z_2 = 8i}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos(\alpha-\theta) + i\,sen(\alpha-\theta)] = \frac{4}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2.\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2.(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \boxed{\frac{z_1}{z_2} = 1 + i\sqrt{3}}.$$

2º exemplo: Sendo $z_1 = 2.(\cos\frac{\pi}{4} + i.\frac{\pi}{4})$, $z_2 = 8.(\cos\frac{\pi}{5} + i.\frac{\pi}{5})$ e $z_3 = (\cos\frac{\pi}{20} + i.\frac{\pi}{20})$, temos

$$z_1.z_2.z_3 = |z_1|.|z_2|.|z_3|.[cos(\alpha+\theta+\beta) + i\,sen(\alpha+\theta+\beta)] \Rightarrow$$

$$2.8.1\left[cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{20}) + i\,sen(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{20})\right] = 16\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \boxed{16i}.$$

16.1.10. Potenciação de números complexos na forma trigonométrica

Sendo $z = |z|.(cos\alpha + i.sen\alpha)$, podemos aplicar reiteradamente a fórmula do produto para calcular z^n com $n > 0$ $(n \in \mathbb{Z})$, o que nos dá

$$z^n = \underbrace{|z|.|z|.|z|.|z|.\ldots|z|}_{n\ vezes}.(cos\ (\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha\ldots+\alpha}_{n\ vezes}) + i.sen(\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha\ldots+\alpha}_{n\ vezes}) \Rightarrow$$

$$\boxed{z^n = |z|^n.[cos(n.\alpha) + isen(n.\alpha)].}$$

Essa fórmula é conhecida como **1ª fórmula de Moivre**, em homenagem ao matemático Abrahan De Moivre (1667-1754).

Agora, vamos demonstrar que ela é válida também para $n < 0$ (expoente negativo). Fazendo $n = -m$ na fórmula, obtemos

$$z^{-m} = |z|^{-m}.(\cos(-m.\alpha) + isen(-m.\alpha))$$
$$z^{-m} = |z|^{-m}.(\cos(0 - m.\alpha) + isen(0 - m.\alpha))$$
$$z^{-m} = \frac{|1|}{|z^m|}.(\cos(0 - m.\alpha) + isen(0 - m.\alpha)).$$

Essa última igualdade é equivalente a divisão entre os dois números complexos: $z_1 = 1$ e $z_2 = z^m$, demonstrando que $z^{-m} = \frac{1}{z^m}$ e que a fórmula é válida para $n < 0$.

1º exemplo: Vamos calcular $(-\sqrt{3} + i)^{10}$.

Solução: Calcular essa potência na forma algébrica é trabalhoso e, portanto, não indicado. Vamos escrever o número $-\sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica.

$$z = -\sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{|z| = 2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\alpha = \frac{x}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}. \\ sen\alpha = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{2}. \end{array}\right\} \quad \alpha = \frac{5\pi}{6}\ (ou\ 150°).$$

$$\boxed{z = 2.(\cos\frac{5\pi}{6} + i.\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6})}.$$

Pela 1ª fórmula de Moivre, temos

$$(-\sqrt{3} + i)^{10} = 2^{10}.\left(\cos\frac{\overset{n}{\overbrace{10}}.5\pi}{6} + i.\mathrm{sen}\frac{\overset{n}{\overbrace{10}}.5\pi}{6}\right) = 1024.\left(\cos\frac{25\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\frac{25\pi}{3}\right) \Rightarrow$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{10} = 1024.\left(\cos\frac{25\pi}{3} + i.\mathrm{sen}\frac{25\pi}{3}\right)$$

Como,

$$\alpha = \frac{25\pi}{3} = \frac{24\pi + \pi}{3} = \underbrace{\frac{8\pi}{4 \text{ voltas}}} + \boxed{\frac{\pi}{3}}.$$

Concluímos que

$$(-\sqrt{3} + i)^{10} = 1024.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 1024.\left(\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{512 + 512\sqrt{3}i}.$$

2º exemplo: Sendo $z = 3.(cos\frac{\pi}{5} + i.sen\frac{\pi}{5})$, calcule.

a) z^{20}

Solução:

$$z^{20} = 3^{20}.\left(\cos\frac{\overset{n}{\overbrace{20}}.\pi}{5} + i.\text{sen}\frac{\overset{n}{\overbrace{20}}.\pi}{65}\right) = 3^{20}.\left(\underbrace{cos4\pi}_{1} + i.\underbrace{sen4\pi}_{0}\right) = 3^{20}.$$

b) z^5

Solução:

$$z^5 = 3^5.\left(\cos\frac{\overset{n}{\overbrace{5}}.\pi}{5} + i.\text{sen}\frac{\overset{n}{\overbrace{5}}.\pi}{5}\right) = 3^5.\left(\underbrace{cos\pi}_{-1} + i.\underbrace{sen\pi}_{0}\right) = -3^5.$$

3º exemplo: Calcule $\frac{30.(cos57° + i.sen57°)}{6.(cos12° + i.sen12°)}$.

Solução: À primeira vista, parece não haver solução sem o uso de uma tabela trigonométrica (ou calculadora). No entanto, aplicando a fórmula da divisão, obtemos

$$\frac{30.(cos57° + i.sen57°)}{6.(cos12° + i.sen12°)} = 5.(\cos(57° - 12°) + i.\text{sen}(57° - 12°)) \Rightarrow$$

$$5.(\cos45° + i.\text{sen}45°) = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i}.$$

EXERCÍCIOS 16.4

1) Calcule e dê o resultado na forma algébrica.

a) $[5.(cos15^o + i.sen15^o)].[4.(cos120^o + i.sen120^o)]$

b) $[12.(cos30^o + i.sen30^o)].[5.(cos300^o + i.sen300^o)]$

c) $\left[1.(cos\frac{\pi}{8} + i.sen\frac{\pi}{8})\right].\left[2.\left(cos\frac{5\pi}{24} + i.sen\frac{5\pi}{24}\right)\right]$

d) $\frac{2.(cos150° + i.sen150^o)}{4.(cos90^o + i.sen90^o)}$

e) $\frac{35.(cos135^o + i.sen135^o)}{7.(cos90^o + i.sen90^o)}$

f) $\frac{9.(cos128^o + i.sen128^o)}{3.(cos38^o + i.sen38^o)}$

2) Dados z = $2.(cos6° + i.sen6°)$, calcule os valores a seguir e responda na forma algébrica

a) z^5 b) z^{100} c) z^{-10}

3) Calcule e dê o resultado na forma algébrica:

a) $(-1 - i)^{12}$ c) $(1 + i)^{-8}$

b) $\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{12}$ d) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$

4) (UFC) Ao dividir $1 - \sqrt{3}i$ por $-1 + i$, obtém-se um complexo de argumento igual a:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{12}$ c) $\frac{7\pi}{12}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{11\pi}{12}$

5) (UNESP-SP) Considere o número complexo $z = cos\frac{\pi}{6} + i.sen\frac{\pi}{6}$. O valor de $z^3 + z^6 + z^{12}$ é:

a) $-i$ b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $i - 2$ d) i e) $2i$

6) (PUC-SP) Seja z o conjugado do complexo $1 - i$. A potência z^{12} é igual a:

a) $-64 - i$ b) $-64 + i$ c) $-32 - i$ d) $-32 + i$ e) -64

7) (FEI) O módulo do número complexo $(1 + i)^{-3}$ é:

a) $\sqrt{2}$ b) 1 c) -3 d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ e) 0

8) (CESGRANRIO) O menor inteiro $n > 0$, de modo que $\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right]^n$ seja real positivo, é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 8 e) 12

9) (FUVEST) Dado o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ qual é o menor valor do inteiro $n \geq 1$ para o qual z^n é um número real?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

10) (VUNESP) A expressão $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{109}$, onde i é a unidade imaginária dos complexos, é igual a:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ e) 1

16.1.11. Radiciação de números complexos na forma trigonométrica

A idealização dessa subseção é encontrar as raízes enésimas de um número complexo z. Em outros termos, calcular $\sqrt[n]{z}$ para $n > 1$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Escrevendo $z = |z|.(cos\alpha + i.sen\alpha)$ e suas raízes como

$$R = |R|.(cos\theta + i.sen\theta).$$

Vemos que

$$R = \sqrt[n]{z} \Rightarrow R^n = z \Rightarrow [|R|.(cos\theta + i.sen\theta)]^n = z.$$

E de acordo com a 1ª fórmula de Moivre, que

$$|R|^n.\big(cos(n\theta) + i.sen(n\theta)\big) = |z|.(cos\alpha + i.sen\alpha).$$

Números complexos iguais possuem módulos iguais e argumentos congruentes (em mais de uma volta). Fazendo k (inteiro), o número de voltas, temos que

$$n\theta = \alpha + k.2\pi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\alpha + k.2\pi}{n}} \text{ e } |R|^n = |z| \Rightarrow \boxed{|R| = \sqrt[n]{|z|}}.$$

Substituindo em $R = |R|.(cos\theta + i.sen\theta)$, concluímos a fórmula:

$$R_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[cos\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right)\right].$$

Que é conhecida como **2ª fórmula de Moivre**.

É interessante observar que ao utilizar $k = 0$ nessa fórmula, obtemos o argumento $\theta = \frac{\alpha + 0.2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n}$ e para $k = n$, obtemos $\theta = \frac{\alpha + n.2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi$, que é o mesmo argumento $\frac{\alpha}{n}$ com uma volta, inferindo que a partir de $k = n - 1$, as raízes irão se repetir. Como os n valores: $\underbrace{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1}_{n\ valores}$ geram n argumentos distintos no intervalo [0, 2π], concluímos que a raiz enésima de um complexo ($\sqrt[n]{z}$) possui exatamente n raízes complexas distintas.

1º exemplo: Calcular $\sqrt[3]{1}$.

Solução: No primeiro momento o leitor irá pensar que o número 1 é a única raiz cúbica. Isso é verdade para a solução no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Entretanto, no conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), conforme já anunciado, são 3 raízes complexas e distintas. Vamos aos cálculos.

Escrevendo $z = 1$ na forma trigonométrica, temos $z = (cos0 + i.sen0) \Rightarrow \alpha = 0$.

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre

$$R_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[cos\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right)\right]$$

$$R_k = \sqrt[3]{1}.\left[cos\left(\frac{0+k.2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{0+k.2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\boxed{R_k = 1.\left[cos\left(\frac{k.2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{k.2\pi}{3}\right)\right].}$$

Para $k = 0 \Rightarrow$

$$R_0 = 1.[cos(0) + i.sen(0)] \Rightarrow \boxed{R_0 = 1}.$$

Para $k = 1 \Rightarrow$

$$R_1 = 1.\left[cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow R_1 = 1.\left[-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow \boxed{R_1 = -\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Para $k = 2 \Rightarrow$

$$R_2 = 1.\left[cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] \Rightarrow R_2 = 1.\left[-\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow \boxed{R_2 = -\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Calcule e veja que além de 1, $\left(-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$ e $\left(-\frac{1}{2} - i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1$.

2º exemplo: Calcular $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}$.

Solução:

$$|z| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16 \Rightarrow \boxed{|z| = 16}.$$

$$\left.\begin{array}{l} cos\alpha = \dfrac{x}{|z|} = \dfrac{-8}{16} = -\dfrac{1}{2}. \\ sen\alpha = \dfrac{y}{|z|} = \dfrac{-8\sqrt{3}}{16} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right\} \quad \alpha = \frac{4\pi}{3}\ (ou\ 240°).$$

$$\boxed{z = 16.(\cos\frac{4\pi}{3} + i.\text{sen}\frac{4\pi}{3})}.$$

Aplicando a 2ª fórmula de Moivre

$$R_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[cos\left(\frac{\alpha+k.2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha+k.2\pi}{n}\right)\right]$$

$$R_k = \sqrt[4]{16}.\left[cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+k.2\pi}{4}\right) + i.sen\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+k.2\pi}{4}\right)\right]$$

$$R_k = 2.\left[cos\left(\frac{4\pi + k.6\pi}{12}\right) + i.sen\left(\frac{4\pi + k.6\pi}{12}\right)\right]$$

$$\boxed{R_k = 2.\left[cos\left(\frac{2\pi + k.3\pi}{6}\right) + i.sen\left(\frac{2\pi + k.3\pi}{6}\right)\right]}.$$

Para $k = 0 \Rightarrow R_0 = 2.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow \boxed{R_0 = 1 + \sqrt{3}i}.$

Para $k = 1 \Rightarrow R_1 = 2.\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{R_1 = -\sqrt{3} + i}.$

Para $k = 2 \Rightarrow R_2 = 2.\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2.\left[\frac{-1}{2} + i.\frac{-\sqrt{3}}{2}\right] \Rightarrow \boxed{R_2 = -1 - \sqrt{3}i}.$

Para $k = 3 \Rightarrow R_3 = 2.\left[\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right] = 2.\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{-1}{2}\right] \Rightarrow \boxed{R_3 = \sqrt{3} - i}.$

Quanto a interpretação geométrica no plano de Argand-Gauss, as n raízes de um número complexo estão sempre uniformemente espaçadas entre si e equidistantes à origem do plano. Isso nos permite representá-las como vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência.

A demonstração desse fato pode ser observado pela sequência dos argumentos na 2ª fórmula de Moivre. Veja:

$$R_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[cos\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right)\right].$$

Para $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$, temos

$$\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + \frac{6\pi}{n}, \ldots\right).$$

Essa sequência é uma progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$ e 1º termo $\frac{\alpha}{n}$. Assim, as raízes complexas estão igualmente espaçadas. Além disso, a distância de cada raiz à origem equivale ao mesmo valor $r = \sqrt[n]{|z|}$ (verifique!), representando vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência.

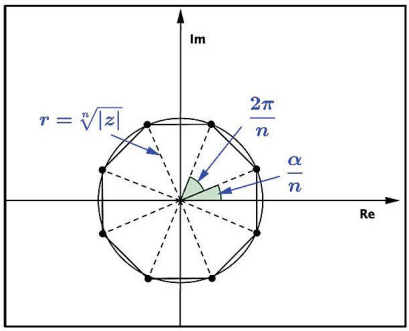


Figura 16.1.11.1

Veja a representação do 1º e 2º exemplo, nas figuras 16.1.11.2 e 16.1.11.3, respectivamente:

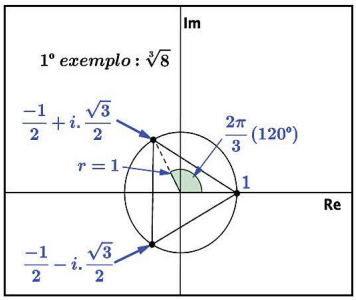


Figura 16.1.11.2

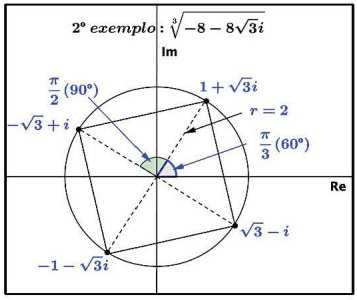


Figura 16.1.11.3

3º exemplo: Calcule $\sqrt{3 + 4i}$.

Solução: $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \boxed{|z| = 5}$.

$cos\alpha = \frac{x}{|z|} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$

$sen\alpha = \frac{y}{|z|} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

Consultando a tabela trigonométrica no final deste volume, vemos que $\alpha \cong 53°$.

$\boxed{z = 5.(cos53° + i.sen53°)}$.

$$R_k = \sqrt[n]{|z|}.\left[cos\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha + k.2\pi}{n}\right)\right]$$

$$R_k = \sqrt{5}.\left[cos\left(\frac{53° + k.360°}{2}\right) + i.sen\left(\frac{53° + k.360°}{2}\right)\right].$$

Para $k = 0 \Rightarrow R_0 = \sqrt{5}.[\cos(26{,}5°) + i.\text{sen}(26{,}5°)]$.

Consultando a tabela trigonométrica (ou utilizando uma calculadora científica), a primeira raiz é

$$R_0 = \sqrt{5}.[\cos(26{,}5°) + i.\text{sen}(26{,}5°)] \cong \underbrace{2{,}23}_{\sqrt{5}}.[0{,}9 + i.0{,}45] \cong 2 + i \Rightarrow \boxed{R_0 = 2 + i}.$$

A segunda raiz é $(k = 1) \Rightarrow$

$$R_1 = \sqrt{5}.[cos(206{,}5°) + i.sen(206{,}5°)] \Rightarrow \boxed{R_1 = -2 - i}.$$

Uma solução alternativa para esse exemplo, pode ser encontrada utilizando a definição. Supondo $z = x + yi$. Então,

$$z^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 \Rightarrow z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi \Rightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 3 + 4i \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Rightarrow 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{y}}.$$

Esse método utilizando a definição, não é indicado para uma raiz enésima maior que 2, devido a complexidade das equações geradas.

Substituindo na 1ª equação, obtemos

$$\left(\frac{2}{y}\right)^2 - y^2 = 3 \Rightarrow y^4 + 3y^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 1 \Rightarrow x = 2. \\ y'' = -1 \Rightarrow x = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{R_0 = 2 + i}. \\ \boxed{R_1 = -2 - i}. \end{cases}$$

EXERCÍCIOS 16.5

1) Calcule a raiz cúbica de 8.

2) Calcule a raiz quarta de 1.

3) Calcule a raiz cúbica de $1 + i$.

4) Calcule a raiz quadrada de $1 + \sqrt{3}i$.

5) Calcule:

a) $\sqrt{5 + 12i}$ b) $\sqrt{6 - 8i}$ c) $\sqrt{5i}$

6) (VUNESP) As soluções da equação $z^3 = i$, onde z é um número complexo e $i^2 = -1$, são:

a) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ou } z = -i$

b) $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ou } z = -i$

c) $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ ou } z = -i$

d) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ou } z = -i$

e) $z = \pm\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ ou } z = -i$

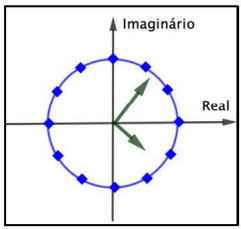
7) As representações gráficas dos complexos z tais que $z^3 = 8$ são os vértices de um:

a) quadrado.

b) triângulo retângulo.

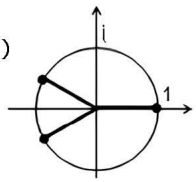
c) triângulo equilátero.
d) uma circunferência.
e) losango.

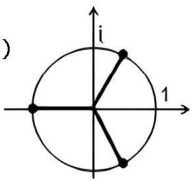
8) (UFRJ) Um jantar secreto é marcado para a hora em que as extremidades dos ponteiros do relógio forem representadas pelos números complexos z e w a seguir.

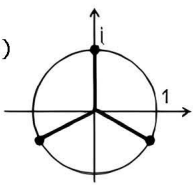


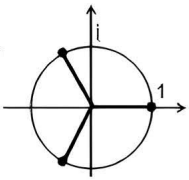
$Z = \alpha\left(\cos\frac{\pi}{2} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$, w = Z^2, sendo α um número real fixo, 0< α<1. Determine a hora do jantar.

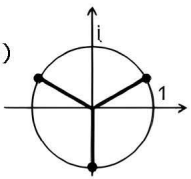
9) (VUNESP) O diagrama que melhor representa as raízes cúbicas de $-i$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


10) (UNIFESP) Os números complexos Z_1, $Z_2 = 2i$ e $Z_3 = a\sqrt{3} + ai$, onde a é um número real positivo, representam no plano complexo vértices de um triângulo equilátero. Dado que $|Z_2 - Z_1| = 2$, o valor de a é:

a) 2 b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

11) (UERJ) João desenhou um mapa do quintal de sua casa, onde enterrou um cofre. Para isso, usou um sistema de coordenadas retangulares, colocando a origem O na base de uma mangueira, e os eixos OX e OY com sentidos oeste-leste e sul-norte, respectivamente. Cada ponto (x,y), nesse sistema, é a representação de um número complexo $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$.

Para indicar a posição (x_1, y_1) e a distância d do cofre à origem, João escreveu a seguinte observação no canto do mapa: $x_1 + iy_1 = (1+i)^9$.

Calcule:

a) as coordenadas (x_1, y_1);
b) o valor de d.

16.2. Polinômios

Definição 16.2.1: Chama-se **função polinomial** ou simplesmente **polinômio** a função $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Os números complexos: a_n, a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots$, a_2, a_1, a_0 são denominados de **coeficientes**, a_0 de **termo independente,** e as expressões $a_n.x^n$, $a_{n-1}.x^{n-1}$, $a_{n-2}.x^{n-2}, \ldots, a_2.x^2 + a_1.x$, a_0 são denominadas de **termos**.

Os polinômios com um termo são chamados de **monômios**, com dois termos de **binômios** e com três termos de **trinômios**. Polinômios com mais de três termos não possuem nomes especiais.

Exemplos de polinômios:

- $3x^5 - 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x + 5$

  Nesse polinômio, temos: $a_5 = 3$, $a_4 = -2$, $a_3 = 1$, $a_2 = -7$, $a_1 = -4$ e $a_0 = 5$.
- $2x^3 - \sqrt{3}x^2 - \frac{1}{4}x \Rightarrow a_3 = 2$, $a_2 = -\sqrt{3}$, $a_1 = -\frac{1}{4}$ e $a_0 = 0$. (Trinômio).
- $3x^3 - 21 \Rightarrow a_3 = 3$, $a_2 = 0$, $a_1 = 0$ e $a_0 = -21$. (binômio).
- $-2ix + 10 \Rightarrow a_1 = -2i$ e $a_0 = 10$. (binômio).
- $11 \Rightarrow a_0 = 11$. (monômio).

Não são polinômios as expressões do tipo:

- $3x^{\frac{4}{3}} - 13$, pois possui o expoente fracionário na variável.
- $x^3 - x^{-2} + 1$, possui expoente negativo na variável.

Definição 16.2.2: Denominamos de **grau de um polinômio** o maior expoente da variável entre os termos que possuem coeficientes não nulos, e indicamos por $gr(P)$ (Lê-se: grau de P).

Exemplos:

- $-5x^3 + 4x + 5$ é um polinômio de grau 3 ou do terceiro grau.
- $x - 1$ é um polinômio de grau 1 ou do 1º grau.
- $x^{11} + x^3 + x^2 + x + 1$ é um polinômio de grau 11.
- $P(x) = mx^2 + 4x - 5 \Rightarrow gr(P) = 2$, se m $\neq$ 0. Para m =0, $gr(P) = 1$.

Definição 16.2.3: Um polinômio é dito **nulo** ou **identicamente nulo**, quando todos os seus coeficientes são iguais a zero.

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = \cdots = a_2 = a_1 = a_0 = 0 \Rightarrow P(x) = 0.$$

Definição 16.2.4: Dois polinômios $P(x)$ e $N(x)$ são dito **iguais (ou idênticos)** se, e somente se, os coeficientes de $P(x)$ forem ordenadamente iguais aos de $N(x)$ ou, por consequência, a diferença $P(x) - N(x)$ é um polinômio nulo.

16.2.1. Valor numérico de um polinômio

Dado um polinômio $P(x)$, denominamos de $P(a)$ e lê-se "P de a", o valor numérico do polinômio para $x = a$.

Exemplo: Vamos calcular o valor numérico do polinômio $P(x) = -5x^4 - 11$ para $x = 2$.

Solução: Substituindo x por 2, temos

$$P(2) = -5.2^4 - 11 \Rightarrow P(2) = -5.16 - 11 \Rightarrow P(2) = -80 - 11 \Rightarrow \boxed{P(2) = -91}.$$

2º exemplo: Vamos calcular o valor numérico do polinômio $P(x) = x^5 + x^3 + x + 3$ para $x = -1$.

Solução: Substituindo x por -1, encontramos

$$P(-1) = (-1)^5 + (-1)^3 + (-1) + 3 \Rightarrow P(-1) = -1 - 1 - 1 + 3 \Rightarrow \boxed{P(-1) = 0}.$$

16.2.2. Raiz de um polinômio

Definição 16.2.2.1: Chama-se raiz de um polinômio $P(x)$, o valor numérico $x \in \mathbb{C}$, tal que $P(x) = 0$.

Exemplo: Calcule a raiz do polinômio $P(x) = 3x - 33$.

Solução: Temos que encontrar um valor de x, tal que $P(x) = 0$.

Ao fazer $P(x) = 0$, encontramos:

$$P(x) = 3x - 33 \Rightarrow 0 = 3x - 33 \Rightarrow 0 - 3x = -33 \Rightarrow x = \frac{-33}{-3} \Rightarrow \boxed{x = 11}.$$

Logo, 11 é raiz do polinômio $P(x) = 3x - 33$, pois $3.11 - 33 = 0$.

2º exemplo: Calcule a(s) raiz(es) do polinômio $P(x) = 2x^2 + 5x - 7$.

Solução: Fazendo $P(x) = 0$, dispomos de

$$P(x) = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0 \text{ (Equação do 2º grau).}$$

$$2x^2 + 5x - 7 = 0 \ (a = 2, b = 5, c = -7)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4.2.(-7) = 25 + 56 \Rightarrow \Delta = 81.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(5) \pm \sqrt{81}}{2.2} = \frac{-5 \pm 9}{4} = \begin{cases} x' = \dfrac{-5+9}{4} = 1. \\ x'' = \dfrac{-5-9}{4} = \dfrac{-7}{2}. \end{cases}$$

Veremos adiante como calcular raízes de polinômios de grau superior ao 2º grau.

Logo, 1 e $\frac{-7}{2}$ são raízes do polinômio $P(x) = 2x^2 + 5x - 7$, pois:

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow 2.1^2 + 5.1 - 7 = 2 + 5 - 7 = 0. \\ x = \dfrac{-7}{2} \Rightarrow 2.\left(\dfrac{-7}{2}\right)^2 + 5.\left(\dfrac{-7}{2}\right) - 7 = 2.\dfrac{49}{4} - \dfrac{35}{2} - 7 = \dfrac{14}{2} - 7 = 0. \end{cases}$$

EXERCÍCIOS 16.6

1) Calcule o valor numérico do polinômio $P(x) = 3x^5 - 7x + 11$ para:

a) $x = -2$. b) $x = 0$.

2) Verifique o grau de cada polinômio a seguir.

a) $P(x) = x$

b) $P(x) = x^7 + 3x^{11} + 2$

c) $P(x) = 13x^4 + 2x^3 + 20$

d) $P(x) = 1 + x + x^{50} + x^{100}$

3) Qual o valor de m para que o polinômio $P(x) = (3m - 9)x^2 - 3x + 6$, seja do 1º grau?

4) Calcule a raiz dos seguintes binômios.

a) $P(x) = -7x - 14$ b) $M(x) = x - 100$

5) Calcule a(s) raiz(es) dos seguintes polinômios:

a) $P(x) = x^2 - 6x + 9$.

b) $Q(x) = x^2 + 3x + 3$

16.2.3. Operações com polinômios

Já estudamos de alguma forma as operações de adição, subtração e multiplicação de polinômios (com exceção da divisão) nesse curso do ensino médio ou no ensino fundamental. Vamos revisar.

Soma e subtração: Nesse caso devemos operar (somar ou subtrair), os coeficientes cujos termos são semelhantes (termos que possuem o mesmo expoente na variável).

Exemplo: Dados os polinômios: $p(x) = 3x^5 - 11x^4 + 7x - 2$ e $q(x) = 13x^4 + 9x^2 + 3$, temos

a) $p(x) + q(x) = 3x^5 - 11x^4 + 7x - 2 + 13x^4 + 9x^2 + 3$

$= 3x^5 + (13 - 11)x^4 + 7x + (3 - 2)$

$= 3x^5 + 3x^4 + 7x + 1.$

b) $p(x) - q(x) = 3x^5 - 11x^4 + 7x - 2 - (13x^4 + 9x^2 + 3)$

$= 3x^5 - 11x^4 + 7x - 2 - 13x^4 - 9x^2 - 3$

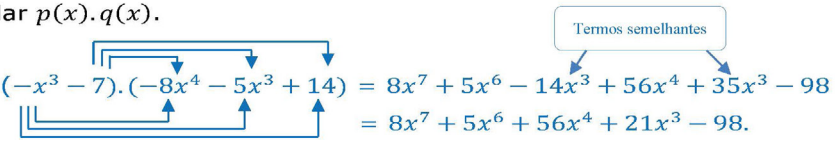
$= 3x^5 - 24x^4 + 7x - 5.$

Multiplicação por um número: Para multiplicar um número por um polinômio, fazemos a multiplicação de todos os coeficientes do polinômio por esse número.

Exemplo: $10.(2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 8) = 20x^4 - 30x^3 + 50x^2 + 60x - 80.$

Multiplicação de dois polinômios: Na multiplicação de dois polinômios, empregamos a propriedade distributiva, que consistem em multiplicar cada termo de um polinômio por todos os termos do outro. Ao final desses produtos, realizamos as operações de soma ou subtração com os termos semelhantes.

1º exemplo: Dados os polinômios: $p(x) = -x^3 + x - 7$ e $q(x) = -8x^4 - 5x^3 + 14$, vamos calcular $p(x).q(x)$.



O grau de cada polinômio envolvido no produto é determinado pelo seu termo de maior grau, e o produto entre os termos de maior grau define o grau do produto. Portanto, para dois polinômios, temos que:

$$gr(p.q) = gr(p) + gr(q).$$

O grau do produto de polinômios é igual a soma dos graus de cada polinômio

Veja no exemplo anterior que $gr(p) = 3$, $gr(q) = 4$ e $gr(p.q) = 3 + 4 = 7$.

2º exemplo: (UEL) O polinômio p tem grau $4n + 2$ e o polinômio q tem grau $3n - 1$, sendo n inteiro e positivo. O grau do polinômio $p.q$ é sempre:

a) igual ao máximo divisor comum entre $4n + 2$ e $3n - 1$
b) igual a $7n + 1$
c) inferior a $7n + 1$
d) igual a $12n^2 + 2n + 2$
e) inferior a $12n^2 + 2n + 2$

Solução: $gr(p.q) = gr(p) + gr(q) = 4n + 2 + 3n - 1 = \boxed{7n + 1}$. Letra b.

Divisão entre dois polinômios: Dividir o polinômio $p(x)$ por $d(x)$ significa obter os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, de modo que $\boxed{p(x) = d(x).q(x) + r(x)}$ e de forma que o grau de $r(x)$ seja menor que o grau de $d(x)$.

Nessa divisão, $p(x)$ é denominado de dividendo, $q(x)$ de quociente, $d(x)$ de divisor e $r(x)$ de resto da divisão.

A partir dessa definição podemos afirmar quanto ao grau, que $gr(p) = gr(d) + gr(q)$, o que implica em:

$$gr(q) = gr(p) - gr(d).$$

O grau do quociente é igual a diferença dos graus do dividendo e o do divisor

Além disso, há o teorema a seguir.

Teorema 16.2.3.1: O quociente e o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $d(x)$ existem e são únicos.

Demonstração: Supondo que o polinômio $p(x)$ tenha dois quocientes e dois restos diferentes. Ambos devem satisfazer a definição

$$p(x) = d(x).q_1(x)+r_1(x) \text{ e } p(x) = d(x).q_2(x)+r_2(x).$$

Como se tratam do mesmo polinômio, as expressões devem ser iguais. Logo,

$$d(x).q_1(x)+r_1(x) = d(x).q_2(x)+r_2(x) \Rightarrow \boxed{d(x).[q_1(x)-q_2(x)] = r_2(x)-r_1(x)}.$$

Na igualdade acima, o polinômio do 1º membro tem grau diferente do 2º membro e a identidade só ocorre quando ambos os membros são nulos. Assim, não há outra hipótese a não ser: $q_1(x) = q_2(x)$ e $r_1(x) = r_2(x)$. Demonstrando o teorema.

Já sabemos que os divisores e os restos são únicos. Agora, como calculá-los? Existem essencialmente dois métodos para determinar a divisão entre dois polinômios: o ***método de Descartes*** e o ***método da chave***.

✓ ***Método de Descartes:***

Esse método consiste em determinar os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ deixando incógnitos os seus coeficientes e aplicando, por conseguinte, a definição de divisão e a igualdade de polinômios.

Exemplo: Vamos dividir $p(x) = -2x^4 + 3x - 5$ por $d(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

Solução: Como $gr(q) = gr(p) - gr(d)$, temos $gr(q) = 4 - 2 = 2$. Assim, $q(x)$ é um polinômio da forma $q(x) = ax^2 + bx + c$. Como $gr(r) < gr(d) = 2$, $r(x)$ possui no máximo grau 1, o que podemos supor que seja da forma $r(x) = dx + e$.

Usando a definição, temos

$$p(x) = d(x).q(x) + r(x)$$
$$-2x^4 + 3x - 5 = (2x^2 - 2x + 1).(ax^2 + bx + c) + (dx + e) =$$
$$2ax^4 + 2bx^3 + 2cx^2 - 2ax^3 - 2bx^2 - 2cx + ax^2 + bx + c + dx + e =$$
$$= 2ax^4 + (2b - 2a)x^3 + (2c - 2b + a)x^2 + (-2c + b + d)x + c + e.$$

Como polinômios iguais devem ter coeficientes respectivos iguais, isso nos dá:

$$\begin{cases} 2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -1} \\ 2b - 2a = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1} \\ 2c - 2b + a = 0 \Rightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}} \\ -2c + b + d = 3 \Rightarrow \boxed{d = 3} \\ c + e = -5 \Rightarrow \boxed{e = -\frac{9}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \boxed{q(x) = -x^2 - x - \frac{1}{2}}. \\ r(x) = dx + e \Rightarrow \boxed{r(x) = 3x - \frac{9}{2}}. \end{cases}$$

Observe que, neste exemplo, tivemos um sistema com cinco incógnitas (a, b, c, d, e) e cinco equações, gerados pelo quociente de grau 2 e resto de grau 1. De uma forma geral, se o quociente é de grau m e o resto de grau n, teremos sempre um sistema com $m + n$ equações e incógnitas, tornando o método exaustivo para graus superiores. Um método de solução alternativo e prático será apresentado a seguir.

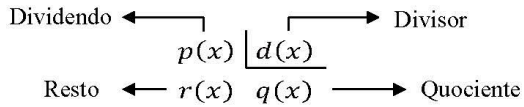
✓ ***Método da Chave:***

Para acompanhar os passos desse método, vamos dividir os mesmos polinômios do exemplo anterior: $p(x) = -2x^4 + 3x - 5$ por $d(x) = 2x^2 - 2x + 1$.

1º passo: Os polinômios precisam estar escritos em potências de x ordenadamente decrescentes.

Neste exemplo, os polinômios já estão.

2º passo: Dispor os polinômios na forma similar a uma divisão entre dois números naturais:



Neste exemplo, fica:

$$-2x^4 + 3x - 5 \;\big|\; 2x^2 - 2x + 1$$

3º passo: Para obter o primeiro monômio do quociente $q(x)$, dividimos o primeiro monômio de $p(x)$ pelo primeiro monômio de $d(x)$.

$$\frac{-2x^4}{2x^2} = \boxed{-x^2} \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} -2x^4 + 3x - 5 \;\big|\; 2x^2 - 2x + 1 \\ \hline -x^2 \end{array}$$

4º passo: Multiplica-se o monômio encontrado por todos os termos do divisor $d(x)$, trocando-se o sinal e colocando os resultados logo abaixo do polinômio $p(x)$. Em seguida, operam-se com os termos semelhantes.

$$\begin{array}{l} -2x^4 + 3x - 5 \;\big|\; 2x^2 - 2x + 1 \\ +2x^4 - 2x^3 + x^2 \quad\; -x^2 \\ \hline -2x^3 + x^2 + 3x - 5 \longrightarrow \textit{novo polinômio} \end{array}$$

5º passo: Repete-se sucessivamente o mesmo processo com os novos polinômios obtidos, até que o último polinômio (o resto) tenha grau menor que o grau do divisor $d(x)$.

$$\frac{-2x^3}{2x^2} = \boxed{-x}$$

$$\begin{array}{l} -2x^4 + 3x - 5 \;\big|\; 2x^2 - 2x + 1 \\ +2x^4 - 2x^3 + x^2 \quad\; -x^2 - x - \frac{1}{2} \longrightarrow q(x) \\ \hline -2x^3 + x^2 + 3x - 5 \\ +2x^3 - 2x^2 + x \\ \hline -x^2 + 4x - 5 \\ +x^2 - x + \frac{1}{2} \\ \hline +3x - \frac{9}{2} \Rightarrow r(x) \end{array}$$

$$\frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Como $gr(r) < gr(d)$, a divisão está finalizada.

Observação importante: Quando o último polinômio $r(x)$ for nulo, isto é, $r(x) = 0$, dizemos que o polinômio $p(x)$ **é divisível por** $d(x)$.

2º exemplo: Dividir $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1$ por $d(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.

Solução: Os polinômios já estão escritos em potências de x ordenadamente decrescentes.

$\frac{x^5}{x^3} = \boxed{x^2}$

$$\begin{array}{r|l} x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1 & x^3 - x^2 + x + 1 \\ \hline -x^5 + x^4 - x^3 - x^2 & x^2 + 2x - 1 \longrightarrow q(x) \\ \hline 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 1 & \\ -2x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2x & \\ \hline -x^3 + x^2 - x - 1 & \\ +x^3 - x^2 + x + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow p(x)$ é divisível por $d(x)$.

Observe ainda que

$$x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1 = (x^3 - x^2 + x + 1).(x^2 + 2x - 1)$$

ou seja,

$$\frac{x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + x + 1} = x^2 + 2x - 1.$$

3º exemplo: (UFSC-SC) Se o polinômio $2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$, qual o valor de $a - b$?

Solução: Um polinômio é divisível por outro quando o resto da divisão é zero (polinômio nulo).

Solução 1: Método da chave.

$\frac{2x^3}{2x^2} = \boxed{x}$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - ax^2 + bx + 2 & 2x^2 + 5x - 2 \\ \hline -2x^3 - 5x^2 + 2x & x + \frac{-a-5}{2} \longrightarrow q(x) \\ \hline (-a-5)x^2 + (b+2)x + 2 & \\ -(-a-5)x^2 - 5\left(\frac{-a-5}{2}\right)x + 2\left(\frac{-a-5}{2}\right) & \\ \hline \left[b + 2 - 5\left(\frac{-a-5}{2}\right)\right]x + \underbrace{2 - a - 5}_{-a-3} & \end{array}$$

$\frac{(-a-5)x^2}{2x^2} = \frac{-a-5}{2}$

Como o $r(x)$ precisa ser nulo, temos: $\begin{cases} b + 2 + 5\left(\frac{a+5}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{b = -7}. \\ -a - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}. \end{cases}$

Resposta: $a - b = -3 - (-7) = 4$.

Solução 2: Método de Descartes.

$gr(q) = gr(p) - gr(d) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow q(x) = mx + n.$

$p(x) = d(x).q(x) + r(x)$, como $r(x) = 0$, temos

$2x^3 - ax^2 + bx + 2 = (2x^2 + 5x - 2).(mx + n)$

$2x^3 - ax^2 + bx + 2 = 2mx^3 + 2nx^2 + 5mx^2 + 5nx - 2mx - 2n$

$2x^3 - ax^2 + bx + 2 = 2mx^3 + (2n + 5m)x^2 + (5n - 2m)x - 2n.$

$\begin{cases} 2m = 2 \Rightarrow m = 1 \\ 2n + 5m = -a \\ 5n - 2m = b \\ -2n = 2 \Rightarrow n = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -3}$ e $\boxed{b = -7}$. Assim: $a - b = -3 - (-7) = 4.$

4º exemplo: Sabendo que $p(x)$, $q(x)$ e $d(x)$ são polinômios de grau 10, 5 e 3, respectivamente. Qual o grau do polinômio $\frac{p(x).q(x)}{d(x)}$?

Solução: $\circ\ gr(p.q) = gr(p) + gr(q) = 10+5 = 15.$

$\circ\ gr\left(\frac{p.q}{d}\right) = gr(p.q) - gr(d) = 15 - 3 = 12.$

Resposta: 12.

EXERCÍCIOS 16.7

1) Considerando os polinômios $P(x) = 9x^5 + 3x^2 + 1$, $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e $H(x) = x - 1$, calcule:

a) $P(x) + Q(x) + H(x)$

b) $P(x) - Q(x) - H(x)$

c) $Q(x).H(x)$

d) $Q(x) \div H(x)$

e) $gr\left(\frac{[P(x)]^2.Q(x)}{H(x)}\right)$

2) Efetue as seguintes divisões:

a) $x^3 - 2x^2 + x + 2$ por $x^2 + 1$.

b) $6x^4 - 10x^3 - 4x^2 - 8x + 21$ por $2x - 4$.

c) $x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 2$ por $x^2 - 2x + 1$.

d) $x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 11x^4 + 10x^3 - 17x^2 - 13x + 3$ por $x^3 - x^2 + x + 1$.

3) Qual o polinômio que dividido por $x^2 - 9x + 6$ tem quociente $5x - 11$ e resto 4?

4) Determine o polinômio p, sabendo que, ao dividi-lo por $x^3 - x^2 + 3$, obtemos o quociente $x^2 - 4x + 5$ e resto zero.

5) (UFRGS) Se $P(x)$ é um polinômio de grau 5, então o grau do polinômio $[P(x)]^3 + [P(x)]^2 + 2.P(x)$ vale:

a) 3 b) 15 c) 20 d) 30 e) 45

6) (PUC-SP) Sendo $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + b)$ para todo x real, os valores de a e b são, respectivamente:

a) -1 e -1 b) 0 e 0 c) 1 e -1 d) -1 e 1 e) 1 e 1

7) (SANTA CASA-SP) Numa divisão de polinômios em que o dividendo é de grau n e o quociente é de grau $n - 4$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$, o grau do resto pode ser, no máximo, igual a:

a) 3 b) 4 c) 5 d) $n - 4$ e) $n - 5$

8) (UFRS) A divisão de $P(x)$ por $x^2 + 1$ tem quociente $x - 2$ e resto igual a 1. O polinômio $P(x)$ é:

a) $x^2 + x - 1$

b) $x^2 + x + 1$

c) $x^2 + x$

d) $x^3 - 2x^2 + x - 2$

e) $x^3 - 2x^2 + x - 1$

9) (UNIRIO) O resto da divisão de $P(x) = x^3 - x + 1$ por $d(x) = x^2 + x + 1$ é:

a) 0 b) $x + 2$ c) $x - 2$ d) $-x + 2$ e) $-x - 2$

10) (MACK-SP) O polinômio $P(x) = 2x^3 - ax^2 + bx + 2$ é divisível por $2x^2 + 5x - 2$. Então $a + b$ é:

a) -7 b) -3 c) 0 d) 7 e) -10

11) (PUC – SP) Os valores de A e B tais que: $\frac{1+x}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x}$, são respectivamente:

a) 2 e 1 b) 3 e 2 c) 1 e 2 d) 2 e 3 e) 1 e 3

12) (UNIRIO–RJ) Considere o polinômio: $P(x)=(x+2)^2.(x+4)^4.(x+6)^6 \ldots (x+18)^{18}$. O grau deste polinômio é:

a) $2 \cdot 9!$ b) 90 c) $2^9.9!$ d) 180 e) 18!

13) (UNIMONTES) As afirmações abaixo são falsas, EXCETO:

a) Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de grau n, então $P(x).Q(x)$ é de grau n^2.

b) Se $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios de grau n, então $P(x) + Q(x)$ é de grau $2n$.

c) O quociente de um polinômio de grau n por $(x - a)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

d) Se $P(x)$ é um polinômio de grau $(n + 1)$ e $Q(x)$ é um polinômio de grau $(n - 3)$, então o resto da divisão $P(x) \div Q(x)$ é um polinômio de grau 4.

16.2.4. Divisão de um polinômio por um binômio na forma x - a

De acordo com a definição de divisão, $p(x) = d(x).q(x) + r(x)$. Se o divisor $d(x)$ for um binômio do tipo $x - a$ (grau 1), o grau do resto precisa ser menor que um, ou seja, de grau zero. Nesse contexto, podemos simplesmente escrever $r(x)$ como r:

$$p(x) = (x - a).q(x) + r.$$

O valor pela qual o binômio $x - a$ se anula é a, e calculando $p(a)$, encontramos:

$$p(a) = \left(\underbrace{a - a}_{0}\right).q(x) + r \Rightarrow \boxed{p(a) = r}.$$

Demonstramos assim, o seguinte teorema.

Teorema 16.2.4.1 (Teorema do resto): O resto r da divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio do tipo $x - a$, com $a \in \mathbb{C}$, é igual a $p(a)$.

Por outro lado, se $p(a) = 0$, temos $r = 0$, e assim, $p(x)$ será divisível por $x - a$. Isso, por consequência, demonstra outro teorema que será apresentado a seguir.

Teorema 16.2.4.2 (Teorema de D'Alembert[15]): Um polinômio $p(x)$ é divisível por um binômio do tipo $x - a$ se, e somente se, a é raiz de $p(x)$.

Exemplo: Qual o resto da divisão de $P(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3$ por $d(x) = x - 2$.

Solução: Usando o método da chave.

$\frac{8x^3}{x} = \boxed{8x^2}$

$8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 \;\big|\; x - 2$

$-8x^3 + 16x^2 + 2x$ $\qquad 8x^2 + 4x + 6 \longrightarrow q(x)$

$4x^2 - 2x + 3$

$-4x^2 + 8x$

$+6x + 3$

$-6x + 12$

$\boxed{15} \longrightarrow resto\ r$

$\frac{4x^2}{x} = 4x$

Usando o teorema do resto:

Como $d(x) = x - 2$, a raiz é $a = 2$. E o resto é

$P(2) = 8.2^3 - 12.2^2 - 2.2 + 3 = 8.8 - 12.4 - 4 + 3 = 64 - 48 - 4 + 3 = \boxed{15}$.

2º exemplo: Verifique se o polinômio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 8x - 3$ é divisível por $d(x) = x + 3$.

Solução: Como $d(x) = x + 3$, a raiz é $a = -3$.

O resto é

[15] Matemático francês Jean R. D'Alembert (1717-1783).

$$P(-3) = 2(-3)^4 + 5(-3)^3 + 8(-3) - 3 = 2.81 + 5.(-27) - 24 - 3 \Rightarrow$$
$$P(-3) = 162 - 135 - 24 + 3 = 27 - 27 = 0.$$

Resposta: É divisível (de acordo com teorema de D'Alembert).

Já sabemos calcular de uma forma prática o resto da divisão de um polinômio por $x - a$. Agora, vamos aprender a calcular também o quociente. O método a seguir é denominado algoritmo de Briot-Ruffini[16].

Algoritmo de Briot-Ruffini: Considere o polinômio $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ que quando dividido por $x - a$ tem quociente $q(x) = b_{n-1}.x^{n-1} + b_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x^2 + b_1.x + b_0$. Aplicando a definição de divisão, temos

$$p(x) = (x - a).q(x) + r$$
$$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$$
$$(x - a).[\, b_{n-1}.x^{n-1} + b_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x^2 + b_1.x + b_0] + r$$
$$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$$
$$[b_{n-1}.x^n + b_{n-2}.x^{n-1} + b_{n-3}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x^3 + b_1.x^2 + + b_0.x]$$
$$- a.[\, b_{n-1}.x^{n-1} + b_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + b_2.x^2 + b_1.x + b_0] + r.$$

Igualando os coeficientes dos termos respectivos:

$b_{n-1} = \boxed{a_n}$

$b_{n-2} - a.b_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow \boxed{b_{n-2} = a_{n-1} + a.b_{n-1}}$

$b_{n-3} - a.b_{n-2} = a_{n-2} \Rightarrow \boxed{b_{n-3} = a_{n-2} + a.b_{n-2}}$

$\vdots$

$b_2 - a.b_3 = a_3 \Rightarrow \boxed{b_2 = a_3 + a.b_3}$

$b_1 - a.b_2 = a_2 \Rightarrow \boxed{b_1 = a_2 + a.b_2}$

$b_0 - a.b_1 = a_1 \Rightarrow \boxed{b_0 = a_1 + a.b_1}$

$r - a.b_0 = a_0 \Rightarrow \boxed{r = a_0 + a.b_0}$

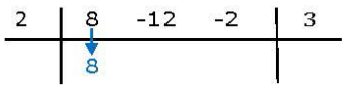
As igualdades acima demonstram o algoritmo de Briot-Ruffini, cuja disposição é a seguinte:

$Raiz\ de\ x - a$	$\overbrace{Coeficientes\ de\ P(x)}^{Sem\ o\ a_0}$	a_0
	$Coeficientes\ de\ q(x)$	$resto$

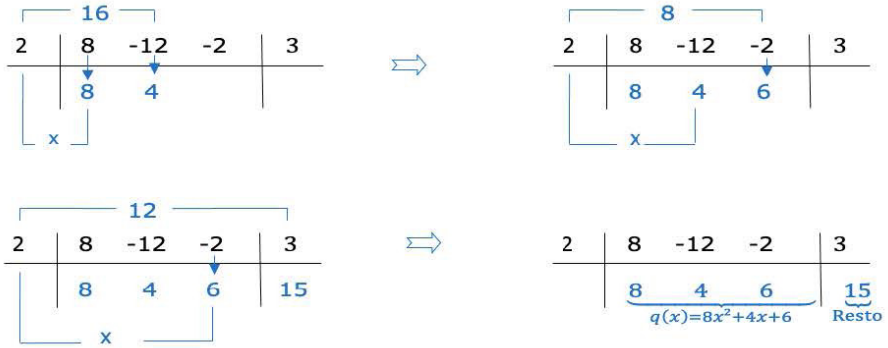
Para acompanhar as operações da demonstração acima, vamos dividir $P(x) = 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3$ por $x - 2$, conforme o 1º exemplo anterior.

Primeiro: Disponha a raiz e os coeficientes de $P(x)$, e em seguida, repita abaixo o primeiro coeficiente de $P(x)$.

[16] O dispositivo de Briot-Ruffini recebe esse nome em homenagem ao matemático francês Charles Briot (1817-1882) e ao matemático italiano Paolo Ruffini (1765-1822).

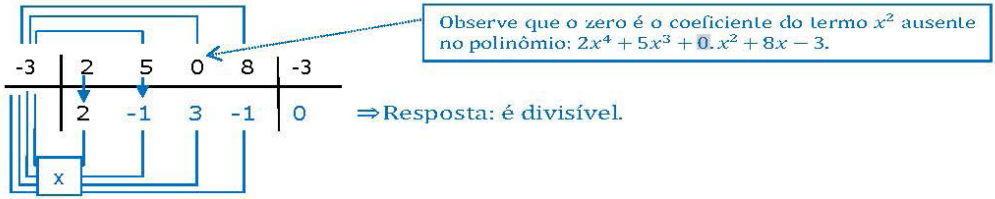


Segundo: Multiplica-se esse número pela raiz à esquerda e soma-se o resultado ao próximo coeficiente de P, repetindo esse processo sucessivamente até o último coeficiente a_0.



Veja que $(8x^2 + 4x + 6).(x - 2) + 15 = 8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = P(x)$.

2º exemplo (2º exemplo anterior): Verifique se o polinômio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 8x - 3$ é divisível por $d(x) = x + 3$.



16.2.5. Divisão de um polinômio por (ax + b)

Podemos aplicar o teorema do resto, o teorema de D'Alembert e o algoritmo de Briot-Ruffini (com adaptações) na divisão de um polinômio $P(x)$ por $ax + b$.

A raiz do binômio $ax + b$ é $x = \frac{-b}{a}$. Substituindo esse valor na definição $p(x) = (ax - b).q(x) + r$, encontramos

$$p\left(\frac{-b}{a}\right) = \left(\underbrace{a\frac{-b}{a} + b}_{0}\right).q(x) + r \Rightarrow \boxed{p\left(\frac{-b}{a}\right) = r}$$

Logo, o resto da divisão de $P(x)$ por $ax + b$ é o valor numérico da raiz de $ax + b$ (teorema do resto) e, $P(x)$ será divisível por $ax + b$ quando esse valor numérico for

igual a zero (teorema de D'Alembert).

Ainda nesse aspecto, como $p(x) = (ax - b).q(x) + r$, isso implica em:

$$\boxed{\left(x - \frac{b}{a}\right).\underbrace{q(x).a}_{q} + r}.$$

E desse modo, podemos aplicar também o algoritmo de Briot-Ruffini para a raiz $\frac{b}{a}$ e obteremos o mesmo resto, porém um quociente q dividido por a, ou seja, $q(x) = \frac{q}{a}$.

Exemplo: Vamos dividir $x^4 - x^2 - 3x$ por $2x - 4$.

Solução: A raiz é: $2x - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$.

2	1	0	-1	-3	0
	1	2	3	3	6
			$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{q}$		$\underbrace{\quad}_{r(x)}$

Cálculo do quociente:

$$q(x) = \frac{q}{a} = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 3}{2} \Rightarrow \boxed{q(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{3}{2}}.$$

16.2.6. Divisão de um polinômio por (x - a)(x - b)

Teorema 16.2.6.1: Se um polinômio $P(x)$ é divisível separadamente por $x - a$ e $x - b$, com $a \neq b$, então $P(x)$ é divisível pelo produto $(x - a)(x - b)$.

Demonstração: Dividindo $P(x)$ por $(x - a)(x - b)$, temos um resto na forma $r(x) = mx + n$ e, pela definição, $P(x) = q(x).(x - a)(x - b) + mx + n$.

Como $P(a) = 0$ (P *divisível por* a) e $P(b) = 0$ (P *divisível por* b), temos

$$\left.\begin{array}{l} P(a) = q(a).\underbrace{(a - a)}_{0}(a - b) + ma + n \Rightarrow \boxed{ma + n = 0} \\ P(b) = q(b).(b - a)\left(\underbrace{b - b}_{0}\right) + mb + n \Rightarrow \boxed{mb + n = 0} \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{c} \Rightarrow m = 0 \text{ e } n = 0 \Rightarrow \\ r(x) = 0. \end{array}}$$

Claramente a recíproca do teorema é verdadeira.

Observe a restrição do teorema para $a \neq b$, pois no caso de $a = b$, teremos somente uma equação acima, $ma + n = 0$, e nesse caso, não podemos garantir que $m = n = 0$. Como exemplo, veja que $x^2 - 1$ é divisível por $(x - 1)$, porém não é divisível por $(x - 1).(x - 1)$.

É possível dividir um polinômio $P(x)$ por $x - a$ e $x - b$ utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini (com adaptações). Denominando de q_a, q_b, r_a e r_b, os quocientes e os restos de $P(x)$ quando divididos por a e por b, respectivamente, temos

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = q_a.(x - a) + r_a \\ q_a = q_b.(x - b) + r_b \end{array}\right\} \Rightarrow P(x) = \underbrace{q_b}_{q(x)}.(x - a)(x - b) + \underbrace{r_a(x - a) + r_b}_{r(x)}.$$

Nesses moldes, podemos utilizar o algoritmo de Briot-Ruffini duas vezes para dividir um polinômio $P(x)$ pelo produto $(x-a)(x-b)$. Para isso, basta dividir a primeira vez o polinômio por $(x-a)$ e o resultado dessa divisão por $(x-b)$. E desse modo, obteremos: $\boxed{q(x)=q_b}$ e $\boxed{r(x)=r_b(x-a)+r_a}$.

Exemplo: Calcule o quociente e o resto da divisão de $x^4-5x^3+5x^2+12x-3$ por $(x-2).(x-3)$.

2	1	-5	5	12	- 3
	1	−3	−1	10	17
			q_a		r_a

3	1	−3	−1	10
	1	0	−1	7
		$q(x)=x^2-1$		r_b

Cálculo do resto:

$r(x)=r_b(x-a)+r_a$

$r(x)=7(x-2)+17$

$r(x)=7x-14+17$

$r(x)=7x+3$

Respostas: $q(x)=x^2-1$ e $r(x)=7x+3$.

2º exemplo: (MACK-SP) Um polinômio $P(x)$ ao ser dividido por $x-1$ deixa resto 2 e ao ser dividido por $x-2$ deixa resto 1. Então o resto da divisão desse polinômio por $(x-1)(x-2)$ é:

a) $x-3$ b) $-x+3$ c) $x+3$ d) $x-5$ e) $-x+5$

Solução: Denotando $r(x)=mx+n$ como o resto de $p(x)$ ao ser dividido por $(x-1)(x-2)$, temos: $p(x)=q(x)(x-1)(x-2)+mx+n$.

Pelo teorema do resto, $p(1)$ é o resto de $p(x)$ ao ser dividido por $x-1$, então

$$p(1)=q(1).\left(\overbrace{1-1}^{zero}\right).(1-2)+m.1+n=\boxed{m+n=2}.$$

E $p(2)$ é o resto de $p(x)$ ao ser dividido por $x-2$. Assim,

$$p(2)=q(2).(2-1).\left(\overbrace{2-2}^{zero}\right)+m.2+n=\boxed{2m+n=1}.$$

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} m+n=2 \\ 2m+n=1 \end{cases}$, encontramos

$$m=-1 \text{ e } n=3 \Rightarrow r(x)=-x+3 \text{ (letra b).}$$

3º exemplo: (MACKENZIE) Observando a divisão dada, de polinômios, podemos afirmar que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é:

a) -1 b) -2 c) 2 d) 3 e) -3

P(x)	x^2-x-2
$2x-1$	$Q(x)$

Solução: Pelo teorema do resto, $P(-1)$ é o resto de $P(x)$ dividido por $x+1$. Segundo a divisão da figura, $P(x)$ pode escrito na forma:

$$P(x)=(x^2-x-2).q(x)+2x-1$$

Calculando p(1), temos

$$P(-1)=[(-1)^2-(-1)-2].q(-1)+2(-1)+1=[1+1-2].q(-1)-2-1$$

$$P(-1)=[0].q(-1)-3 \Rightarrow P(-1)=-3 \text{ (resto). Resposta: letra a.}$$

EXERCÍCIOS 16.8

1) Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão de:

a) $3x^4 - x^2 - 1$ por $x - 1$.

b) $x^4 + x^3 + x^2 - 1$ por $x - 4$.

c) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 8x + 15$ por $x + 5$.

2) Calcule o resto da divisão de:

a) $-7x^4 + x^3 - 3x^2 + 11$ por $x + 3$.

b) $5x^3 + 3x^2 - 4$ por $x + 2$.

c) $x^5 + x^3 - x^2 + \frac{1}{16}$ por $x - \frac{1}{2}$.

3) Qual o valor de m no polinômio $x^4 + x^3 + (m-1)x^2 - 4$, para que ele seja divisível por $x - 1$?

4) (UFRS) O resto da divisão de $x^3 + ax^2 - x + a$ por $x - 1$ é igual a 4. O valor de a é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 6

5) (PUC-SP) Qual é o resto da divisão de $P(x) = x^{31} + 31$ por $x + 1$?

a) 0 b) 1 c) 30 d) 31 e) um polinômio de grau 30

6) (UCPR) O resto da divisão de $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 5x + 1$ por $x - 2$ é:

a) 1 b) 20 c) 0 d) 19 e) 2

7) Está representada abaixo, a divisão de um polinômio $p(x)$ por $x - a$, pelo algoritmo de Briot-Ruffini. Qual o valor de a, b, c e d?

a	-3	5	2	3
	b	-1	c	d

8) (MACK-SP)O resto da divisão de $4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ por $x + 2$ é igual a 1. Então m vale:

a) 22 b) -20 c) 20 d) 10 e) -10

9) Ao dividir o polinômio $2x^2 - 6x + 9$ por $x - a$, encontramos resto igual a 5. Qual o valor de a?

10) (PUC-RS) O resto da divisão de $P(x) = x^n + a^n$ pelo binômio $x + a$, onde n é par, é:

a) 0 b) a^n c) $2a^n$ d) $4a^n$

11) O resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^{2n+1} - 2x^{2n} - x^{2n-1} + 3$, onde $n \in \mathbb{N}$, por $x + 1$ é:

a) 2 b) -2 c) 1 d) 0 e) 4

12) Calcule o quociente e o resto da divisão do polinômio $2x^6 - 4x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 1$ por $2x + 6$.

13) Calcule o quociente e o resto da divisão do polinômio $6x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ por $3x - 1$.

14) Calcule m e n, sabendo que $3x^4 - mx^3 + 4x^2 + nx + 2$ é divisível por $(x - 2)(x - 1)$.

15) (PUC-PR) Calcule a e b para que o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$ seja divisível por $x^2 - 1$.

a) $a = -1$ e $b = -3$
b) $a = -1$ e $b = 3$
c) $a = -1$ e $b = 3$
d) $a = 1$ e $b = -3$
e) $a = 1$ e $b = 4$

16) (PUC – MG) O polinômio $P(x)$ dividido por $x - 1$ dá resto - 4 e dividido por $x - 2$ dá resto 4. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ é:

a) $2x - 6$
b) $3x - 7$
c) $5x - 9$
d) $6x - 10$
e) $8x - 12$

17) (ITA–SP) Um polinômio $P(x)$ dividido por $x + 1$ dá resto -1, por $x - 1$ dá resto 1 e por $x + 2$ dá resto 1. O resto da divisão do polinômio $P(x)$ por $(x + 1)(x - 1)(x + 2)$ é:

a) $x^2 - x + 1$
b) $x - 1$
c) $x^2 + x + 1$
d) $x^2 - x - 1$
e) $x^2 + x - 1$

16.2.7. Equações polinomiais

Dadas duas funções polinomiais $f(x)$ e $g(x)$, chama-se de **equação polinomial** a sentença $f(x) = g(x)$, onde os valores de x que tornam a sentença verdadeira são denominados de raízes da equação ou conjunto solução.

Duas equações polinomiais são equivalentes quando apresentam o mesmo conjunto solução.

1º exemplo: Resolva a equação polinomial $x^2 - x - 2 = x^2 + x$.

Passando tudo para o 1º membro da equação, dispomos de

$$x^2 - x - 2 - x^2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{-2x - 2 = 0}$$

$$-2x - 2 = 0 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{-2} \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow S = \{-1\}.$$

As equações polinomiais $-2x - 2 = 0$ e $x^2 - x - 2 = x^2 + x$, são equivalentes e apresentam a mesma raiz (ou conjunto solução).

2º exemplo: Resolva a equação polinomial $-2x^2 + 5 = -3x^2 + 2x$.

Passando tudo para o 1º membro da equação, temos

$$-2x^2 + 5 + 3x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - 2x + 5 = 0}.$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \\ c = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.5}}{2.1} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16.(-1)}}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{16}.\overbrace{\sqrt{-1}}^{i}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = \begin{cases} x' = 1 + 2i \\ x'' = 1 - 2i \end{cases} \Rightarrow S = \{1 + 2i\,, 1 - 2i\}.$$

A equação original $-2x^2 + 5 = -3x^2 + 2x$ e a equação $x^2 - 2x + 5 = 0$ são equivalentes e apresentam as mesmas raízes (ou mesmo conjunto solução).

Por esses exemplos, notamos que é possível transformar uma equação $f(x) = g(x)$ em uma equivalente $f(x) - g(x) = 0$. Assim, toda equação polinomial pode ser expressa como uma equação da forma

$$\boxed{a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0} \; de\ grau\ n.$$

Os dois exemplos anteriores apresentaram equações do 1º e 2º grau, respectivamente, sem grandes dificuldades em resolvê-las. Agora, como resolver uma equação de grau $n \geq 3$ (de grau maior ou igual a 3)?

Alguns teoremas a seguir podem nos ajudar nesse sentido.

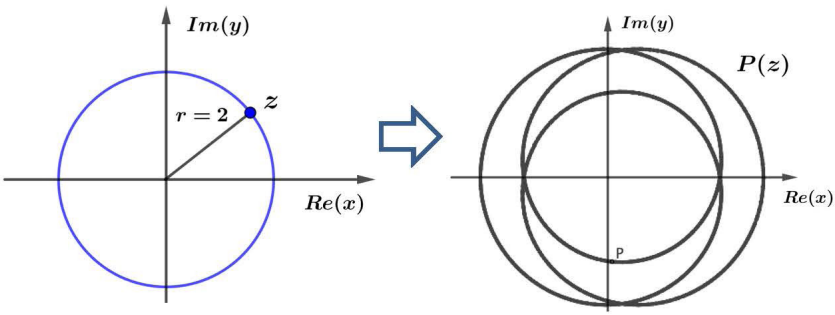
Teorema 16.2.7.1 (Teorema fundamental da álgebra - TFA): Toda equação polinomial $a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$ de grau $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Demonstração: Considere uma função polinomial $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dada por $p(z) = a_n.z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + a_{n-2}.z^{n-2}+\ldots+a_2.z^2 + a_1.z + a_0$ em que a_n, a_{n-1}, a_{n-2},..., a_2, a_1, a_0 são números complexos. As imagens de p são também números complexos e o que precisamos provar é que existe ao menos um complexo z, tal que z é raiz do polinômio dado, ou seja, raiz $p(z) = 0$.

Para esse fim, não vamos analisar todas imagens possíveis aleatoriamente, pois são infinitas. Em vez disso, iremos focar somente nas imagens de um conjunto de números complexos que estão a uma distância r da origem do plano de Argand-Gauss. Em outras palavras, analisaremos apenas as imagens dos números complexos que estão sobre um círculo de raio r.

Como a função polinomial $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ é contínua, as imagens de uma curva fechada simples, como o círculo, também formam outra curva fechada (o ponto inicial e final são os mesmos), mas não necessariamente simples, o que significa que a curva pode cruzar em si mesma.

Exemplo: A seguir está o gráfico elaborado pelo software geogebra com todas as imagens de $p(x) = x^3 + x + 1$ geradas por todos os números complexos z de raio igual $r = 2$.



Complexos z de raio 2 — Imagens de z geradas pelo software.

Observe a curva fechada, no entanto, cruza em si mesma.

Analisemos, então, as imagens do polinômio $p(z) = a_n.z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + a_{n-2}.z^{n-2}+\ldots+a_2.z^2 + a_1.z + a_0$, geradas pelos números complexos z, em torno de um círculo de raio r.

Substituindo z na forma trigonométrica $z = r.(cos\theta + isen\theta)$, temos:

$$p(z) = a_n.[r.(cos\theta + isen\theta)]^n + a_{n-1}.[r.(cos\theta + isen\theta)]^{n-1} + a_{n-2}.[r.(cos\theta + isen\theta)]^{n-2}+\ldots+a_2.[r.(cos\theta + isen\theta)]^2 + a_1.[r.(cos\theta + isen\theta)] + a_0.$$

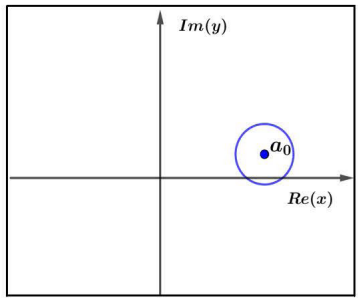
Aplicando a 1ª fórmula de Moivre, dispomos de:

$$p(z) = a_n.[r^n.(\cos n\theta + isen\, n\theta)] + a_{n-1}.[r^{n-1}.(\cos(n-1)\theta + isen\,(n-1)\theta)] + a_{n-2}.[r^{n-2}.(\cos(n-2)\theta + isen\,(n-2)\theta)] + \cdots + a_2.[r^2.(\cos 2\theta + isen\, 2\theta)]$$

$$+ a_1.[r.(cos\theta + isen\theta)] + a_0.$$

Os valores de seno e cosseno dos argumentos de todas as parcelas dessa soma variam entre -1 e 1. Desse modo, o valor de cada parcela depende consideravelmente dos raios r^n, r^{n-1}, $r^{n-2}, \ldots, r$ das imagens. Com base nisso, analisemos somente os casos extremos, ou seja, os casos em que r é extremamente pequeno e extremamente grande.

Se r for extremamente pequeno (bem próximo de zero), a parcela preponderante dessa soma será a_0, levemente afetada pelas outras parcelas. Desse modo, $p(z)$ será bem próximo de a_0, e a imagem do polinômio será uma curva próxima de um círculo centrado em torno do complexo a_0. Observe que a origem do plano será externa a esse círculo.

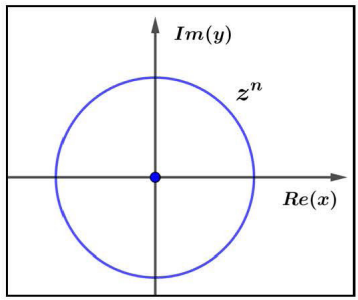


Imagens de $p(z)$ em torno de a_0

Agora, colocando r^n em evidência:

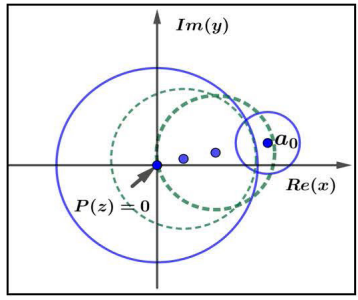
$$p(z) = r^n[a_n.(\cos n\theta + isen\, n\theta)] + \frac{a_{n-1}}{r}.[(\cos(n-1)\theta + isen\,(n-1)\theta)]$$
$$+ \frac{a_{n-2}}{r^2}[(\cos(n-2)\theta + isen\,(n-2)\theta)] + \cdots + \frac{a_2}{r^{n-2}}.[(\cos 2\theta + isen\, 2\theta)]$$
$$+ \frac{a_1}{r^{n-1}}.[(cos\theta + isen\theta)] + \frac{a_0}{r^n}.$$

Se r for extremamente grande, a parcela preponderante na soma será $r^n[a_n.(\cos n\theta + isen\, n\theta)]$, isto é, a imagem será uma curva próxima de um círculo de centro na origem e raio r^n, ligeiramente afetada pelas demais parcelas.



Imagens de $p(z)$ em torno da origem

Para que a origem do sistema passe de exterior para interior de um círculo (ou qualquer curva fechada), para algum valor de r, é preciso que a curva passe pela origem. Isto é, existe, ao menos um complexo z, tal que $p(z) = 0$. Isso completa a prova do teorema.



Alguma imagem de $p(z)$ é zero

Teorema 16.2.7.2 (Teorema da decomposição): Todo polinômio $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2}+\ldots+a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ de grau $n \geq 1$, pode ser decomposto na forma

$$\boldsymbol{P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)},$$

em que r_1, r_2, r_3,..., r_n são raízes de $P(x)$.

Demonstração: Como $P(x)$ tem grau $n \geq 1$, isso implica que ele tem pelo menos uma raiz complexa, de acordo com o teorema fundamental da álgebra. Supondo que r_1 é uma das raízes, podemos aplicar o teorema de D'Alembert para afirmar que $P(x)$ é divisível por $(x - r_1)$, ou seja

$$P(x) = (x - r_1)q_1(x) \qquad (1).$$

Se $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1 \geq 1$, então pelo teorema fundamental da álgebra, $q_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa. Supondo que r_2 seja outra raiz, temos pelo teorema de D'Alembert que $q_1(x)$ é divisível por $(x - r_2)$, isto é

$$q_1(x) = (x - r_2)q_2(x) \qquad (2).$$

Do mesmo modo, se $q_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2 \geq 1$, então pelo mesmo teorema fundamental da álgebra, $q_2(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa. Seja r_3 essa raiz. Pelo teorema de D'Alembert, $q_2(x)$ é divisível por $(x - r_3)$, e isso pode ser escrito como

$$q_2(x) = (x - r_3)q_3(x) \qquad (3).$$

Repetindo esse procedimento n vezes, temos

$$q_{n-1}(x) = (x - r_n)q_n(x) \qquad (n)$$

E substituindo as equações dos quocientes de trás pra frente, até a equação (1), dispomos de

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n)q_n(x).$$

Pela definição de igualdade de polinômios, $q_n(x) = a_n$. Logo,

$$\boxed{P(x) = a_n(x - r_1)\,(x - r_2)\,(x - r_3)\ldots(x - r_n)}.$$

Demonstrando o teorema.

Além disso, como os quocientes são únicos, essa decomposição (ou fatoração) é única, a não ser pela ordem dos fatores.

O teorema da decomposição e sua demonstração acima comprovam que:

> Um polinômio de grau n tem exatamente n raízes complexas.

No entanto, essas raízes não são necessariamente distintas, ou seja, r_1 pode ser igual a r_2 que também pode ser igual a qualquer outro r_n, gerando fatores repetidos na decomposição na forma:

$$(x - r_n)^{\alpha}.$$

Onde α é denominada de **multiplicidade da raiz** r_n.

Exemplo: $P(x) = 2(x-3)^2(x+1)$.

Esse polinômio possui três raízes (tem grau 3), sendo duas raízes iguais a 3 e uma igual a -1. Portanto, a raiz 3 possui multiplicidade 2 e a raiz -1, não possui multiplicidade.

2º exemplo: $P(x) = x^7.(x-4)^3$.

Esse polinômio possui como raízes o zero de multiplicidade 7 e o 4 de multiplicidade 3.

Em muitos contextos, os termos "raízes" e "soluções" são utilizados indistintamente. No entanto, a distinção entre eles pode surgir ao discutir a quantidade de soluções de uma equação polinomial em comparação com a quantidade de raízes do polinômio equivalente. No 2º exemplo anterior, o polinômio $P(x) = x^7.(x-4)^3$ possui 10 raízes, enquanto a equação $x^7.(x-4)^3 = 0$ tem apenas duas soluções:{0, 4}.

3º exemplo: Vamos escrever um polinômio de grau 3, que possui as seguintes raízes 1, -2 e 3.

Solução: Como o grau do polinômio é 3, então 1, -2 e 3 são as únicas raízes. Pelo teorema da decomposição, temos

$$P(x) = a_n(x-1)\,(x-(-2))\,(x-3)$$

$$P(x) = a_n(x-1)\,(x+2)\,(x-3)$$

$$\boxed{P(x) = a_n(x^3 - 2x^2 - 5x + 6)}.$$

Observação: Podemos gerar vários polinômios que tem como raízes 1, -2 e 3, basta atribuir valores para a_n diferentes de zero. Como exemplo, para a_n=1, o polinômio é

$$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

4º exemplo: Vamos escrever um polinômio de grau 4, que possui as seguintes raízes $-3i$ e $3i$, ambas de multiplicidade 2.

Solução: Como o grau do polinômio é 4, os complexos $-3i$ e $3i$ são as únicas raízes. Pelo teorema da decomposição, dispomos de

$$P(x) = a_n(x-3i)^2\big(x-(-3i)\big)^2 \Rightarrow\ P(x) = a_n(x^2 - 9i^2)^2 \Rightarrow\ P(x) = a_n(x^2+9)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{P(x) = a_n(x^4 + 18x + 81)}.$$

Agora, vamos demonstrar um teorema sobre as raízes complexas não reais de um polinômio.

Teorema 16.2.7.3: Se o número $z = a + bi$ é raiz complexa não-real de um polinômio com coeficientes reais, então o conjugado desse número, ou seja, $\bar{z} = a - bi$ é também raiz do polinômio, com mesma multiplicidade.

Demonstração: Considerando

$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2}+\ldots+a_2.x^2 + a_1.x + a_0$ (de grau $n \geq 1$), devemos provar que, se

$$P(z) = a_n.z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + a_{n-2}.z^{n-2}+\ldots+ a_2.z^2 + a_1.z + a_0 = 0,$$

então, $p(\overline{z}) = 0$. Isto é,

$$P(\overline{z}) = a_n.\overline{z}^n + a_{n-1}.\overline{z}^{n-1} + a_{n-2}.\overline{z}^{n-2}+\ldots+ a_2.\overline{z}^2 + a_1.\overline{z} + a_0 = 0.$$

Com efeito, como a potência do conjugado de um complexo equivale ao conjugado da potência desse complexo (use a 1ª fórmula de Moivre para constatar esse fato), podemos reescrever essa expressão como:

$$P(\overline{z}) = a_n.\overline{z^n} + a_{n-1}.\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}.\overline{z^{n-2}}+\ldots+ a_2.\overline{z^2} + a_1.\overline{z} + a_0.$$

Uma vez que os coeficientes são reais, podemos novamente reescrevê-la da seguinte forma:

$$P(\overline{z}) = \overline{a_n}.\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}.\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}.\overline{z^{n-2}}+\ldots+ \overline{a_2}.\overline{z^2} + \overline{a_1}.\overline{z} + \overline{a_0}.$$

Visto que o conjugado do produto equivale ao produto dos conjugados, dispomos de

$$P(\overline{z}) = \overline{a_n.z^n} + \overline{a_{n-1}.z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}.z^{n-2}}+\ldots+ \overline{a_2.z^2} + \overline{a_1.z} + \overline{a_0}.$$

Por fim, o conjugado da soma equivale a soma dos conjugados, e desse modo,

$$P(\overline{z}) = \overline{a_n.z^n + a_{n-1}.z^{n-1} + a_{n-2}.z^{n-2}+\ldots+ a_2.z^2 + a_1.z + a_0}.$$

Isso prova de um forma geral que, $P(\overline{x}) = \overline{P(x)}$ quando $P(x)$ possui coeficientes reais. Particularmente, $p(z) = 0$ se, e somente se, $p(\overline{z}) = 0$.

Agora, considerando que z tem multiplicidade α, temos pelo teorema da decomposição que

$$P(x) = (x - z)^{\alpha}.Q(x).$$

Desse modo,

$$P(\overline{x}) = (\overline{x} - z)^{\alpha}.Q(\overline{x}) = \overline{(x - \overline{z})^{\alpha}.Q(\overline{x})} = \overline{\underbrace{(x - \overline{z})^{\alpha}.Q(x)}_{P(x)}}$$

O que demonstra que $\overline{z}$ tem também multiplicidade α.

Assim, por exemplo, se $2 + i$ é raiz de um polinômio, $2 - i$ também será. Da mesma forma, se $\sqrt{3} - 4i$ é raiz de multiplicidade 5, de um polinômio, então $\sqrt{3} + 4i$ também será outra raiz de multiplicidade 5 do mesmo polinômio.

Importante ressaltar que esse teorema só se aplica a equações polinomiais (ou polinômios) com coeficientes reais. Por exemplo, a equação $x^4 + 8ix = 0$ possui $2i$ como raiz:

$$x^4 + 8ix \Rightarrow (2i)^4 + 8i(2i) = 16i^4 + 16i^2 = 16 - 16 = 0.$$

Porém, o seu conjugado $-2i$, não. Veja:

$$x^4 + 8ix \Rightarrow (-2i)^4 + 8i(-2i) = 16i^4 - 16i^2 = 16 + 16 = 32.$$

1º exemplo: Vamos escrever um polinômio de grau 5 de coeficientes reais, que possui as seguintes raízes: 1, $2i$, $3-i$.

Solução:

De acordo com o teorema 16.2.7.3, se $2i$ e $3-i$ são raízes, então os seus conjugados -$2i$ e $3+i$ também são. Como o polinômio é de grau 5, dispomos, assim, de todas as suas raízes.

Escrevendo o polinômio consoante ao teorema da decomposição, temos:

$$P(x) = a_n(x-1)(x-2i)(x+2i)\big(x-(3+i)\big)\big(x-(3-i)\big)$$

$$P(x) = a_n(x-1)(x^2-4i^2)\big(x^2-(3-i)x-(3+i)x+(3+i).(3-i)\big)$$

$$P(x) = a_n(x-1)(x^2+4)(x^2-3x+3ix-3x-3ix+9+1)$$

$$P(x) = a_n(x-1)(x^2+4)(x^2-6x+10)$$

$$\boxed{P(x) = a_n(x^5-7x^4+20x^3-38x^2+64x-40)}.$$

Fazendo $a_n = 1$, encontramos $P(x) = x^5-7x^4+20x^3-38x^2+64x-40$. Esse polinômio possui raízes $1, 2i, 3-i$.

2º exemplo: Se um polinômio de coeficientes reais possui como raízes $1-i$, i, $\sqrt{5}+i$, de multiplicidade 3, 4 e 1, respectivamente. Qual o grau mínimo desse polinômio?

Solução:

Para cada raiz complexa de um polinômio, temos obrigatoriamente o seu conjugado com mesma multiplicidade. Assim, as outras raízes são $1+i$ de mesma multiplicidade 3, $-i$ de mesma multiplicidade 4 e $\sqrt{5}-i$ de multiplicidade 1, totalizando, no mínimo, $6+8+2=16$ raízes. De acordo com o teorema fundamental da álgebra, o grau desse polinômio é no mínimo 16.

3º exemplo: Mostre que, o grau n de um polinômio de coeficientes reais e o número p de raízes reais desse polinômio, possuem a mesma paridade.

Solução:

Com efeito, se o polinômio possui coeficientes reais, então ele possui um número par de raízes complexas não reais. Para cada raiz complexa não real, existe outra raiz conjugada. Nesse contexto, se o polinômio em questão tem um número k de raízes complexas, então

$$n = p + k.$$

Como k é par, n e p possuem mesma paridade (ambos são pares ou ambos são ímpares).

Observação: Daqui por diante, as raízes complexas não reais serão simplesmente denominadas de "raízes complexas", enquanto as raízes complexas reais serão denominadas apenas de "raízes reais".

16.2.8. Reduzindo o grau de uma equação polinomial

Foi dito anteriormente que se r é uma raiz do polinômio $P(x)$ de grau n, então $p(x) = (x-r).q(x)$, onde $q(x)$ é um quociente de grau $n-1$. Observe que as raízes de $q(x)$, que tem grau menor, são as outras raízes de $p(x)$. Logo, usando a divisão $= \frac{p(x)}{(x-r)}$, podemos reduzir o grau do polinômio e encontrar, dependendo da nova equação, as outras raízes que faltam.

Exemplo: Resolva a equação $2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 0$, sabendo que uma das raízes é -1.

Solução: Como todos os coeficientes são múltiplos de 2, podemos simplificar a equação polinomial dividindo-a por 2. Isso nos dá

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Como uma das raízes é -1, então o polinômio pode ser escrito na forma

$$P(x) = (x+1)q(x)$$

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)q(x)$$

As raízes de $q(x)$ são as outras raízes de $p(x)$. Dividindo $p(x)$ por $q(x)$, temos a partir do algoritmo de Briot-Ruffini que

-1	1	6	11	6
	1	5	6	0
	$\underbrace{\quad\quad\quad}_{q(x)}$			$\underbrace{\quad}_{r(x)}$

$\Rightarrow$ (o resto sempre será zero, pois são divisíveis).

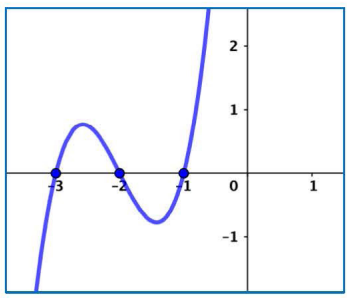
Como $q(x) = x^2 + 5x + 6$ é um polinômio do 2º grau, podemos encontrar suas raízes.

$$x^2 + 5x + 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2.1} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ x' = -3 \end{cases}.$$

Dessa forma, as raízes de $p(x)$ são: -1, -2 e -3, cuja decomposição é $P(x) = 2.(x+1)(x+2)(x+3)$.

Com ajuda de um software de computador, foi construído o gráfico de $p(x)$ no plano cartesiano. Nele, é possível visualizar as raízes reais, que correspondem aos pontos onde o gráfico intersecta o eixo x. Nesses pontos, o valor de $p(x)$ é igual a zero.



Observação: No plano cartesiano, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, portanto, é possível identificar somente as raízes reais (e não as complexas) de um polinômio.

2º exemplo: Resolva a equação $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$, sabendo que uma das raízes é i.

Solução: De acordo com o teorema 16.2.7.3, se i é raiz do polinômio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$, então - i também é. Portanto, usando a decomposição, temos

$$P(x) = (x - i)(x + i)q(x)$$
$$P(x) = (x - i^2)q(x)$$
$$P(x) = (x^2 + 1)q(x).$$

Dividindo o polinômio $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4$ por $x^2 + 1$, encontramos $q(x)$ que possui as outras raízes.

$\frac{x^4}{x^2} = \boxed{x^2}$

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 & x^2 + 1 \\ \hline -x^4 - x^2 & x^2 + 4x + 4 \longrightarrow q(x) \\ \hline 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 & \\ -4x^3 - 4x & \\ \hline 4x^2 + 4 & \\ -4x^2 - 4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Outra solução é usar o algoritmo de Briot-Ruffini duas vezes, uma com i e outra vez com $-i$.

$\Rightarrow$ pois $p(x)$ é divisível por $q(x)$.

As raízes de $q(x)$ são as outras raízes de $P(x)$. Como $q(x)$ neste caso é um polinômio do 2º grau, podemos encontrar a solução.

$$x^2 + 4x + 4 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

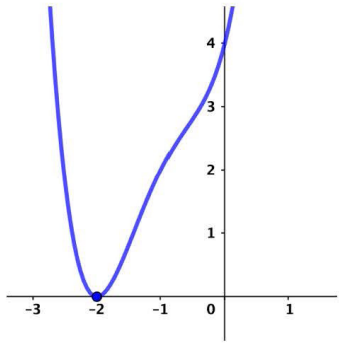
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2.1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ x' = -2 \end{cases} (multiplicidade\ 2).$$

Dessa forma, as raízes de $P(x)$ são i, - i e -2 (com multiplicidade 2), e a decomposição é dada por

$$P(x) = (x - i)(x + i)(x + 2)^2.$$

O gráfico de $P(x)$ está a seguir. Como mencionado anteriormente, somente a raiz real -2 é visível no gráfico, enquanto as raízes complexas i e $-i$ não podem ser representadas no plano cartesiano.



EXERCÍCIOS 16.9

1) Resolva a equação $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$, sabendo que uma das raízes é 4.

2) Resolva a equação $x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 27x + 18 = 0$, sabendo que uma das raízes é $3i$.

3) Resolva a equação $x^5 - 4x^4 + 25x^3 - 74x^2 + 144x - 160 = 0$, sabendo que duas das raízes são $1 + 2i$ e $4i$.

4) Qual o grau mínimo de um polinômio de coeficientes reais, que possui como raízes o $7i$, $3 - 4i$ e o 5 com multiplicidade 3?

5) Qual o grau mínimo de um polinômio de coeficientes reais, que possui como raízes o $-4i$ com multiplicidade 2, $9 - i$ com multiplicidade 5 e o zero com multiplicidade 9?

6) (PUC-SP) Os números i e $2i$ são raízes de um polinômio p de grau n e coeficientes inteiros. O valor de n é:

a) igual a 1.
b) igual a 2.
c) menor que ou igual a 3.
d) menor que ou igual a 4.
e) maior que ou igual a 4.

7) Marque **V** para verdadeiro e **F** para falso:

a) ( ) Todo polinômio de grau n possui exatamente n raízes distintas.

b) ( ) Todo polinômio de grau n possui no máximo n raízes distintas.

c) ( ) Se um polinômio que não tem necessariamente coeficientes reais, possui $a + bi$ como raiz complexa, então $a - bi$ é também raiz desse polinômio.

d) ( ) Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau ímpar, então ela admite um número ímpar de raízes reais.

e) ( ) Se uma equação polinomial de coeficientes reais tem grau par, então ela só admite raízes complexas.

f) ( ) Todo polinômio admite um número par de raízes complexas não reais.

g) ( ) Todo polinômio com coeficientes reais, que admite raízes complexas, possui um número par de raízes complexas.

h) ( ) Um polinômio que admite a como raiz é divisível por $x - a$.

i) ( ) Um polinômio que admite $2i$ como raiz é divisível por $2i$.

8) (ITA) A equação $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5 = 0$

a) só admite uma raiz de multiplicidade 5.

b) se tiver apenas 2 raízes de multiplicidade 1, existe uma raiz de multiplicidade 2.

c) se tiver uma raiz de multiplicidade 3, tem duas raízes de multiplicidade 1.
d) se tiver apenas 4 raízes distintas, uma delas tem multiplicidade 2.
e) se tiver uma raiz real, todas serão reais.

9) (PUC-SP) O número de raízes reais do polinômio $P(x) = (x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$, é:

a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 4.

10) (ITA) Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4 + x^2 + ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$, então $a^2 - b^3$ é igual a

a) – 64. b) – 36. c) – 28. d) 18. e) 27.

11) (CESGRANRIO) Um dos fatores de $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 17x - 8$ é $(2x - 1)$. A maior raiz de $P(x)$ é:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 6.

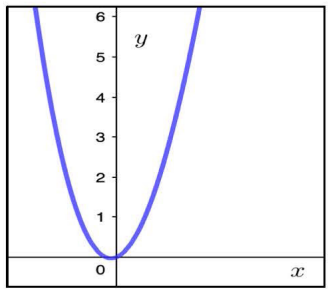
12) (UFRN) Se 2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = 0$ então seu conjunto solução é:

a) {1, 2}. b) {1, 3}. c) {2, 3}. d) {1, 2, 3}. e) {1, 2, 3, 4}.

13) (UFRGS) O gráfico de uma função polinomial $y = p(x)$ do terceiro grau com coeficientes reais está parcialmente representado na tela de um computador, como indica a figura abaixo:

O número de soluções reais da equação $p(x) = 2$ é:

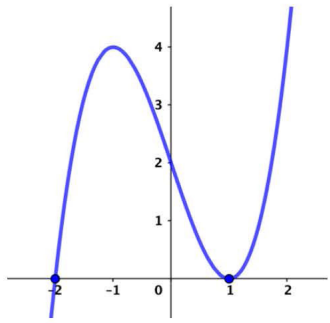
a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.



14) (PUC-RS) O gráfico na figura é de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $f(x)$ é um polinômio do 3º grau. Para equação $f(x) = 0$, afirmamos:

I) o termo independente de x é igual a 2,
II) suas raízes são -2, 2 e 1,
III) suas raízes são -2, -2 e 1,
IV) suas raízes são -2, 1 e 1.
Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) I b) III c)I e II d) III e)I e IV



16.2.9. Relação entre coeficientes e raízes

Nesta subseção, iremos deduzir as relações entre os coeficientes de um polinômio (ou equação polinomial) e suas raízes.

Uma equação do 2º grau pode ser escrita (segundo o teorema da decomposição), como:

$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$

$ax^2 + bx + c = ax^2 - (r_1 + r_2)x + r_1.r_2$

$\boxed{r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}}$ e $\boxed{r_1.r_2 = \frac{c}{a}}$ (relação já vista em função quadrática).

Uma equação do 3º grau pode ser escrita como:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3)x - r_1.r_2.r_3$

$\boxed{r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a}}$, $\boxed{r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3 = \frac{c}{a}}$ e $\boxed{r_1.r_2.r_3 = \frac{-d}{a}}$.

De uma forma geral, dado o polinômio $P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$ e suas raízes r_1, r_2, r_3,..., r_n, temos pelo teorema da decomposição que

$a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots(x - r_n).q(x)$.

Ao desenvolver essa expressão encontramos as identidades a seguir.

Soma das n raízes: $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$.

A soma dos produtos das raízes tomadas:

- Duas a duas: $r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_1.r_4 + \ldots + r_{n-1}.r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$
- Três a três: $r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + r_1.r_2.r_5 + \ldots + r_{n-2}.r_{n-1}.r_n = \frac{-a_{n-3}}{a_n}$

  ⋮
- m a m: $r_1.r_2.r_3 \ldots r_m + \ldots + r_{n-(m-1)}.r_{n-(m-2)}\ldots r_n = \frac{(-1)^m.a_{n-m}}{a_n}$

Produto das n raízes: $r_1.r_2.r_3\ldots r_n = \frac{(-1)^n.a_0}{a_n}$.

Essas relações são conhecidas como **relações de Girard**, em homenagem ao matemático Albert Girard (1595, 1632).

Resumindo as relações acima, podemos dizer que a soma das raízes de um polinômio é o valor negativo do quociente do segundo coeficiente pelo primeiro (a_n). O produto das raízes é o valor negativo, se o grau do polinômio for ímpar, ou positivo, se o grau do polinômio for par, do quociente do último coeficiente (a_0) pelo primeiro (a_n). E as raízes tomadas m a m são dadas por $\frac{(-1)^m.a_{n-m}}{a_n}$.

Exemplo: Calcule a soma e o produto das raízes do polinômio $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução: Conforme as relações de Girard, podemos calcular a soma e o produto das raízes de um polinômio sem precisar calcular as raízes uma a uma. Segundo essas relações,

$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} \Rightarrow \boxed{r_1 + r_2 = 5}.$$

$$r_1.r_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} \Rightarrow \boxed{r_1.r_2 = 6}.$$

2º exemplo: Escreva as relações de Girard para $3x^3 + 2x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solução: Nomeando os coeficientes para $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,temos

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-b}{a} \Rightarrow \boxed{r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-2}{3}}.$$

$$r_1.r_2.r_3 = \frac{-d}{a} = \frac{-9}{3} \Rightarrow \boxed{r_1.r_2.r_3 = -3}.$$

Tomando as raízes duas a duas, encontramos

$$r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3 = \frac{c}{a} = \frac{-6}{3} \Rightarrow \boxed{r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3 = -2}.$$

3º exemplo: Resolva a equação $2x^3 + 12x^2 + 22x + 12 = 0$, sabendo que uma das raízes é -1.

Solução: Esse exemplo já foi resolvido na seção 16.2.8. Agora, vamos resolvê-lo utilizando as relações de Girard.

Nomeando os coeficientes para $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, temos

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{-12}{2} \Rightarrow \boxed{r_1 + r_2 + r_3 = -6}.$$

Se uma das raízes é -1, então

$$(-1) + r_2 + r_3 = -6 \Rightarrow r_2 + r_3 = -5 \Rightarrow \boxed{r_2 = -5 - r_3}\ (1)$$

$$r_1.r_2.r_3 = \frac{-12}{2} = \frac{-6}{3} r_1.r_2.r_3 = -6 \Rightarrow (-1).r_2.r_3 = -6 \Rightarrow \boxed{r_2.r_3 = 6}\ (2).$$

Substituindo (1) em (2), encontramos

$$(-5 - r_3).r_3 = 6 \Rightarrow \boxed{r_3^2 + 5r_3 + 6 = 0}(a = 1, b = 5, c = 6).$$

$$r_3 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2.1} \Rightarrow \begin{cases} r_3' = -2 \\ r_3' = -3 \end{cases}.$$

Para $r_3 = -2$, temos $r_2 = -3$ e para $r_3 = -3$, temos $r_2 = -3$. $S = \{-1, -2, -3\}$.

4º exemplo: Calcule a soma dos inversos das raízes de $x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 7x - 1 = 0$.

Solução: A soma dos inversos é o valor de $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$, o que corresponde a

$$\frac{\overbrace{r_2.r_3.r_4 + r_1.r_3.r_4 + r_1.r_2.r_4 + r_1.r_2.r_3}^{Soma\ das\ raízes\ tomadas\ 3\ a\ 3}}{\underbrace{r_1.r_2.r_3.r_4}_{Produto\ das\ raízes}}\ (1).$$

$$r_2.r_3.r_4 + r_1.r_3.r_4 + r_1.r_2.r_4 + r_1.r_2.r_3 = \frac{(-1)^3.a_{4-3}}{a_4} = \frac{-a_1}{a_4} = \frac{-7}{1} = -7.$$

$$r_1.r_2.r_3.r_4 = \frac{(-1)^4.a_0}{a_n} = \frac{a_0}{a_n} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Substituindo ambos os valores em (1), obtemos $\frac{-7}{-1} = 7$.

5º exemplo: Resolva $x^5 + x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$, sabendo que uma das raízes é $-2i$ e a equação possui uma raiz tripla.

Solução: Já sabemos que além de $-2i, 2i$ também é raiz. E que nenhuma dessas raízes possui multiplicidade 3, pois para isso, o grau mínimo do polinômio deveria ser 6 (veja que o grau do polinômio é 5). Utilizando essa informação no produto das raízes, encontramos

$$\overbrace{r.r.r}^{raiz\ tripla}.\overbrace{r_4}^{-2i}.\overbrace{r_5}^{2i} = \frac{(-1)^5.a_0}{a_n} = \frac{-4}{1} = -4 \Rightarrow$$

$$r^3.(-2i^2) = -4 \Rightarrow r^3.4 = -4 \Rightarrow r^3 = \frac{-4}{4} \Rightarrow r = -1. \quad \boxed{S = \{-1, -2i, 2i\}}.$$

EXERCÍCIOS 16.10

1) Escreva as relações de Girard para $x^3 + 10x^2 - 10x + 1 = 0$.

2) Escreva as relações de Girard para $3x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 6x + 1 = 0$.

3) Se r_1, r_2, r_3, r_4 são raízes da equação $x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 3 = 0$, calcule:

a) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4$

b) $r_1.r_2.r_3.r_4$

c) $r_2.r_3.r_4 + r_1.r_3.r_4 + r_1.r_2.r_4 + r_1.r_2.r_3$

d) $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}$

4) (UFRS) A soma das raízes da equação $x^4 - 1 = 0$ é:

a) $2i$ b)4 c)$22i$ d)1 e)0

5) (UFSE) A soma e o produto das raízes da equação $x^3 + x^2 - 8x + 4 = 0$ são respectivamente:

a) $-8\ e\ -4$ b)$-8\ e\ 4$ c)$-4\ e\ 1$ d)$-1\ e\ -4$ e)$4\ e\ 8$

6) (UFRS) O produto das raízes da equação $(x-2)(x^2 - 3x + 2)^3 = 0$ é:

a) -16 b)-4 c)4 d)13 e)16

16.2.10. Pesquisa por raízes racionais

Vimos que, para calcular as raízes de um polinômio de grau $n \geq 3$, é preciso ter no mínimo uma raiz conhecida ou informações sobre a relação entre essas raízes. No entanto, na ausência dessas informações, podemos aplicar o seguinte teorema sobre raízes racionais.

Teorema 16.2.10.1: Se uma equação polinomial

$$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0 = 0$$

de coeficiente inteiros ($a_n \neq 0$), admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n (com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$, primos entre si).

Demonstração: Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $p(x)$, então

$$a_n.\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}.\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}.\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \ldots + a_2.\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1.\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0.$$

Multiplicando tudo por q^n,

$$a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1}.q + a_{n-2}.p^{n-2}.q^2 + \ldots + a_2.p^2.q^{n-2} + a_1.p.q^{n-1} + a_0.q^n = 0.$$

Isolando $a_n.p^n$ na igualdade acima, vemos que ele é divisível por q. Como p e q são primos entre si, a_n é divisível por q.

Isolando agora, $a_0.q^n$ na igualdade acima, vemos que ele é divisível por p. Como p e q são primos entre si, a_0 é divisível por p.

É importante observar que, se $\boldsymbol{a_n = 1}$ e os demais **coeficientes são inteiros**, o polinômio apresenta apenas raízes racionais inteiras e não fracionárias. Nesse caso, é suficiente pesquisar somente por números que são divisores de a_0.

Exemplo: Resolva a equação $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$.

Solução: Como $a_n = 1$ e o demais coeficientes são inteiros, as prováveis raízes da equação são os divisores de $a_0 = -4$. São eles: {-4, -2, -1, 1, 2, 4}. Calculando os valores numéricos do polinômio para esses valores, temos, respectivamente:

$(-4)^3 - 4(-4)^2 + 6(-4) - 4 = -64 - 64 - 24 - 4 = -156$ (não é raiz)

$(-2)^3 - 4(-2)^2 + 6(-2) - 4 = -8 - 16 - 12 - 4 = -40$ (não é raiz)

$(-1)^3 - 4(-1)^2 + 6(-1) - 4 = -1 - 4 - 6 - 4 = -15$ (não é raiz)

$1^3 - 4.1^2 + 6.1 - 4 = 1 - 4 + 6 - 4 = -1$ (não é raiz)

$2^3 - 4.2^2 + 6.2 - 4 = 8 - 16 + 12 - 4 = 0$ (é raiz).

Como 2 é raiz, o polinômio $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ é divisível por $(x - 2)$. Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, dispomos de:

2	1	−4	6	−4
	1	−2	2	0
		$q(x)$		$r(x)$

Outra solução é usar o método da chave ou as relações de Girard.

O polinômio $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ pode ser escrito como:

$$(x^2 - 2x + 2)(x - 2)$$

Calculando as raízes de $x^2 - 2x + 2$, encontramos

$$q\ x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \Rightarrow \\ c = 2 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1.2}}{2.1} \Rightarrow$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2.1} = \frac{2 \pm 4i}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 + 2i \\ x' = 1 - 2i \end{cases}.$$

$\boxed{S = \{2, 1 + 2i, 1 - 2i\}}$.

2º exemplo: Resolva a equação $2x^3 - x^2 + 6x - 3 = 0$.

Solução: Como $a_n = 2$ e o demais coeficientes são inteiros, as prováveis raízes da equação são os divisores de $a_0 = -3$, que são $p = \{-3, -1, 1, 3\}$, combinados com os divisores de $a_n = 2$, que são: $q = \{-2, -1, 1, 2\}$. Então, as prováveis raízes são

$$\frac{p}{q} = \left\{\frac{3}{2}, -3, 3, \frac{-3}{2}, \frac{1}{2}, 1, -1, \frac{-1}{2}\right\}.$$

Observe que a raiz não pode ser negativa, pois assim, os termos serão todos negativos. Testando somente os positivos, vemos que $\frac{1}{2}$ é raiz.

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -1 & +6 & -3 \\ \hline & 2 & 0 & 6 & 0 \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{q(x)} & & & \underbrace{\quad}_{r(x)} \end{array}$$

$$q(x) = 2x^2 + 6 \Rightarrow 2x^2 + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -6 \Rightarrow x^2 = \frac{-6}{2} \Rightarrow$$

$$x^2 = -3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-3} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}i \\ x = -\sqrt{3}i \end{cases}.$$

$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i\right\}}$.

Um "truque" bastante útil na busca de raízes é observar a soma dos coeficientes do polinômio. Caso essa soma seja zero, 1 é raiz do polinômio.

Para a demonstração desse fato, basta ver que a soma dos coeficientes de um polinômio $P(x)$ é igual ao valor numérico $P(1)$. Veja:

$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$

$P(1) = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ (soma dos coeficientes).

Assim, quando a soma dos coeficientes de um polinômio for zero, significa que $P(1)$=0, e consequentemente, pelo teorema de D'Alembert, 1 é raiz do polinômio.

Exemplo: Resolva a equação $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$.

Solução: A soma dos coeficientes é zero, então o número 1 é uma das raízes.

1	1	0	-6	8	-3
	1	1	−5	3	0
		$q(x)$			$r'(x)$

A soma dos coeficientes de $q(x)$ também é zero, o que implica que $q(x)$ tem o 1 como raiz.

1	1	1	-5	3
	1	2	−3	0
		$q'(x)$		$r(x)$

Por sorte, a soma dos coeficientes de $q'(x)$ também é zero, o que indica que $q'(x)$ tem o 1 como raiz também.

1	1	2	-3
	1	3	0
		$q''(x)$	$r''(x)$

Por fim, $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ (a outra raiz).

$S = \{1, -3\}$.

Exemplo: Calcular a soma dos coeficientes do polinômio

$$P(x) = 5(x-2)^{100}.(x^2 - 2x + 2)^{100}$$

Solução: Mesmo que não seja trabalhoso, não há necessidade de desenvolver os polinômios e calcular a soma de seus coeficientes. Conforme já visto, basta calcular p(1).

$$P(1) = 5(\underbrace{1-2}_{-1})^{100}.(\underbrace{1^2 - 2.1 + 2}_{1})^{100} = 5.1.1 = 5.$$

Resposta: A soma dos coeficientes é 5.

EXERCÍCIOS 16.11

1) Resolva as equações.

a) $-x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

c) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

2) (UNIFOR-CE) Sabe-se que o polinômio $f(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 5$ admite uma raiz racional. As outras duas raízes desse polinômio são números:

a) divisíveis por 2.

b) fracionários.

c) não reais.

d) primos.

e) irracionais.

3) (ITA) Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos números reais. Em relação à equação: $5x^3 - 15x^2 - 15x - 20 = 0$, $x \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que:

a) não tem solução.
b) tem somente uma solução.
c) tem duas soluções distintas.
d) tem três soluções distintas.
e) n. r. a.

4) (FGV) A equação polinomial $(x - 1)(x^2 + 1) + (x + 1)(x^2 - 1) = 0$ apresenta:

a) 3 raízes inteiras.
b) uma raiz igual a - 1.
c) duas raízes irracionais.
d) 3 raízes irracionais.
e) duas raízes complexas conjugadas.

5) (UNIMONTES) Seja $P(x) = (x^{50} + 1)^{100}$. Calcule a soma dos coeficientes de $P(x)$.

6) (PUC-RIO) Ache a soma dos coeficientes do polinômio $(1 - 2x + 3x^2)^3$.

7) (MACK-SP) Considere o polinômio:

$P(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_2.x^2 + a_1.x + a_0$

Sabe-se que $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$ é a soma dos coeficientes de $P(x)$. Nestas condições, a soma dos coeficientes do polinômio $P(x) = (4x^3 - 2x^2 - 1)^{36}$ é:

a) 0 b) -36 c) 1 d) -1

8) Seja o polinômio $P(x) = (4x^2 - 6x + 1)^5(3x - 1)^4$. A soma dos coeficientes deste polinômio é:

a) 20 b) 18 c) 12 d) -16

CAPÍTULO

17

INEQUAÇÕES E FUNÇÃO MODULAR

INEQUAÇÕES E FUNÇÃO MODULAR

17. INEQUAÇÕES E FUNÇÃO MODULAR

Nesta unidade, retomaremos aos estudos das funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, porém em forma de inequações. Os estudos dessas inequações servirão como desenvolvimento mais compreensível das funções modulares, que também estão nesta mesma unidade, além de servirem de base para a análise de outras funções no volume 4 dessa coleção.

17.1. Inequações

Definição 17.1.1: Denomina-se inequação toda sentença matemática que apresenta uma desigualdade (ou uma não equivalência) e que utiliza os símbolos: $\neq$, $>$, $<$, $\geq$ e $\leq$.

Sua resolução consiste em obter todos os valores de x restritos a um conjunto numérico específico, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ ou normalmente $\mathbb{R}$, que tornam a desigualdade verdadeira.

17.1.1. Inequações do 1º grau

Denomina-se inequação do 1º grau toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas: $ax + b > 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$ e $ax + b \leq 0$.

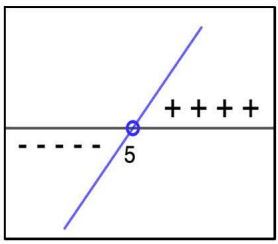
Há duas formas de resolver esse tipo de Inequação. A primeira delas é considerá-la uma função afim, calcular o zero dessa função e analisar o sinal à esquerda e à direita desse zero. A solução é o intervalo que corresponde ao sinal que satisfaz a desigualdade.

Exemplo: Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2x - 10 < 0$.

Solução: Calculando o zero da função

$2x - 10 = 0 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{x = 5}$.

É uma reta crescente (observe que $a = 2 > 0$), que intersecta o eixo x no ponto 5. Os valores à esquerda são negativos e à direita são positivos. Veja o gráfico ao lado.

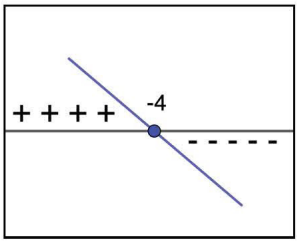


Como o enunciado solicita < 0, a solução está à esquerda de 5, isto é, $x < 5$. Portanto, $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} | x < 5\} \text{ ou } S = (-\infty, 5[}$.

2º exemplo: Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $-3x - 12 \geq 0$.

Solução: Ao calcular o zero da função, encontramos

$$-3x - 12 = 0 \Rightarrow -3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{-3} \Rightarrow \boxed{x = -4}.$$



É uma reta decrescente ($a = -3 < 0$), que intersecta o eixo x no ponto -4. Os valores à esquerda são positivos e à direita são negativos. Veja o gráfico ao lado.

Como o enunciado solicita ≥ 0, a solução é $x \leq -4$.

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -4\} \; ou \; S = (-\infty, -4]}.$$

Observação: Para a representação do ponto no gráfico, utilizamos:

- ○ ⇒ para ponto aberto quando a desigualdade não inclui a igualdade (>, <);
- ● ⇒ para ponto fechado quando a desigualdade inclui a igualdade (≥, ≤).

Veja no gráfico do 1º exemplo que o ponto (o zero da função) está aberto, e no gráfico do 2º exemplo, fechado.

Outra maneira de resolver uma inequação do 1º grau é desenvolvê-la utilizando as operações inversas ao trocar de membro, como se fosse uma equação do 1º grau. A única diferença está ao final do desenvolvimento, caso o coeficiente da variável ocorra negativa, por exemplo, $-ax$, é preciso multiplicar toda a inequação por -1 e inverter o sinal da desigualdade: de maior (>) para menor (<) ou menor (<) para maior (>), ou de maior ou igual (≥) para menor ou igual (≤), ou ainda, de menor ou igual (≤) para maior ou igual (≥), conforme cada caso.

Vamos resolver os dois exemplos anteriores.

1º exemplo: Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2x - 10 < 0$.

Solução: $2x - 10 < 0 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < \frac{10}{2} \Rightarrow \boxed{x < 5}$.

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 5\} \; ou \; S = (-\infty, 5[}.$$

2º exemplo: Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $-3x - 12 \geq 0$.

Solução:

$-3x - 12 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq 12$ **(x-1)** ← Coeficiente da variável negativa $(-3x)$. Devemos multiplicar por -1.

$3x \leq -12$ ← Observe a inversão do símbolo da desigualdade de ≥ para ≤.

$x \leq \frac{-12}{3} \Rightarrow \boxed{x \leq -4} \Rightarrow \boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -4\} \; ou \; S = (-\infty, -4]}$.

A seguir está outro exemplo que também podemos aplicar esse método.

3º exemplo: Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $-x - 12 \leq 3x + 4$.

Solução:

$-x - 12 \leq 3x + 4 \Rightarrow -x - 3x \leq +4 + 12 \Rightarrow -4x \leq 16$ **(x-1)** ← Coeficiente da variável negativa $(-4x)$. Devemos multiplicar por -1.

$4x \geq -16$ ← Atenção para inversão do símbolo.

$x \geq \frac{-16}{4} \Rightarrow \boxed{x \geq -4} \Rightarrow \boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -4\} \; ou \; S = [-4, +\infty)}$.

17.1.2. Sistema de inequações e inequações simultâneas do 1º grau

Sistema de inequações: Um sistema de inequações do 1º grau é composto por duas ou mais inequações do 1º grau que devem ser satisfeitas pela mesmas variáveis.

Exemplo: Resolver em $\mathbb{R}$ o sistema $\begin{cases} 3-2x \leq 1 \\ 3x-1<5 \end{cases}$.

Solução:

Resolvendo a primeira inequação:

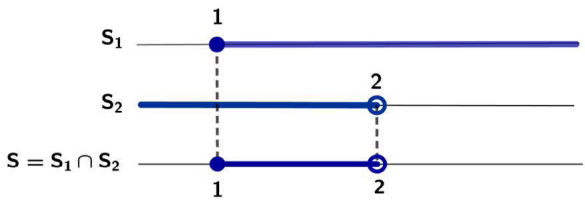
$$3-2x \leq 1 \Rightarrow -2x \leq 1-3 \Rightarrow -2x \leq -2\ (\times -1) \Rightarrow x \geq \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{x \geq 1}.$$

$$\boxed{S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}}.$$

Resolvendo a segunda inequação:

$$3x-1<5 \Rightarrow 3x<5+1 \Rightarrow x<\frac{6}{3} \Rightarrow \boxed{x<2} \Rightarrow \boxed{S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x<2\}}.$$

Como as inequações devem estar satisfeitas pelas mesmas variáveis, devemos fazer a interseção das soluções:



Ver subseção 1.2.7 – volume 1, sobre intervalos numéricos.

$$\boxed{s = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 2\}\ ou\ S = [1,2[}.$$

Inequação simultânea: A inequação simultânea é uma desigualdade do tipo $f<g<h, f \leq g \leq h, f<g \leq h\ ou\ f \leq g<h$. Para resolvê-la, é preciso dividi-la em duas partes (duas inequações). Por exemplo, para a inequação $f<g<h$, teríamos $f<g$ (1ª parte) e $g<h$ (2ª parte). A solução da inequação simultânea é a intersecção das soluções dessas duas partes.

Exemplo: Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $-4<4-2x \leq 3$.

Solução:

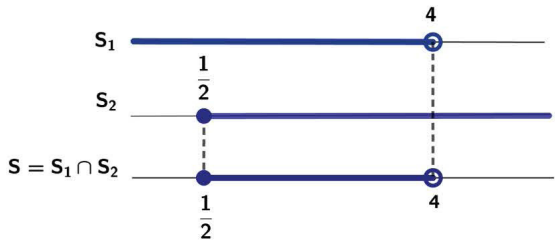
Resolvendo a primeira parte da inequação:

$$-4<4-2x \Rightarrow 2x<8 \Rightarrow x<\frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{x<4} \Rightarrow \boxed{S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x<4\}}.$$

Resolvendo a segunda parte:

$$4-2x \leq 3 \Rightarrow -2x \leq 3-4 \Rightarrow -x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x \geq \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{2}\}}.$$

Como as inequações dever ser satisfeitas pelas mesmas variáveis, é preciso fazer a interseção das soluções:



$$\boxed{s = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 4\} \text{ ou } S = [\frac{1}{2}, 4[}.$$

17.1.3. Inequação produto e inequação quociente do 1º grau

Na subseção anterior, vimos que para resolver um sistema de inequações ou uma inequação simultânea, era preciso fazer a intersecção das soluções das equações ou de suas partes. **Já no caso de produto e quociente, é preciso estudar o sinal de cada função individualmente e, em seguida, fazer o jogo de sinal com as soluções parciais**, identificando posteriormente o sinal que corresponde ao solicitado na questão. Essa abordagem nos permite determinar os intervalos em que a desigualdade é satisfeita.

Exemplo (Inequação produto): Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(-3x+6)(x-4) > 0$.

Solução:

Estudando o sinal da primeira parte (1ª função) da inequação:

$$-3x+6=0 \Rightarrow -3x=-6 \Rightarrow \boxed{x=2}.$$

Como a função é decrescente (veja que o coeficiente da variável é negativo), temos:

$-3x+6 > 0 (positivo)\ para\ x < 2.$
$-3x+6 < 0\ (negativo)\ para\ x > 2.$
$-3x+6 = 0\ para\ x = 2.$



Estudando o sinal da segunda parte (2ª função) da inequação:

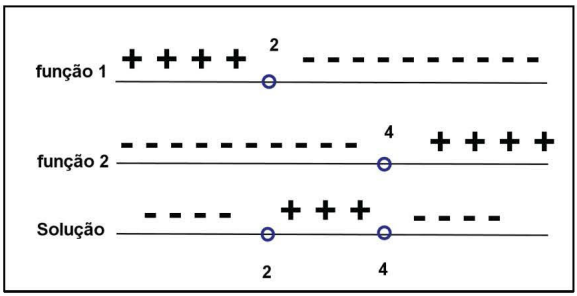
$$x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}.$$

Como a função é crescente (veja que o coeficiente da variável é positivo), então:
$x-4 > 0\ (positivo)\ para\ x > 4.$
$x-4 < 0\ (negativo) para\ x < 4.$
$x-4 = 0\ para\ x = 4.$



Fazendo o jogo de sinal da função 1 com a função 2, em seus respectivos intervalos, temos a solução ao lado. Como queremos a parte positiva (>0) conforme o comando da questão, concluímos que a solução é:

$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 4\}}$.



2º exemplo (Inequação quociente): Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{2x+4}{-x-3} \leq 0$.

Solução: Estudando o sinal da função do numerador (1ª função) da inequação

$$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \boxed{x = -2}.$$

Como a função é crescente (veja que o coeficiente angular é positivo), então:

$2x + 4 > 0 (positivo)\ para\ x < -2.$

$2x + 4 > 0\ (negativo)\ para\ x < -2.$

$2x + 4 = 0\ para\ x = -2.$

Estudando o sinal da função do denominador (2ª função) da inequação

$$-x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -3}.$$

A função é decrescente (coeficiente angular é negativo), dessa forma:

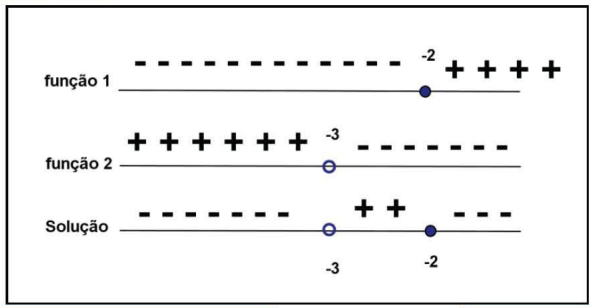
$-x - 3 > 0\ (positivo)\ para\ x < -3.$

$-x - 3 < 0\ (negativo)\ para\ x > -3.$

$-x - 3 = 0\ para\ x = -3.$

Agora, observe que o denominador precisa ser diferente de zero, então $x \neq -3$ e, portanto, o ponto -3 fica aberto.

Fazendo o jogo de sinal da função 1 com a função 2, em seus respectivos intervalos, encontramos a solução a seguir. Como queremos a parte negativa (≤ 0) conforme o comando da questão, então



$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\ ou\ x \geq -2\}}$ *ou se preferir* $\boxed{S = (-\infty, -3) \cup [-2, +\infty)}$.

Observação: O jogo de sinal dos dois exemplos anteriores refere-se ao mesmo jogo de sinal comumente utilizado na multiplicação e na divisão.

EXERCÍCIOS 17.1

1) Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $2x + 18 < 0$

b) $-5x - 20 \geq 0$

c) $-3x - 35 < 1$

d) $-4x - 12 > -5x + 1$

e) $-6x + 13 \leq 5x$

f) $-11x - 50 \geq 14x$

2) Resolva em $\mathbb{R}$ os seguintes sistemas.

a) $\begin{cases} x - 4 \leq 7 \\ -2x - 1 < 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4 \leq 2x - 11 \\ -7x - 13 < 1 \end{cases}$

3) Resolva em $\mathbb{N}$ a inequação $5(x - 2) < -2(x - 2)$.

4) Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2 < -4 + 3x < 5$.

5) A inequação $-x + 8 < 4 + 2x < x + 8$ tem quantas soluções inteiras?

6) Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $(-3x + 21)(2x - 10) > 0$

b) $(-4x + 36)(-11x - 121) \geq 0$

c) $(2x - 1)(2x - 14)(-3x + 6) \leq 0$

d) $\frac{-x+11}{x-9} \geq 0$

e) $\frac{4x+16}{-5x-20} \leq 0$

f) $\frac{4x+26}{-x-5} > 2$

g) $\frac{(x-2)(3x-12)}{-x-4} > 0$

7) (U.F.SE) Quantos números inteiros, estritamente positivos, satisfazem a inequação $x + \frac{3}{2} < 3x - 4$?

a) Nenhum b) dois c) três d) quatro e) infinitos

8) (UNIFOR-CE) A solução da inequação $\frac{Q+1}{Q-1} > 0$ é:

a) Q<-2 ou Q>0

b) Q<-1 ou Q<-2

c) Q>1 ou Q <-1

d) Q<-2 ou Q>1

e) Q<0 ou Q>1

9) (CESGRANRIO) Os valores positivos de x, para os quais $(x - 1)(x - 2)(x + 3) < 0$, constituem o intervalo aberto:

a) (1,3) b) (2,3) c) (0,3) d) (0,1) e) (1,2)

17.1.4. Inequação do 2º grau

Denomina-se inequação do 2º grau toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ e $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Resolver essas inequações consiste em obter todos os valores de x para os quais tornam as desigualdades verdadeiras.

Vamos revisar alguns conceitos sobre crescimento e decrescimento de função quadrática.

Seja uma função quadrática na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, vimos que:

- **Quando $a > 0$ e $\Delta > 0$ (dois zeros x' e x''):** A função $f(x)$ é positiva para $x < x'$ ou $x > x''$ e negativa para $x' < x < x''$, conforme figura 17.1.4.1.
- **Quando $a < 0$ e $\Delta > 0$ (dois zeros x' e x''):** A função $f(x)$ é positiva para $x' < x < x''$ e negativa para $x < x'$ ou $x > x''$, conforme figura 17.1.4.2.

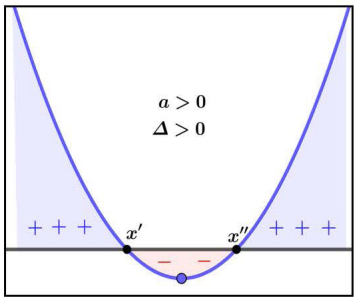


Figura 17.1.4.1

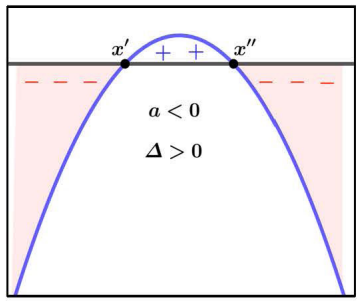


Figura 17.1.4.2

- **Quando $\Delta = 0$ (um zero):** A função $f(x)$ é positiva para qualquer valor de x (exceto o valor da raiz) se $a > 0$, conforme figura 17.1.4.3. E é negativa para qualquer valor x (exceto o valor da raiz), se $a < 0$, conforme figura 17.1.4.4.

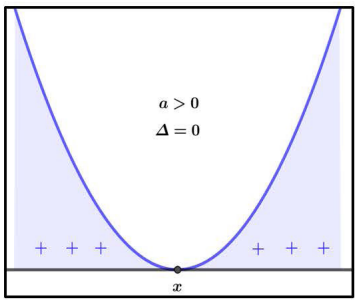


Figura 17.1.4.3

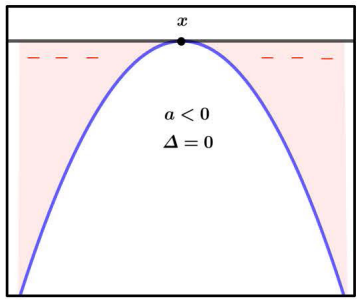


Figura 17.1.4.4

• **Quando Δ < 0 (sem zeros reais):** A função $f(x)$ é sempre positiva para qualquer valor de x, se $a > 0$, conforme mostrado na figura 17.1.4.5. E é sempre negativa para qualquer valor de x, se $a < 0$, conforme figura 17.1.4.6.

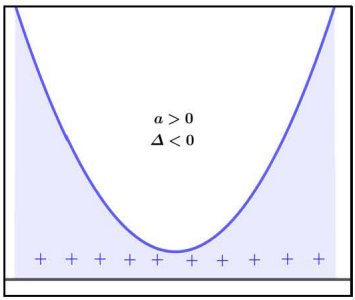


Figura 17.1.4.5

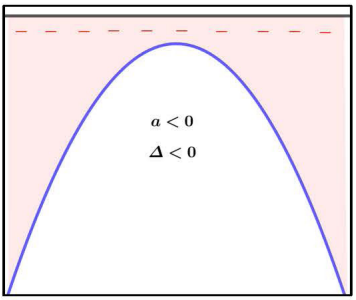


Figura 17.1.4.6

Exemplo: Estude o sinal da função $f(x) = x^2 - 7x + 6$.

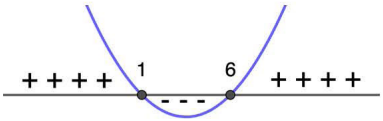
Solução: Vamos incialmente calcular os zeros da função.

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.1.6}}{2.1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ x'' = 1 \end{cases}.$$

Como a equação possui dois zeros reais e $a > 0$, o gráfico se apresenta assim:



Resposta:

$f(x) < 0$ para $1 < x < 6$.

$f(x) > 0$ para $x < 1$ e $x > 6$.

$f(x) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 6$ (zeros da função).

2º exemplo: Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Solução: Considerando $f(x) = x^2 + 2x - 3$, vamos estudar o sinal dessa função e verificar para que valores $f(x) < 0$.

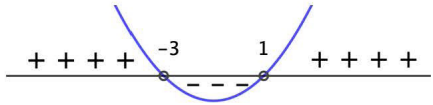
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \ (a = 1, b = 2, c = -3).$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-3)}}{2.1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2.1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = -3 \end{cases}.$$

Como a função possui dois zeros reais e $a > 0$, o gráfico com o estudo do sinal é:



E desse modo, os valores de x para $x^2 + 2x - 3 < 0$ (negativo) estão entre -3 e 1.

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1\}}.$$

3º exemplo (inequação simultânea): Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $-2x - 2 \leq x^2 - 8x + 6 \leq -6$.

Solução: Vamos resolver a 1ª parte: $-2x - 2 \leq x^2 - 8x + 6$. Precisamos organizar os termos para chegarmos a uma inequação do tipo $ax^2 + bx + c \leq 0$ e estudar o sinal.

Passando tudo para o primeiro membro, encontramos

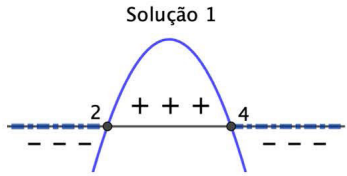
$$-2x - 2 \leq x^2 - 8x + 6 \Rightarrow -x^2 + 8x - 2x - 6 - 2 \leq -x^2 + 6x - 8 \leq 0$$

$$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.(-1).(-8)}}{2.(-1)} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 4 \end{cases}.$$

Como a (in)equação possui dois zeros reais e $a < 0$, o gráfico com o estudo do sinal é:



Resolvendo a 2ª parte $x^2 - 8x + 6 \leq -6$. Passando o -6 para o 1º membro, temos

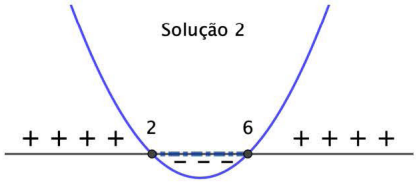
$$x^2 - 8x + 6 + 6 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 \leq 0.$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \Rightarrow \\ c = 12 \end{cases}$$

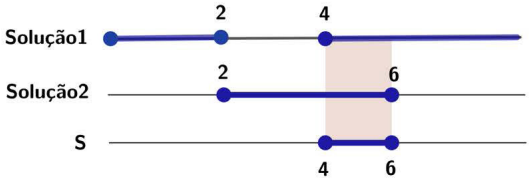
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.12}}{2.1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ x'' = 2 \end{cases}.$$

Como a (in)equação possui dois zeros reais e $a > 0$, o gráfico com o estudo do sinal fica assim:



A solução é a interseção da solução de ambas as partes:

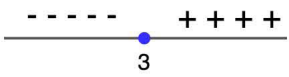


$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 6\}}.$$

4º exemplo (inequação produto): Resolver a inequação $(2x - 6)(x^2 - 3x - 4) \geq 0$.

Solução: Vamos estudar o sinal de $2x - 6$ (1ª parte).

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{x = 3}.$$



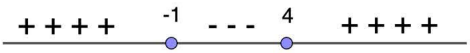
O estudo do sinal de $x^2 - 3x + 4 = 0$ (2ª parte):

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

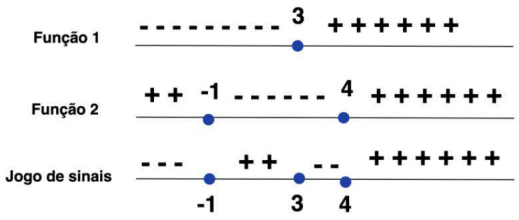
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -1 \end{cases}.$$

Como a (in)equação possui dois zeros reais e $a > 0$, o gráfico com o estudo do sinal, fica assim:



Fazendo o jogo de sinais:



A solução requer valores positivos (conforme solicitado na questão), que estão entre -1 e 3 e maiores que 4. Portanto,

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3 \; ou \; x \geq 4\}}.$$

5º exemplo (inequação quociente): Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $\frac{x^2+x-20}{-x^2+4} \leq 0$.

Solução: O estudo do sinal de: $x^2 + x - 20$ (função 1):

$$x^2 + x - 20 = 0 \; (a = 1, b = 1, c = -20).$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.1.(-20) = 1 + 80 \Rightarrow \boxed{\Delta = 81}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-1 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = -5 \end{cases}.$$

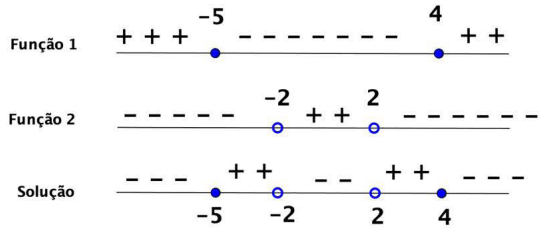
Como a função possui dois zeros reais e $a > 0$, o intervalo é negativo para valores entre -5 e 4 (inclusive) e positivo para os demais intervalos.

O estudo do sinal de $-x^2 + 4$ (função 2):

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow -x^2 = -4 \quad (x - 1) \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -2 \end{cases}.$$

Como essa função possui dois zeros reais e $a < 0$, o intervalo é positivo para valores entre -2 e 2 (excluindo -2 e 2, pois está no denominador) e negativo para os demais intervalos.

A representação geral dos intervalos e a solução é:



Solução:

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \; ou \; -2 < x < 2\}}.$$

EXERCÍCIOS 17.2

1)Realize o estudo do sinal das funções quadráticas a seguir:

a) $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$

b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$

c) $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

d) $f(x) = x^2$

2)Para quais valores de x, $f(x) = -2x^2 + 18x - 28$ é maior que zero?

3) Determine os valores de k para que a função quadrática $f(x) = x^2 - 4x - k$, seja positiva para todo x real.

4)Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $9 \leq 3x^2$

b) $4x^2 + 3x - 1 \leq 0$

c) $(x+2)^2 > 3x + 2$

d) $x(1-x) > \frac{1}{2}$

e) $(x-3)(-x^2+3x+10) \geq 0$

f) $\frac{x^2-5x+4}{3x^2+4x-4} \leq 0$

g) $x + 4 < -\frac{2}{x+1}$

h) $\frac{(x^2-9)(x-5)}{4x^2-5x+1} \leq 0$

5)(UFU-MG) A solução da inequação simultânea $x - 1 \leq -x^2 - 1 \leq 2x - 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

6)(UNESP-SP) O conjunto solução da inequação $(x-2)^2 < 2x - 1$, considerando como universo o conjunto $\mathbb{R}$, está definido por:

a) $1 < x < 5$

b) $3 < x < 5$

c) $2 < x < 4$

d) $1 < x < 4$

e) $2 < x < 5$

7) (UEMS – MS) Pode-se afirmar que o conjunto solução da inequação $(x-3)(x^2-7x+12) < 0$ é:

a) S = $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$

b) S = $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ ou } x > 4\}$

c) S = $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq 0\}$

d) S = $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4 \text{ e } x \neq 3\}$

e) S = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

17.1.5. Inequação exponencial

Denomina-se inequação exponencial, toda inequação que possui uma expressão que representa uma função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ do tipo a^x, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

- $3^x > 243$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq \frac{1}{25}$
- $7^{x^2-5x+6} \leq 1$
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+1}$

Pare resolver esse tipo de inequação, devemos transformar os dois membros da inequação em potências de mesma base (assim como acontece em equações exponenciais) e posteriormente, aplicar a seguinte propriedade conforme a base a.

- Se $a > 1$, então a desigualdade se mantém entre os expoentes:

$$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2}.$$

- Se $0 < a < 1$, então a desigualdade é invertida entre os expoentes:

$$\boxed{a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2}.$$

Essa propriedade consiste no fato de que funções exponenciais do tipo $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), são crescentes para $a > 1$ e decrescentes para $0 < a < 1$, conforme visto na unidade 8 sobre o assunto.

Exemplo: Resolva as inequações em $\mathbb{R}$.

a) $3^x > 243$

Solução: Primeiro passo, igualar as bases. Para isso, devemos substituir 243 pelo seu valor fatorado 3^5.

$$3^x > 243 \Rightarrow 3^x > 3^5 \Rightarrow \boxed{x > 5}.$$

Como as bases são maiores que 1, a desigualdade se mantém entre os expoentes. Desse modo,

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}}.$$

b) $7^{x^2-5x+6} \leq 1$

Solução: Podemos igualar as bases, substituindo 1 por 7^0.

$$7^{x^2-5x+6} \leq 1 \Rightarrow 7^{x^2-5x+6} \leq 7^0$$

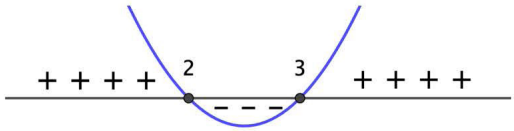
Como as bases são maiores que 1, a desigualdade se mantém entre os expoentes. Assim,

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow (a = 1, b = -5 \text{ e } c = 6)$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-5)^2 - 4.1.6 = 25 - 24 \Rightarrow \boxed{\Delta = 1}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{+5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 2 \end{cases}.$$

O estudo do sinal de $x^2 - 5x + 6$ é:



Como desejamos valores negativos, a solução é $\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq x \leq 3\}}$.

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq \frac{1}{25}$

Solução: Igualando as bases, encontramos

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+2} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

Como as bases estão entre 0 e 1, a desigualdade entre os expoentes ficam invertidas.

$$3x + 2 \leq 2 \Rightarrow 3x \leq 2 - 2 \Rightarrow 3x \leq 0 \Rightarrow x \leq \frac{0}{3} \Rightarrow \boxed{x \leq 0}.$$

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 0\}}.$$

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+1}$

Solução: Igualando as bases, dispomos de

$$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right)^{-x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x+1}$$

Como as bases estão entre 0 e 1, a desigualdade entre os expoentes ficam invertidas.

$$-2x - 2 > x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -2x - 2 - x^2 + 2x - 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 3 < 0.$$

Para qualquer valor x a expressão $x^2 + 3$ é sempre positiva, portanto, essa inequação não possui solução real, isto é, $\boxed{S = \{\}}$.

e) $9^x - 4.3^x + 3 > 0$

Solução: Escrevendo $y = 3^x$, temos

$$9^x - 4.3^x + 3 > 0 \Rightarrow \left(\underbrace{3^x}_{y}\right)^2 - 4.\underbrace{3^x}_{y} + 3 > 0 \Rightarrow \boxed{y^2 - 4y + 3 > 0}$$

$$y^2 - 4y + 3 > 0 \Rightarrow (a = 1, b = -4 \; e \; c = 3)$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 \Rightarrow \boxed{\Delta = 4}.$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.1} = \frac{+4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} y' = 3 \\ y'' = 1 \end{cases}$$

De acordo com o estudo do sinal, a função é positiva para $y < 1$ e $y > 3$. No entanto, para $y' = 3$, encontramos:

$$y = 3^x \Rightarrow 3 = 3^x \Rightarrow \boxed{x = 1}.$$

E para $y' = 1$:

$$y = 3^x \Rightarrow 1 = 3^x \Rightarrow \boxed{x = 0}.$$

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \; ou \; x > 1\}}.$$

17.1.6. Inequação logarítmica

Denomina-se inequação logarítmica toda inequação que possui uma expressão que representa uma função logarítmica f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = log_a x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

- $log_4(x-1) > log_4 5$
- $log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \geq log_{\frac{1}{3}} 2$
- $log_9(5x-4) < log_9 x - log_{81} x + 2$
- $log_x x^2 - 3 \leq log_x x$

Para resolver uma inequação logarítmica, reduzimos os dois membros da inequação para logaritmos de mesma base (se for preciso) e, aplicamos a seguinte propriedade (cuja justificativa é análoga às funções exponenciais):

- Se $a > 1$, então a desigualdade se mantém entre os logaritmandos:

$$\boxed{log_a x_1 > log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2}.$$

- Se $0 < a < 1$, então a desigualdade é invertida entre os logaritmandos:

$$\boxed{log_a x_1 > log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2}.$$

Em todos os casos deve-se sempre verificar a condição de existência do logaritmo.

Exemplo: Resolva as inequações em $\mathbb{R}$.

a) $log_4(x-1) > log_4 5$

Solução: Como as bases são iguais e $a > 1$, mantém-se a desigualdade entre os logaritmandos.

$$x - 1 > 5 \Rightarrow x > 5 + 1 \Rightarrow \boxed{x > 6}.$$

Condição de existência para o logaritmando: Como o logaritmando precisa ser positivo (f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$), então

$$x - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 1}.$$

Um número maior que 6 é um número maior que 1. Dessa forma, está satisfeita a condição de existência. A solução é, portanto,

$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}}.$$

b) $log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \geq log_{\frac{1}{3}} 2$

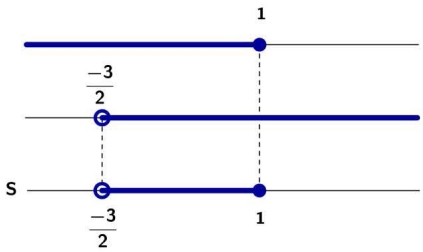
Solução: Como as bases são iguais e $0 < a < 1$, inverte-se a desigualdade entre os logaritmandos.

$$2x + 3 \leq 5 \Rightarrow 2x \leq 5 - 3 \Rightarrow x \leq \frac{2}{2} \Rightarrow \boxed{x \leq 1}.$$

Condição de existência para o logaritmando:

$$2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow \boxed{x > -\frac{3}{2}}.$$

Fazendo a interseção:



$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x \leq 1\}}.$$

c) $log_{81}\, 2 < log_{81}\, 2(x+8) - log_9(x+2)$

Solução: Veja que os logaritmos não estão na mesma base. Assim, vamos alterar a base do logaritmo $log_9(x+2)$ para 81.

$$log_9(x+2) = \frac{log_{81}(x+2)}{log_{81}\, 9} = \frac{log_{81}(x+2)}{\frac{1}{2}} = 2.log_{81}(x+2) = \boxed{log_{81}(x+2)^2}.$$

Substituindo na inequação, encontramos

$$log_{81}\, 2 < log_{81}\, 2(x+8) - log_9(x+2) \Rightarrow$$
$$log_{81}\, 2 < log_{81}\, 2(x+8) - log_{81}(x+2)^2.$$

Aplicando a propriedade do quociente no segundo membro:

$$log_{81}\, 2 < log_{81} \frac{2(x+8)}{(x+2)^2}.$$

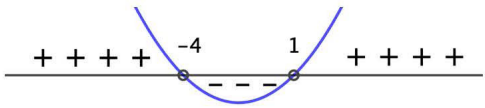
Como as bases agora estão iguais e são maiores que 1, devemos manter a desigualdade entre os logaritmandos e, isso nos dá

$$2 < \frac{2(x+8)}{(x+2)^2} \Rightarrow \quad 2(x+2)^2 < 2(x+8) \Rightarrow \quad (x+2)^2 < x+8 \Rightarrow$$

$$x^2 + 4x + 4 < x + 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + 3x - 4 < 0} \quad \Rightarrow \quad (a = 1, b = 3 \; e \; c = -4).$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = 3^2 - 4.1.(-4) = 9 + 16 \Rightarrow \boxed{\Delta = 25}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2.1} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 4 \end{cases}.$$



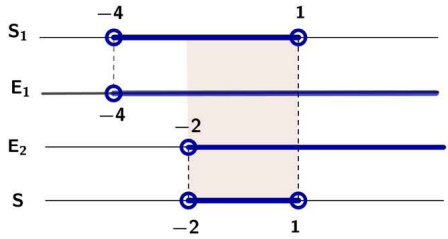
$$\boxed{S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}}.$$

Condições de existência para os logaritmandos é

$$2(x+8)>0 \Rightarrow \boxed{x>-4}. \Rightarrow E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x>-4\}.$$

$$(x+2)>0 \Rightarrow \boxed{x>-2}. \Rightarrow E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x>-2\}.$$

Fazendo a interseção, encontramos



$$\boxed{S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1\}}.$$

d) $log_x(x^2-4) \geq log_x(x-2)$

Solução: Embora essa inequação logarítmica não esteja na forma $f(x) = log_a x$, podemos também resolvê-la verificando a condição de existência também para a base.

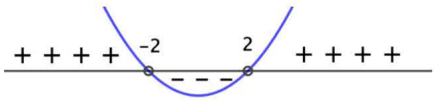
Condições de existência para a base:

$$x>0 \text{ e } x \neq 1 \Rightarrow \boxed{E_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x>0 \text{ e } x \neq 1\}}.$$

Condições de existência para os logaritmandos:

$$x^2-4>0 \Rightarrow \boxed{E_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x<-2 \text{ ou } x>2\}}.$$

$$x-2>0 \Rightarrow \boxed{x>2} \Rightarrow \boxed{E_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x>2\}}.$$



Como a base é variável, há dois casos a considerar.

1º caso: Se a base for maior que 1 $(x>1)$, devemos manter as desigualdades entre os logaritmandos:

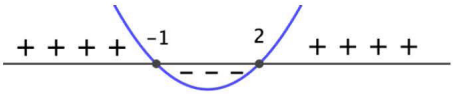
$$log_x(x^2-4) \geq log_x(x-2) \Rightarrow x^2-4 \geq x-2 \Rightarrow x^2-4-x+2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x^2-x-2 \geq 0 \Rightarrow (a=1, b=-1 \; e \; c=-2).$$

$$\Delta = b^2-4.a.c = (-1)^2-4.1.(-2) = 1+8 \Rightarrow \boxed{\Delta = 9}.$$

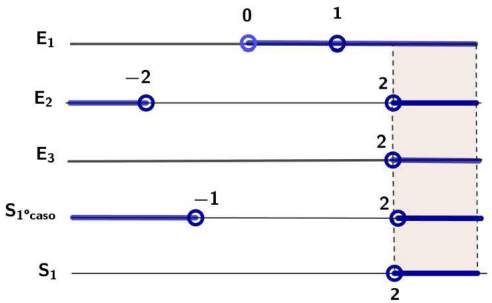
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -1 \end{cases}.$$

Fazendo o estudo do sinal de $x^2 - x - 2$, temos



$$\boxed{S_{1º\,caso} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}}.$$

A solução é



$$\boxed{S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}}.$$

Uma solução alternativa para S_1:

$$log_x(x^2 - 4) \leq log_x(x - 2) \Rightarrow log_x(x + 2)(x - 2) \leq log_x(x - 2) \Rightarrow$$

$$log_x(x + 2) + \cancel{log_x(x - 2)} \leq \cancel{log_x(x - 2)} \Rightarrow \boxed{log_x(x + 2) \geq 0}.$$

Para a base maior que 1:

$$log_x(x + 2) \geq log_x 1 \Rightarrow x + 2 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x \geq -1}.$$

A interseção dessa solução com a condição de existência $(x > 2)$, nos dá

$$\boxed{S_{1º\,caso} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}}$$

Observação: A solução alternativa para S_1 só foi viável devido ao cancelamento de expressões iguais em ambos os membros. Caso não seja possível o cancelamento, basta seguir os mesmos passos da solução anterior.

2º caso: Se a base for entre zero e um, inverte-se as desigualdades entre os logaritmandos. Assim, de acordo com a solução alternativa anterior, temos

$$log_x(x + 2) \geq log_x 1 \Rightarrow x + 2 \leq 1 \Rightarrow \boxed{x \leq -1}.$$

A interseção dessa solução com a condição de existência $(x > 2)$, nos remete a

$$\boxed{S_{2º\,caso} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}}$$

Portanto,

$$\boxed{S = S_{1º\,caso} \cup S_{2º\,caso} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}}.$$

EXERCÍCIOS 17.3

1)Resolva as inequações exponenciais em $\mathbb{R}$:

a) $3^x > 81$

b) $2^x \leq \sqrt{32}$

c) $4^x \geq 128$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{81}{625}$

f) $0{,}001^x < \frac{1}{10}$

g) $5^{2x+3} > 125$

h) $(0{,}78)^{2x-2} \geq 1$

i) $2^{x^2-5x+8} > 4$

j) $4^{x^2+1} > 32^{1-x}$

k) $0{,}64^{-x^2+x} < 0{,}8^{6-3x}$

l) $4^{x+1} - 4^{x-1} < \frac{15}{4}$

m) $4^x - 3.2^{x+1} + 8 \leq 0$

2)Resolva as inequações logarítmicas em $\mathbb{R}$:

a) $log_3(2x-3) > log_3 5$

b) $log_4(5x+10) > log_4(2x-20)$

c) $log_{\frac{1}{2}}(3x+11) > log_{\frac{1}{2}} 2$

d) $log_{\frac{1}{3}}(x-8) > log_{\frac{1}{3}}(2x-10)$

e) $log\, 3 < log(2x^2-5x)$

f) $log_{100}(x-4) \geq log_{100}(x^2-x-2)$

g) $log_{25} 1 < log_{25}(x+4) - log_5(x+3)$

h) $log_x(x^2-11x+20) \geq 1$

3)(ENEM) A Hydrangea macrophylla é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com $pH < 7$) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com $pH > 7$) a flor é rosa. Considere que a Hydrangeo cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $pH = -log\, 10x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio ($H+$).

Para produzir a Hydrangea cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.

b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.

c) valores maiores que 7 e menores que 8.

d) valores maiores que 70 e menores que 80.

e) valores maiores que 10^{-8}e menores que 10^{-7}.

17.2. Módulo e função modular

Antes de iniciarmos os estudos sobre funções modulares, precisamos entender o que significa módulo de um número real e suas propriedades.

17.2.1. Módulo de um número real

Definição 17.2.1.1: Dado um número real x, denomina-se **módulo** ou **valor absoluto** de x, o número indicado por $|x|$ dado por:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}.$$

Exemplos:

- $|2| = 2$
- $|15| = 15$
- $|0| = 0$
- $\left|\frac{1}{9}\right| = \frac{1}{9}$

Nesses exemplos, constatamos que o módulo de um número positivo ou nulo é o próprio número.

Outros exemplos:

- $|-5| = 5$
- $\left|-\sqrt{17}\right| = \sqrt{17}$
- $\left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$
- $|-0{,}01| = 0{,}01$

SAIBA MAIS!

Aplicações interessantes de módulo encontramos na fórmula da distância entre ponto e reta, na fórmula da área de um triângulo, no cálculo de desvio médio, etc.

Nesses outros exemplos, é fácil perceber que o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

Veja também que o módulo de um número sempre é positivo. Dessa forma:

- $|x| = y$, não apresenta solução se $y < 0$.
- $|x| = y$, apresenta solução $-x$ ou x, se $y > 0$.

17.2.2. Propriedades envolvendo módulos

De acordo com a definição, podemos anunciar as seguintes propriedades.

Propriedade 1: $|x| \geq 0$.

Propriedade 2: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Propriedade 3: $|x|.|y| = |x.y|$.

Propriedade 4: $x \leq |x|$.

Propriedade 5: $|x|^2 = x^2$.

Propriedade 6: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Propriedade 7: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Propriedade 8: $|x-y| \geq |x| - |y|$.

Propriedade 9: $|x| = |a|$ *e* $a > 0 \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$.

Propriedade 10: $|x| \geq a$ *e* $a > 0 \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Propriedade 11: $|x| \leq a$ *e* $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Demonstraremos apenas as propriedades 4, 6, 7 e 11, que servirão como base para as demais demonstrações, ficando as demais a cargo do leitor.

Demonstração da propriedade 4: $x \leq |x|$.

Se $x < 0$, temos $x < |x|$ e se $x \geq 0$, temos $x \leq |x|$, logo $x \leq |x|$.

Demonstração da propriedade 6: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Se $x < 0$, temos $\sqrt{(-x)(-x)} = |x|$ e se $x \geq 0$, temos $\sqrt{x.x} = |x|$.

Demonstração da propriedade 7: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 \Rightarrow |x+y|^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Aplicando a propriedade 4, temos

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \Rightarrow |x+y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|.$$

Demonstração da propriedade 11: $|x| \leq a$ *e* $a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Aplicando a propriedade 6, temos

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \leq a \Leftrightarrow x^2 \leq a^2 \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - a^2 \leq 0}_{Função\ quadrática} \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

Exemplo: Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $|x| = 2$

Solução: $S = \{-2, 2\}$.

b) $|2x-4| = 8$

Solução:

$$|2x-4| = 8 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4 = 8, se\ x \geq 0 \\ 2x-4 = -8, se\ x < 0 \end{cases}$$

- $2x - 4 = 8 \Rightarrow 2x = 8 + 4 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} \Rightarrow \boxed{x = 6}$.
- $2x - 4 = -8 \Rightarrow 2x = -8 + 4 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} \Rightarrow \boxed{x = -2}$.

$$S = \{-2, 6\}.$$

c) $|x+5| = -3x - 11$

Solução: Inicialmente é preciso que

$$-3x - 11 \geq 0 \Rightarrow -3x \geq 11(x-1) \Rightarrow 3x \leq -11 \Rightarrow \boxed{x \leq \frac{-11}{3}}.$$

Resolvendo a equação, encontramos

$$|x+5| = -3x - 11 \Rightarrow \begin{cases} x+5 = -3x - 1, se\ x \geq 0 \\ x+5 = -(-3x-1), se\ x < 0 \end{cases}$$

- $x+5=-3x-11 \Rightarrow x+3x=-11-5 \Rightarrow 4x=-12 \Rightarrow x=\frac{-16}{4} \Rightarrow \boxed{x=-4}$
- $x+5=-(-3x-1) \Rightarrow x-3x=1-5 \Rightarrow -4x=-4 \Rightarrow x=\frac{-4}{-4} \Rightarrow \boxed{x=1}$.

Apenas a solução $x=-4$ satisfaz a condição $x \leq \frac{-11}{3}$, portanto $S=\{-4\}$.

d) $|2x+8|=|5x-10|$

Solução: Para resolver a equação devemos aplicar a propriedade 8.

$$|2x+8|=|5x-10| \Rightarrow \begin{cases} 2x+8=5x-10, se\ x \geq 0 \\ 2x+8=-(5x-10), se\ x<0 \end{cases}.$$

- $2x+8=5x-10 \Rightarrow 2x-5x=-10-8 \Rightarrow -3x=-18 \Rightarrow x=\frac{18}{3} \Rightarrow \boxed{x=6}$.
- $2x+8=-(5x-10) \Rightarrow 2x+5x=+10-8 \Rightarrow 7x=2 \Rightarrow \boxed{x=\frac{2}{7}}$.

$S=\{6, \frac{2}{7}\}$.

Observe que nesse item não é preciso verificar a condição de positividade, uma vez que ambos os membros estão em módulo.

e) $|x^2+x-4|=2$

Solução: Aplicando a definição, temos

$$|x^2+x-4|=2 \Rightarrow \begin{cases} x^2+x-4=2, se\ x \geq 0 \\ x^2+x-4=-2, se\ x<0 \end{cases}.$$

- $x^2+x-4=2 \Rightarrow x^2+x-4-2=0 \Rightarrow x^2+x-6=0.$

$$x^2+x-6 \geq 0 \Rightarrow (a=1, b=1\ e\ c=-6).$$

$$\Delta = b^2-4.a.c=1^2-4.1.(-6)=1+24 \Rightarrow \boxed{\Delta=25}.$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2.1}=\frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x'=2 \\ x''=-3 \end{cases}$$

- $x^2+x-4=-2 \Rightarrow x^2+x-4+2=0 \Rightarrow x^2+x-2=0.$

$$x^2+x-2 \geq 0 \Rightarrow (a=1, b=1\ e\ c=-2).$$

$$\Delta = b^2-4.a.c=1^2-4.1.(-2)=1+8 \Rightarrow \boxed{\Delta=9}.$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2.1}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x'=1 \\ x''=-2 \end{cases}.$$

Portanto, $S=\{-3,-2,1,2\}$.

2º exemplo (inequação modular): Determine em $\mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação $|x-3|>2$.

Solução: Para resolver uma inequação modular utilizamos as propriedades 10 e 11. São elas:

- $|x| \geq a\ e\ a>0 \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$.
- $|x| \leq a\ e\ a>0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.

Este exemplo é o caso da propriedade 10. Dessa maneira,

$$|x-3|>2 \Rightarrow x-3>2 \text{ ou } x-3<-2 \Rightarrow \boxed{x>5 \text{ ou } x<1}.$$

$$\boxed{S=\{x \in \mathbb{R} \mid x>5 \text{ ou } x<1\}}.$$

17.2.3. Função modular

Definição 17.2.3.1: Denomina-se **função modular** uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de associação $\boldsymbol{f(x) = |x|}$.

O gráfico dessa função pode ser construído de duas formas:

- Usando a definição de módulo.

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x \geq 0 \\ -x, se\ x < 0 \end{cases}$$

Assim, a parte positiva e nula das abscissas $(x \geq 0)$ é representada pela reta $f(x) = x$ e a parte negativa $(x < 0)$ é representada pela reta $f(x) = -x$.

Ver gráfico na figura 17.2.3.1.

- Atribuindo valores para x.

É possível construir o gráfico atribuindo valores convenientes para x. A tabela a seguir, mostra os dados para $x = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

x	$\lvert x \rvert$	y
-2	$\lvert -2 \rvert$	2
-1	$\lvert -1 \rvert$	1
0	$\lvert 0 \rvert$	0
1	$\lvert 1 \rvert$	1
2	$\lvert 2 \rvert$	2

A disposição desse pontos e o gráfico está na figura 17.2.3.2.

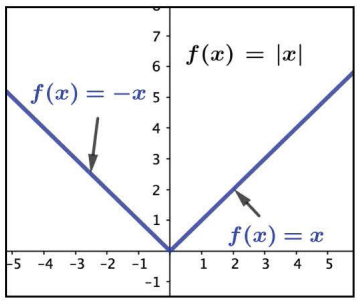


Figura 17.2.3.1

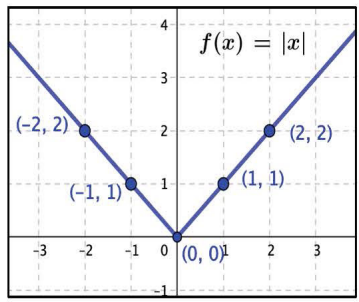


Figura 17.2.3.2

Note que o conjunto imagem dessa função é $\mathbb{R}^+$, pois y assume valores sempre não negativos.

Um tipo de função modular bastante comum é a função escrita na forma

$$\boxed{f(x) = |x + a| + b}$$

O gráfico dessa função é semelhante ao da função $f(x) = |x|$, porém com uma translação horizontal e/ou vertical.

A translação horizontal ocorre em a unidades para esquerda do gráfico $f(x) = |x|$, se a for positivo e a unidades para direita, se a for negativo. Veja na figura 17.2.3.3, alguns exemplos de translação horizontal.

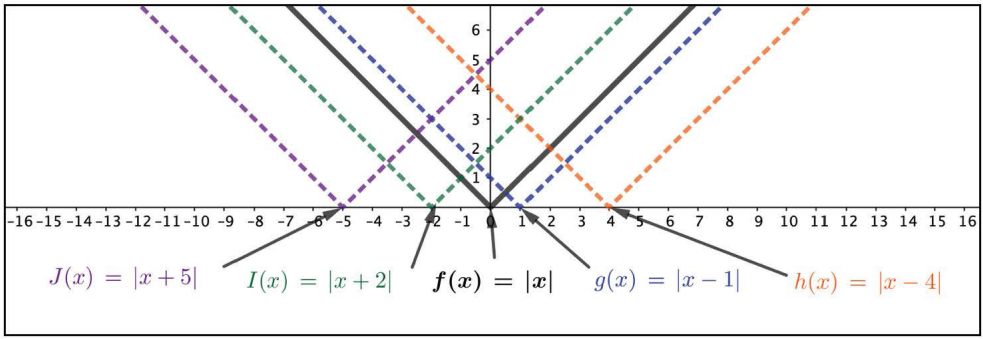


Figura 17.2.3.3

A translação vertical ocorre em b unidades para baixo do gráfico $f(x) = |x|$, se b for negativo e em b unidades para cima, se b for positivo. Veja na figura 17.2.3.4, alguns exemplos de translação vertical.

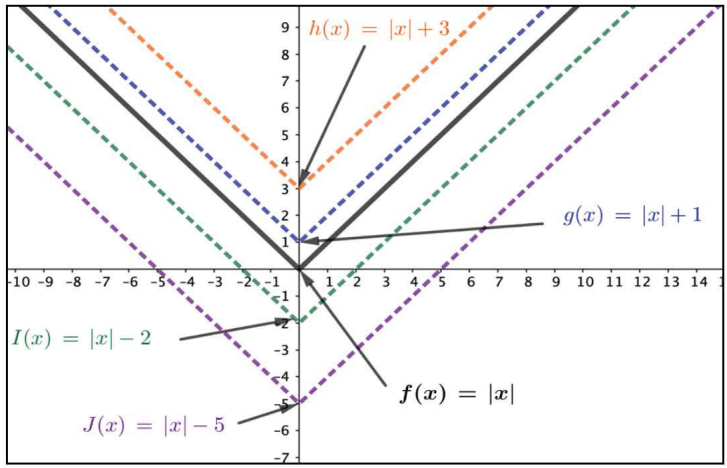


Figura 17.2.3.4

Resumindo:

$$f(x) = |x+a| + b$$

Translação horizontal — Translação vertical

Exemplo: $f(x) = |x-4|+1$

Solução: O gráfico dessa função é semelhante ao da função $f(x) = |x|$, porém com uma translação para direita em 4 unidades e uma translação para cima em 1 unidade.

Outra solução (aplicando a definição):

Como o gráfico de uma função modular tem seu comportamento alterado em torno do zero, devemos calcular o zero da expressão $|x-4|$.

$$x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}.$$

Aplicando a definição: $|x-4|+1 = \begin{cases} (x-4)+1 = \boxed{x-3}, se\ x \geq 4. \\ -(x-4)+1 = \boxed{-x+5}, se\ x < 4. \end{cases}$

Veja o gráfico dessa função na figura 17.2.3.5 e note que $D = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | \ y \geq 1\}$.

2º exemplo: $f(x) = |x+5|-3$

Solução: O gráfico dessa função é semelhante ao da função $f(x) = |x|$, porém com uma translação para esquerda em 5 unidades e uma translação para baixo em 3 unidades.

Calculando o zero da expressão $|x+5|$.

$$x+5=0 \Rightarrow \boxed{x=5}.$$

Aplicando a definição: $|x+5|-3 = \begin{cases} (x+5)-3 = \boxed{x+2}, se\ x \geq -5. \\ -(x+5)-3 = \boxed{-x-8}, se\ x < -5. \end{cases}$

Veja o gráfico dessa função na figura 17.2.3.6 e note que $D = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | \ y \geq -3\}$.

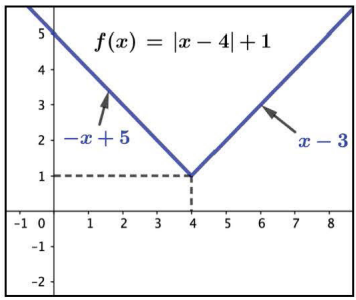


Figura 17.2.3.5

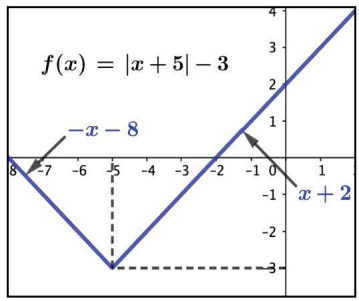


Figura 17.2.3.6

3º exemplo: $f(x) = |2x+4|+|x-3|$

Solução: Para construir esse tipo de gráfico, devemos aplicar a definição nas duas partes.

$|2x+4| = \begin{cases} 2x+4, se\ x \geq -2 \\ -(2x+4), se\ x < -2 \end{cases}$ ← Veja que $x = -2$ é o zero da função $|2x+4|$.

$|x-3| = \begin{cases} x-3, se\ x \geq 3 \\ -(x-3), se\ x < 3 \end{cases}$ ← Observe que $x = 3$ é o zero da função $|x-3|$.

Há três casos a considerar nessa função.

1º caso: $x < -2$.

$f(x) = \underbrace{|2x+4|}_{-(2x+4)} + \underbrace{|x-3|}_{-(x-3)} = -(2x+4) - (x-3) \Rightarrow$

$-2x - 4 - x + 3 = \boxed{-3x - 1}$.

2º caso: $-2 \leq x < 3$.

$f(x) = \underbrace{|2x+4|}_{(2x+4)} + \underbrace{|x-3|}_{-(x-3)} = (2x+4) - (x-3) \Rightarrow$

$2x + 4 - x + 3 = \boxed{x + 7}$.

3º caso: $x \geq 3$.

$f(x) = \underbrace{|2x+4|}_{(2x+4)} + \underbrace{|x-3|}_{(x-3)} = (2x+4) + (x-3) \Rightarrow \boxed{3x + 1}$.

Veja o gráfico dessa função na figura 17.2.3.7.

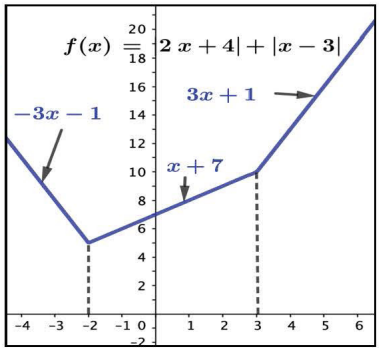


Figura 17.2.3.7

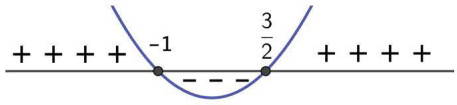
4º exemplo: $f(x) = |2x^2 - x - 3|$

Solução: Calculando os zeros da função

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \quad (a = 2, b = -1 \text{ e } c = -3).$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-1)^2 - 4.2.(-3) = 1 + 24 \Rightarrow \boxed{\Delta = 25}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2.2} = \frac{1 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{3}{2} \\ x'' = -1 \end{cases}$$



Para $x \leq -1$ ou $x \geq \frac{3}{2}$, temos $2x^2 - x - 3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{f(x) = 2x^2 - x - 3}$.

Para $-1 < x < \frac{3}{2}$, temos

$$2x^2 - x - 3 < 0 \Rightarrow f(x) = -(2x^2 - x - 3) \Rightarrow \boxed{f(x) = -2x^2 + x + 3}.$$

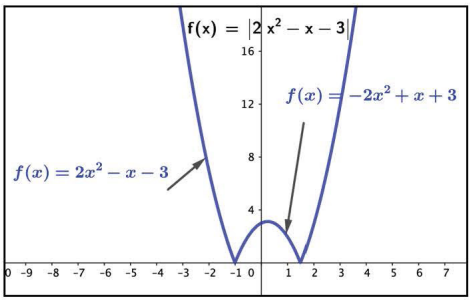


Figura 17.2.3.8

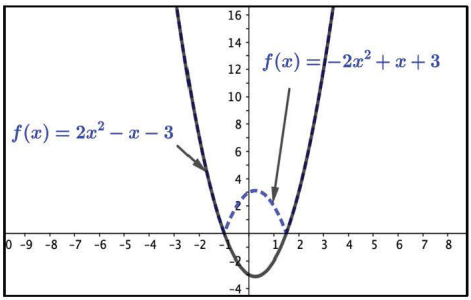


Figura 17.2.3.9

Compare a função modular com a função quadrática e observe que são semelhantes, no entanto, a parte negativa da função modular é refletida para cima em relação ao eixo x.

EXERCÍCIOS 17.4

1)Resolva as equações em $\mathbb{R}$.

a) $|x| = 10$

b) $|x| = -8$

c) $|x - 4| = 1$

d) $|x + 9| = 3$

e) $|2x - 8| = 12$

f) $|3x - 6| = 18$

g) $|-2x - 2| = 10$

h) $|x + 1| = -2x - 5$

i) $|-2x + 4| = -3x - 1$

j) $|x + 7| = |x - 1|$

k) $|2x - 8| = |x + 12|$

l) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

m) $|x^2 - 3x + 1| = 5$

n) $|x - 8| + |x + 3| = 3$

2)Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações.

a) $|x + 4| > 3$

b) $|x - 5| < 1$

c) $|x^2 - 8| \geq 1$

d) $|x^2 - x + 1| \leq 1$

3)Construa os gráficos das seguintes funções.

a) $f(x) = |x - 4| - 1$

b) $f(x) = |x + 7| - 8$

c) $f(x) = |2x - 8| + 5$

d) $f(x) = |x - 1| - |x|$

e) $f(x) = |x + 10| + |2x - 12|$

f) $f(x) = |2x - 6| + |3x - 18|$

g) $f(x) = |x^2 - 8x + 7|$

h) $f(x) = |-x^2 + 4x - 3|$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGROPÓS. Agropós. **Pragas Agrícolas que mais Afetam a Agricultura!**, 2018. Disponivel em: <https://agropos.com.br/pragas-agricolas/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

AGROREPORTER. **calibracao de pulverizador costal manual**, 2018. Disponivel em: <http://agroreporter.com.br/calibracao-de-pulverizador-costal-manual/>. Acesso em: 23 mar. 2019.

ALBUQUERQUE, F. D. S. et al. Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental. **Crescimento e rendimento de pimentão fertigado sob diferentes lâminas de irrigação e doses de potássio**, Campina Grande, v. 15, n. 07, jul. 2011.

ALVES, J. J. L. et al. Revista Brasileira de Plantas Medicinais. **Cinética de secagem das folhas de Hyptis suaveolens**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 168-176, 2017.

AMARO, G. B. Embrapa. **Adubos e fertilizantes**, 2019. Disponivel em: <http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/pimenta/arvore/CONT000gn08zc7m02wx5ok0liq1mqw825isw.html>. Acesso em: 02 abr. 2019.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. II, 2014.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. I, 2014.

ARAGUAIA, M. Brasil escola. **Escherichia coli**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/biologia/escherichia-coli.htm.>. Acesso em: 03 dez. 2020.

BATALHA, M. O. **Gestão agroindustrial - Gepai - grupo de estudos e pesquisas**. São Paulo: Atlas, 2017.

BEEFPOINT, E. Beefpoint educação. **O rendimento da carcaça bovina**, 2002. Disponivel em: <https://www.beefpoint.com.br/o-rendimento-da-carcaca-bovina-4992/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

BOSCO, L. C. et al. Revista brasileira de fruticultura. **Seleção de modelos de regressão para estimar a área foliar de macieiras 'royal gala' e 'fuji suprema' sob tela antigranizo e em céu aberto**, Jaboticabal, v. 34, p. 504-514, jun. 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1996.

BRITO, F. Agroceres. **Matéria Seca**, 2017. Disponivel em: <https://agroceresmultimix.com.br/blog/ajuste-materia-seca/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

CARMO, M. P. D.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria, números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CEPEA/ESALQ. Agrolink. **Preço do café arábica sobe 8,7% em novembro**, 2010. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/noticias/preco-do-cafe-arabica-sobe-8-7--em-novembro_122759.html>. Acesso em: 05 abr. 2019.

CEPLAC. gov.br. **Quantos peixes coloco no viveiro?**, 2018. Disponivel em: <http://www.ceplac.gov.br/restrito/publicacoes/cartilhas/CT_03.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2019.

CHAVES, L. H. G. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento, distribuição e acúmulo de cobre e zinco em plantas de pinhão-manso**, Fortaleza, v. 41, n. 2, p. 167-176, jun. 2010.

COUTO, R. H. N. **Apicultura - manejo e produtos por Regina Helena Nogueira Couto e Leomam Almeida Couto.** Jaboticabal: FUNEP, 2006.

CRUZ, F. G. G. **Formulação e fabricação de racões**. Manaus: EDUA, 2017.

DALL'AGNOL, A. Agrolink. **A saga da soja no Brasil e no Mundo**, 2017. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/colunistas/coluna/a-saga-da-soja-no-brasil-e-no-mundo_400724.html>. Acesso em: 29 jun. 2019.

DIAS, V. R. D. M. et al. Centro científica conhecer. **Relação entre a radiação fotossinteticamente ativa interceptada e a formação de matéria seca de frutos de manga**, 2011. Disponivel em: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2011a/agrarias/relacao%20entre%20radiacao.pdf>. Acesso em: 27 maio 2019.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometrial espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, v. 10, 1993.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. São Paulo: Atual, v. 9, 1993.

EMBRAPA. Ageitec. **Origem da acidez**, 2018. Disponivel em: <https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/soja/arvore/CONTAG01_34_271020069132.html>. Acesso em: 21 jun. 2019.

EMBRAPA. **Nova cultivar de açaizeiro vai manter fornecimento do fruto o ano todo**, 2019. Disponivel em: <https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/48210103/nova-cultivar-de-acaizeiro-vai-manter-fornecimento-do-fruto-o-ano-todo>. Acesso em: 12 dez. 2019.

EXTRA. Globo. **Alcool ou gasolina qual a melhor opcao?**, 2012. Disponivel em: <https://extra.globo.com/economia/100-dias-de-economia/alcool-ou-gasolina-qual-a-melhor-opcao-5378674.html>. Acesso em: 07 abr. 2013.

FERREIRA, R. S. **Matemática aplicada às ciências agrárias**. Viçosa : UFV, 1999.

FILHO, A. A. et al. Pubvet. **Ganho em peso médio diário de diferentes grupos genéticos de bovinos de corte**, v. 11, n. 1, p. 87-90, jan. 2017.

FILHO, A. F. D. O. et al. Revista verde de agroecologia e desenvolvimento sustentável. **crescimento de cultivares de mamoneira sob doses de torta de mamona**, Mossoró, v. 5, n. 5, p. 18-24, out. 2010.

FILHO, P. D. S. E. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Parâmetros físicos do solo relacionados com o avanço da frente de molhamento**, Campina grande, v. 17, n. 2, p. 153-161, 2013.

FORMICONI, I. Farmnews. **Preços do milho e seu comportamento ano a ano**, 2016. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/comportamento-precos-milho/>. Acesso em: 19 abr. 2019.

FORMICONI, I. Farmnews. **Variação anual dos preços de soja**, 2018. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/variacao-anual-dos-precos-da-soja/>. Acesso em: 20 maio 2019.

FRANCISCO, W. D. C. E. Brasil Escola. **Escala Richter**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/escala-richter.htm>. Acesso em: 27 jun. 2019.

FREIRE, F. D. **Caderno de Matemática do ensino médio**. Macapá: [s.n.], v. 1, 2, 3 e 4, 2013.

FREIRE, F. D. **o uso de um livro-caderno de matemática alternativo em sala de aula:** praticidade e coerência didática voltadas para a realidade local e tecnológica. Macapá: Dissertação de mestrado, 2014.

GONCALVES, F. P. Universidade de São Paulo. **Progresso poliético e quantificação de danos da clorose Variegada dos citros em laranjeiras "natal" submetidas a deficit hídricos**, Piracicaba, 2010.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, v. 5, 1993.

HERRMANN, J. C.; KINETZ, S. R. R.; ELSNER, T. C. UNIJUÍ. **Modelagem matemática no cultivo do alface**, 2019. Disponivel em: <https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/alface/index.html>. Acesso em: 23 jun. 2019.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. São Paulo: Atual, v. 6, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria analítica. São Paulo: Atual, v. 7, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** trigonometria. São Paulo: Atual, v. 3, 1993.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** logarítmos. São Paulo: Atual, v. 2, 1993.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, v. 4, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** conjuntos, funções. São Paulo: Atual, v. 1, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar:** limites, derivadas, noções de integral. São Paulo: Atual, v. 8, 1993.

INSTITUTOAGRO. **Curso de produção agrícola**, 2019. Disponivel em: <https://institutoagro.com.br/custo-de-producao-agricola/>. Acesso em: 14 abr. 2019.

KHAN ACADEMY. **Crescimento exponencial e logístico**. Disponivel em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth>. Acesso em: 28 jun. 2019.

LACERDA, J. R. et al. XXXV congresso brasileiro de ciência do solo. **Fertilizante fosfatado revestido com polímero no crescimento e fisiologia do cafeeiro**, Natal, ago. 2015.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA e fundação vitae, 1991.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2ª edição. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio - volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2006.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 3**. Rio de Janeiro: SBM, v. 3, 2006.

LUZ, M. J. D. S.; FERREIRA, G. B.; BEZERRA, J. R. C. Adubação e Correção do Solo: Procedimentos a Serem Adotados em Função dos Resultados da Análise do Solo. **EMBRAPA**, Campina Grande, out. 2002. ISSN 0100-6460.

MARCONDES, L. A.; BUENO, S. M. Revistas unilago. **Processo de lavagem a seco de cana de açúcar**, 2019. Disponivel em: <http://revistas.unilago.edu.br/index.php/revista-cientifica/article/view/220/196>. Acesso em: 25 jan. 2020.

MARTINS, G.; VASCONCELLOS, E. F. C.; LUCCHES, A. A.. Anais da escola superior de agricultura "Luiz de Queiroz". **Correlações entre parâmetros de análise de crescimento de cultivares tomateiro**, Piracicaba, v. XLII , 1985.

MARTINS, W. A. C. et al. Anais III SINPROVS. **Análise do feijão Caupi (vigna unguiculata) (l.) walp.) submetido a estresse hídrico e diferentes doses de biofertilizantes**, 2018. Disponivel em: <http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/40282>. Acesso em: 03 dez. 2020.

MASCARENHAS, J. R. O. Brazil document. **Densidade de plantio**, 2018. Disponivel em: <https://document.onl/documents/densidade-de-plantio.html>. Acesso em: 03 15 2019.

MENDES, J. T. G.; JUNIOR, J. B. P. **Agronegócio - uma abordagem econômica**. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

MENDES, L. G. Lavoura. **Cálculo de semadura da soja**, 2019. Disponivel em: <https://blog.aegro.com.br/calculo-de-semeadura-soja/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, P. E. A. **Projeções do agronegócio**. 7ª. ed. Brasília: SPA/mapa, 2016.

MORAIS, S. J. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Modelagem matemática das curvas de secagem e coeficiente de difusão de grãos de feijão-caupi (Vigna unguiculata (L.) Walp.)**, Fortaleza, v. 44, n. 3, p. 455-463, set. 2013.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Fertilidade do solo e estado nutricional da alfafa cultivada nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2007.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Cultivo e utilização da alfafa nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2008.

MURTEIRA, B. et al. **Introdução à estatística**. Lisboa: Escolar editora, 2015.

NETO, A. C. M. **Combinatória**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** polinômios. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NEVES, M. F.; ZYLBERSZTAJN, D.; NEVES, E. M. **Agronegócio do Brasil**. São Paulo: Saraiva, 2005.

OLIVEIRA, R. L. L. D. et al. Agroenergia. **estimativa de área foliar de feijão caupi cultivar brs tumucumak através de modelos matemáticos**, 2014. Disponivel em:

<http://www.infobibos.com/Agroenergia/CD_2014/Resumos/ResumoAgroenergia_2014_038.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2019.

PACHECO, E. P. EMBRAPA. **Seleção e custo operacional de máqinas agrícolas**, 2000. Disponivel em: <http://iquiri.cpafac.embrapa.br/pdf/doc58.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2019.

PANACHUKI, E. et al. Acta Sci., Agron. (Online). **Avaliação da infiltração de água no solo, em sistema de integração agricultura-pecuária, com uso de infiltrômetro de aspersão portátil**, Maringá, v. 28, n. 1, p. 129-137, jun. 2006.

PEIXOTO, C. P. et al. **Curso de fisiologia vegetal**. Cruz das almas: UFRB, 2020.

PIRES, A. V. **Bovinocultura de corte**. Piracicaba: FEALQ, 2010.

POPOV, D. Canal rural. **Confira 6 métodos de plantio para a soja e veja qual é melhor!**, 2017. Disponivel em: <https://www.canalrural.com.br/projeto-soja-brasil/noticia/saiba-qual-e-o-melhor-metodo-de-plantio-para-soja/#:~:text=das%20seis%20t%C3%A9cnicas%3A-,Plantio%20Cruzado,e%20uma%20semente%20por%20cova.>. Acesso em: 24 mar. 2019.

PRATES, F. B. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento de mudas de pinhão-manso em resposta a adubação com superfosfato simples e pó-de-rocha**, Montes Claro, v. 43, n. 2, p. 207-213, jun. 2012.

PRATES, M. Exame. **Os números que mostram o poder do agronegócio brasileiro**, 2014. Disponivel em: <https://exame.com/economia/os-numeros-que-mostram-o-poder-do-agronegocio-brasileiro/>. Acesso em: 03 abr. 2019.

PREFEITURA MUNICIPAL DE PORTO GRANDE. Plano Diretor Participativo do Município de Porto Grande. **Diagnóstico das condicionantes, deficiências e potencialidades municipais, propostas e ações**, 2013. Disponivel em: <https://ferreiragomesenergia.com.br/wp-content/uploads/sites/3/2018/04/2013.06.03-Plano-Diretor-Porto-Grande.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2019.

REIS, G. G. D. Embrapa. **Análise e crescimento das plantas - mensuração do crescimento**, 2018. Disponivel em: <https://www.alice.cnptia.embrapa.br/bitstream/doc/374936/1/FL00953.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2019.

REIS, L. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Índice de área foliar e produtividade do tomate sob condições de ambiente protegido**, Campina Grande, v. 17, n. 4, p. 386-391, jan. 2013.

REUTERS. G1 AGRO. **IBGE vê safra de café 10,8% menor em 2019, a 53,4 milhões de sacas**, 2019. Disponivel em: <https://g1.globo.com/economia/agronegocios/noticia/2019/01/10/ibge-ve-safra-de-cafe-108-menor-em-2019-com-534-milhoes-de-sacas.ghtml>. Acesso em: 24 abr. 2019.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipcione, v. 1, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 2, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 3, 2010.

RIBEIRO, R. C. ufrrj. **Estabelecimento de Leguminosas em Pastagens de Brachiaria humidicola: Variações Sazonais de Atributos do Dossel Vegetativo** , Seropédica, p. 1, 27-32, set. 2006.

SEAGRI, A. Estado de Alagoas. **Agricultores do Sertão produzem mais de 45 sacos de milho por tarefa**, 2011. Disponivel em: <http://www.agricultura.al.gov.br/sala-de-imprensa/noticias/2011/dezembro/agricultores-do-sertao-produzem-mais-de-45-sacos-de-milho-por-tarefa>. Acesso em: 01 abr. 2019.

SILVA, É. D. B. D. Agronegócio em foco. **Estimando a produtividade na cultura da soja**, 2015. Disponivel em: <http://www.pioneersementes.com.br/blog/46/estimando-a-produtividade-na-cultura-da-soja>. Acesso em: 25 jun. 2019.

SILVA, G. J.; MAIA, J. C. D. S.; BIANCHINI, A. Revista brasileira de ciências do solo. **Crescimento da parte área de plantas cultivadas em vaso**, Cuiabá, p. 30;31-40, 2006.

SILVA, I. D.; SEGANTINE, P. L. **Exercícios de topografia:** teoria e prática de geomática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

SILVA, J. A. A. D.; NETO, F. D. P. **Princípios básicos de dendrometria**. Departamente de Ciência Florestal - Brasília: UNB, 1979.

SILVA, M. N. P. D. Brasil escola. **Medidas Agrárias**, 2018. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/medidas-agrarias.htm>. Acesso em: 15 mar. 2018.

SORATTO, R. P. et al. Revista Ciência Agronômica. **Fontes alternativas e doses de nitrogênio no milho safrinha em sucessão à soja**, Fortaleza, v. 41, n. 4, p. 511-518, dez. 2010.

SOUZA, D. P. D. et al. XLV Congresso brasileiro de engenharia agrícola. **Caracterização do coeficiente de extinsão de cultivares de cana-de-açúcar**, Florianópolis, jul. 2016.

SOUZA, N. Estadão. **Milho ganha novo espaçamento**, São Paulo, 28 maio 2008. Disponivel em: <https://www.estadao.com.br/noticias/geral,milho-ganha-novo-espacamento,179169>. Acesso em: 22 mar. 2020.

TAVARES, G. D. S. et al. International Journal of Development Research. **Análise da produção e comercialização de açaí no estado do Pará - Brasil**, Belém, v. 10, n. 04, p. 35215-35221, abr. 2020. ISSN 2230-9926.

TECHTUDO. Eletrônicos. **Churrasqueira que funciona à luz solar começa a ser exportada**, 2011. Disponivel em: <https://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2011/10/churrasqueira-que-funciona-luz-solar-comeca-ser-exportada.html>. Acesso em: 01 jul. 2019.

THUM, A. B. et al. **Topografia para estudantes de Arquitetura, Engenharia e Geologia**. São Leopoldo: UNISINOS, 2003.

TIDESCHART. **Horários e tábuas de marés para Macapá**, 2019. Disponivel em: <https://pt.tideschart.com/Brazil/Amapa/Macapa/>. Acesso em: 01 ago. 2019.

TONINI, H.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Revista do Centro de Ciências Rurais. **O crescimento da Nectandra megapotamica Mez., em floresta nativa na depressão central do Estado do Rio Grande do Sul**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p. 85-90, fev. 2003.

TSUNECHIRO, A.; MARTINS, V. A. Instituto de Economia Agrícola (IEA). **Produção recorde de sorgo no Estado de São Paulo**, 2003. Disponivel em: <http://www.iea.agricultura.sp.gov.br/out/LerTexto.php?codTexto=837>. Acesso em: 15 maio 2019.

VELOSO, C. A. C. et al. Embrapa. **Resposta diferencial de cultivares de milho em função da adição da adubação fosfatada em latossolo amarelo do oeste paraense**, Belém, dez. 2005.

WIKIPÉDIA. **jogo de memória**, 2019. Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_de_mem%C3%B3ria>. Acesso em: 27 ago. 2019.

TABELAS

Tabela 1: Tabela sobre unidades de medidas

Unidades de comprimento:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida
Múltiplos:	Quilômetro	km	$1000\ m$
	Hectômetro	hm	$100\ m$
	Decâmetro	dam	$10\ m$
Unidade fundamental	Metro	m	$1\ m$
Submúltiplos:	Decímetro	dm	$0{,}1\ m$
	Centímetro	cm	$0{,}01\ m$
	Milímetro	mm	$0{,}001\ m$

×10 ÷10

Unidades de área:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro quadrado	km^2	$1.000.000\ m^2$
	Hectômetro quadrado	hm^2	$10.000\ m^2$
	Decâmetro quadrado	dam^2	$100\ m^2$
Unidade	Metro quadrado	m^2	$1\ m^2$
Submúltiplos:	Decímetro quadrado	dm^2	$0{,}01\ m^2$
	Centímetro quadrado	cm^2	$0{,}0001\ m^2$
	Milímetro quadrado	mm^2	$0{,}000001\ m^2$

×100 ÷100

Unidades de volume:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro cúbico	km^3	$1.000.000.000\ m^3$
	Hectômetro cúbico	hm^3	$1.000.000\ m^3$
	Decâmetro cúbico	dam^3	$1000\ m^3$
Unidade	Metro cúbico	m^3	$1\ m^3$
Submúltiplos:	Decímetro cúbico	dm^3	$0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$0{,}000000001\ m^3$

×1000 ÷1000

Algumas unidades de volume são relacionadas com as medidas de capacidade:

Categoria	Volume	Capacidade
Múltiplos	$1\ m^3$	1000 litros ($1000l$)
Unidade fundamental	$1\ dm^3$	1 litro ($1l$)
Submúltiplos:	$1\ cm^3$	1 mililitro ($1ml$)

Medidas agrárias:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em m²
Múltiplo:	Hectare	ha	$10.000\ m^2$
Unidade fundamental	Are	a	$100\ m^2$
Submúltiplo:	Centiare	ca	$1\ m^2$

Tabela 2: Tabela trigonométrica

(°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,02	0,707107	0,707107	1,03553
46	0,80	0,71934	0,694658	1,072369
47	0,82	0,731354	0,681998	1,110613
48	0,84	0,743145	0,669131	1,150368
49	0,86	0,75471	0,656059	1,191754
50	0,87	0,766044	0,642788	1,03553

(°)	Rad	sen	cos	tg
51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
59	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
86	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
87	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
88	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
89	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
90	1,57	1	0	∄
120	2,09	0,866025	-0,5	-1,732051
150	2,62	0,5	-0,866025	-0,57735
180	3,14	0	1	0
210	3,67	-0,5	-0,866025	0,57735
240	4,19	-0,866025	-0,5	1,732051
270	4,71	-1	0	∄
300	5,23	-0,866025	0,5	-1,732051
330	5,76	-0,5	0,866025	-0,57735
360	6,28	0	1	0

GABARITOS E SOLUÇÕES

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.1

1)
a) Matriz coluna.
b) Matriz quadrada ou nula.
c) Matriz quadrada.
d) Matriz simétrica.
e) Matriz triangular superior.
f) Matriz identidade (ou diagonal).
g) Matriz linha ou nula.
h) Matriz diagonal.

---

2)
a) $\begin{vmatrix} -7 & 9 \\ -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ -6 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

3)
a) $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4)
a) $x = 1, y = 3\ e\ z = 1$. b) $x = 6, y = -3\ e\ z = 0$.

---

5) Letra e.
6) Letra d.
7) Letra e.
8) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.2

1)
a) $(3 \quad 0)$.
b) $(-1 \quad 4)$.
c) $\begin{vmatrix} 17 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$.
d) $\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -2/5 & 2/15 \end{vmatrix}$.
e) $|17|$.
g) $\begin{vmatrix} -10 & -5 & -15 \\ -30 & -25 & -20 \end{vmatrix}$
g) $\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -8 \end{vmatrix}$.
h) $\begin{vmatrix} -3 & -9 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \\ -2 & 7 & -1 \end{vmatrix}$.

2)
a) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 16 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -17 \end{vmatrix}$.

---

3)
a) $x = -7\ e\ y = -5$. b) $x = 3, y = 2, a = 1\ e\ b = 4$.

---

4) $\begin{vmatrix} E.U.A \Rightarrow 519 \\ Cuba \Rightarrow 288 \\ Brasil \Rightarrow 309 \end{vmatrix}$.
5) Letra a.
6) Letra b.
7) $\begin{bmatrix} \overbrace{15}^{Tipo\ 1} & \overbrace{30}^{Tipo\ 2} & \overbrace{45}^{Tipo\ 3} \\ 3{,}75 & 22{,}5 & 15 \\ 15 & 7{,}5 & 7{,}5 \\ 5 & 7{,}5 & 10 \end{bmatrix}$
8) $\begin{pmatrix} Dezembro \Rightarrow R\$\ 1440 \\ Janeiro \Rightarrow R\$\ 1541 \end{pmatrix}$
9) $\begin{vmatrix} 2017 \Rightarrow R\$\ 650.000 \\ 2018 \Rightarrow R\$\ 930.000 \\ 2019 \Rightarrow 1.080.000 \end{vmatrix}$
10)a) $\begin{vmatrix} 1400 & 1800 & 1750 \\ 1450 & 1600 & 1700 \end{vmatrix}$
b) O elemento c23=1700 representa a quantidade de fertilizando Z utilizado para plantar o milho, soja e feijão na região Q.
11) Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.3

1)
a)-7
b) 0
c) 2
d) -5
e) -1
f) 0
g) -126
h) -60
i) 0
j) 29/15
k) $x^3 - 15x$

2)Letra d.
3)Letra d.
4) 50.
5) Letra e.
6)Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.4

1)
a)-50
b) -200
c) -125
d) 1
e) 0
f) -2
g) 0
h) -1

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.5

1)
a) 2ª coluna é o dobro da 1ª.
b) 2ª linha é igual a 1ª linha mais 2.
c) 1ª coluna nula.
d) 3ª linha é igual a 1ª linha multiplicada por b.
e) 3ª linha é igual a 1ª linha multiplicada por -1
f) 1ª coluna é igual a 2ª coluna multiplicada por a.

2) $x = \pm 3$.

3)
a) 10
b) 10
c) 50
d) 100

4) 64
5) Letra d.
6) Letra b.
7) 1.
8) -2.
9) a) -8 b) -80 c)14 d) -101 e) -4
10) Resposta pessoal. Dica: crie uma matriz triangular cujos elementos da diagonal principal são 1, 2 e 5 e faça operações do escalonamento para modificar as linhas.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.6

1)
a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \end{vmatrix}$.
b) $\begin{vmatrix} -3{,}5 & 2{,}5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$
c) Não existe inversa.
d) $\begin{vmatrix} 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$
e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}$
f) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
g) Não existe inversa.
h) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2) a) $x \neq \pm 4$.
b) $x \neq 0$.
c) $x \neq 0 \; e \; x \neq 5$.

3) Letra a.
4) Letra c.

5) Letra e.
6) Letra e.

7)a) $X = \begin{vmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. b) $X = \begin{vmatrix} 4 & -9 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & -4 \end{vmatrix}$. c) $X = \begin{vmatrix} 1/2 & 5/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{vmatrix}$.

8) Letra d.
9) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.7

1) a) S = (1, 5) b) S=(-1, 2, 4)
2)
a)(1, 0) ⇒ sistema possível e determinado.
b)(10, 5) ⇒ sistema possível e determinado.
c) Sistema impossível.
d)(1, 1, 1) ⇒ sistema possível e determinado.
e) Sistema impossível.
f)(3, 2, -4) ⇒ sistema possível e determinado.
g)(1, 1, 1) ⇒ sistema possível e determinado.
h)$(2 + \frac{5z}{2}, -1 - \frac{z}{2}, z)$ ⇒ sistema possível e indeterminado.
i)$(-3z, -4z, z)$ ⇒ sistema possível e indeterminado.
j)$(0, 0, 0)$ ⇒ sistema possível e determinado.
k)(1, 1, 1, 1) ⇒ sistema possível e determinado.
l) Sistema possível e indeterminado.
m) Sistema impossível.

3) Letra a.
4) Letra d.
5) Letra b.
6) Letra a.
7) Letra c.
8) Letra e.
9) Primeira viagem: 30 toneladas, caminhão vazio: 15 toneladas.
10) R$ 54,00

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 14.8

1)
a) Sistema impossível: retas paralelas.
b) Sistema possível e determinado: retas concorrentes.
c) Sistema possível e determinado: um ponto (0,-1/5).
d) Sistema impossível: dois planos paralelos.
e) Sistema possível e indeterminado: planos coincidentes.
f) Sistema impossível: três planos paralelos.
g) Sistema possível e indeterminado: uma reta.
h) Sistema possível e determinado: um ponto (-10,1,4).

2)
a) Para $a \neq -1$, sistema possível e determinado.
$\nexists a$ para sistema possível e indeterminado.
Para $a = -1$, sistema impossível.
b) Para $a \neq 0$, sistema possível e determinado.

Para $a = 0$ sistema impossível.
Para $a = 4$, sistema possível e indeterminado.

3)
a) Para $m \neq 1$, sistema possível e determinado.
Para $m = 1$ e $n = -1$ sistema possível e indeterminado.
Para $m = 1$ e $n \neq -1$, sistema impossível.
b) Para $n = m$ sistema possível e indeterminado.
$\nexists n, m$ para sistema possível e determinado e sistema impossível.

---

4) Letra c.
5) Letra b.
6) Letra a.
7)Letra a.
8)Letra a.
9)Letra c.
10) Adubo 1: 12,5 kg
Adubo 2: 62,5 kg
Adubo 3: 25 kg

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.1

1)12 posições diferentes.
2)200 casais diferentes.
3)110 formas diferentes.
4)256 formas diferentes.
5)12 formas diferentes.
6)42 maneiras distintas.
7)36 combinações diferentes.
8)
a) 840 formas distintas.
b) 343 formas distintas.
9) 6 formas diferentes.
10) Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.2

1) 60.
2) 9000.
3) 4536.
4) 4.464.
5) 41.
6) 136.
7) 100000 tentativas.
8) 62^{10} senhas possíveis.
9) 720 resultados possíveis e 45 jogos.
10) 400 maneiras distintas.
11) 175.760.000 placas diferentes.

---

12) Os modos diferentes que devemos pintar a borda depende das cores do segundo e do quarto quadrante. Se forem distintas, a borda terá 5 modos diferentes. Se forem iguais, terá 6 formas diferentes. Eis o impasse. O cálculo correto esta no 11º exemplo dessa unidade.

---

13) Letra b.
14) Letra d.
15) Letra b.
16) Letra d.
17) 630 formas diferentes.
18) Pelo P.F.C, o número de mapas seria 3.2.1.0 = 0. Portanto, não é possível colorir o mapa com apenas 3 cores.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.3

1)
a) 24
b) 362.880
c) 48
d) 600
e) 5
f) 1000
g) 240
h) 7

---

2)
a) S = {8}
b) S = {7}
c) S = {2, 3}
d) S = {3}

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.4

1)720
2)90.720
3)10
4)4
5)48
6)2520
7)120
8)362.880
9)56
10) a) 720 b) 288
11)30.240
12) Letra d

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.5

1)
a)5 d)20 g)70
b)11 e)1 h)20
c)1 f)21 i) $a+1$

---

2)S={7}
3)22.100
4)210
5)66
6)a) 24. b)45
7)$\binom{25}{10}.\binom{3}{1}$
8)55
9)6
10)Letra a.
11)Letra d.
12)Letra a.
13)a) $\binom{60}{6}$ b) R$ 24,50
14)Letra a.
15)Letra e.
16)a) 10. b) 31
17)$2^{100}-1$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.6

1)$\frac{1}{20}$
2)Nessa hipótese, haverá 18 resultados ímpares e apenas 17 pares.
3)
a)Não é um espaço equiprovável.
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{36}$
d) 0 (impossível)
e) 50%

---

4) a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{15}$
5) a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$
6) $\frac{2}{221}$
7) a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{17}{60}$
8) $\frac{7}{12}$
9) $\frac{2}{7}$
10) $\frac{1}{5}$
11) Letra b.
12) $\frac{28}{57}$
13) Letra b.
14) Letra a.
15) I - Letra b II – Letra a.
16) $\frac{1}{10}$
17) $\frac{1}{7}$
18) Letra c.
19) Letra d.
20) Letra b.
21) a) $\frac{1}{5^{10}}$ b) 26,84%.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 15.7

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{3}{5}$.

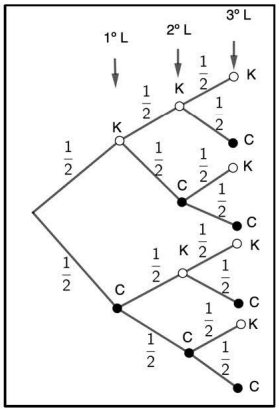
3) a) $\frac{1}{52}$ b) $\frac{4}{13}$ c) $\frac{9}{13}$ d) $\frac{1}{4}$

4) Letra c.

5) a) $\frac{7}{12}$ b) $\frac{2}{5}$

6)

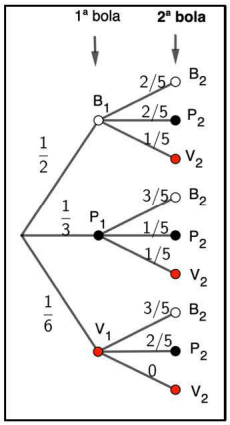
a)



b) $\frac{1}{8}$

7) Não há eventos independentes.

8) a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{4}{15}$ c)



d) $\frac{3}{5}$

9) a) 24% b) 76% c) 24%

10) a) 51,2% b) 0,8% c) 9,6%

11)Letra c.

12)Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.1

1) $a = \pm 4$

2) $S = \{i, -i\}$

3) $S = \{-1 + i, -1 - i\}$

4) a) 7 b) 6+ 4i c) 9 d) $13 + 4i$

5) a) -5+ 5i b) 41 c) -4

6) a) 26 b) -1+43i c) 1000

7) a) -i b) -1 c) i d) 1

8) a) 0 b) 2i c) 0 d) 0

9) Letra a.

10)Letra a.

11)Letra b.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.2

1)
a) $-i$
b) $\frac{11}{5}+\frac{7}{5}i$
c) $-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$
d) $-1+i$
e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$
f) 0

2) $\frac{7}{2}-\frac{9}{2}i$
3) $-1-i$
4) Letra a.
5) Letra a.
6) Letra e.
7) Letra a.
8) i
9) $z=\frac{3}{2}+\frac{1}{6}i$

10)Para múltiplos de 4.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.3

1) a) 200 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 18
2) $a = 6$
3) 32
4) a) $\alpha = 225° ou \frac{5\pi}{4} rad$ b) $\alpha = 135° ou \frac{3\pi}{4} rad$

5) a) $z = 6.(cos\frac{5\pi}{3} + i.sen\frac{5\pi}{3})$ b) $z = 7\sqrt{2}.(cos\frac{3\pi}{4} + i.sen\frac{3\pi}{4})$
c) $z = 1.(cos\frac{3\pi}{2} + i.sen\frac{3\pi}{2})$ c) $z = 9.(cos2\pi + i.sen2\pi)$

6) Letra e.
7) Letra c.
8) Letra b.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.4

1) a) $-10\sqrt{2} + 10\sqrt{2}i$ b) $30\sqrt{3} - 30i$
c) $1 + \sqrt{3}i$ d) $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$
e) $\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$ f) $3i$

2)a) $16\sqrt{3} + 16i$ b) $-2^{99} - 2^{99}\sqrt{3}i$ c) $2^{-11} - 2^{-11}\sqrt{3}i$

3)a) -64 b) 4^{12} c) $\frac{1}{16}$ d) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4) Letra e.
5)Letra d.
6)Letra e.
7)Letra d.
8)Letra e.
9)Letra c.
10)Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.5

1) $\{2, -1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i\}$
2) $\{1, -1, i, -i\}$
3) $\{\sqrt[6]{2}.\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right), \sqrt[6]{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\}$
4) $\{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\}$
5) a) $\{3+2i,\ 3-2i\}$ b) $\{-2\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\ 2\sqrt{2}-\sqrt{2}i\}$ c) $-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i$

6) Letra c.
7) Letra a.
8) às 21:00 hs.
9) Letra c.
10) Letra b.
11) a) (16, 16) b) $16\sqrt{2}$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.6

1) a) -71 b) 11
2) a) Gr(p) = 1. b)Gr(p) = 11. c) Gr(p) 4 d) Gr(p)=100.
3) $m = 3$
4) a) $x = -2$ b) $x = 100$
5) a) $x = 3$ b) $x = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $x = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.7

1)
a) $9x^5+x^3+x+2$
b) $9x^5+6x^2-x$
c) $x^4-4x^3+3x^2+2x-2$
d) x^2-2x-2
e) 12

2)
a) $Q(x) = x-2$ *e* $R(x)=4$
b) $Q(x) = 3x^3+x^2-4$ *e* $R(x)=5$
c) $Q(x) = x^3+x^2+2x+4$ *e* $R(x)=6x-6$
d) $Q(x)=x^4-2x^3+2x^2-8x+2$ *e* $R(x)=-9x^2-7x+1$

3) $5x^3-56x^2+129x-62$
4) $x^5-5x^4+9x^3-2x^2-12x+15$
5) Letra b.
6) Letra d.
7) Letra a.
8) Letra e.
9) Letra d.
10) Letra a.
11) Letra c.
12) Letra b.
13) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.8

1) a) $Q(x) = 3x^3+3x^2+2x+2$ *e* $R(x)=1$.
b) $Q(x) = x^3+5x^2+21x+84$ *e* $R(x)=335$.
c) $Q(x) = x^3-10x^2-52x-268$ *e* $R(x)=1355$.

2) a) $Q(x) = -7x^3+22x^2-69x+207$ *e* $R(x)=-610$.
b) $Q(x) = 5x^2-7x+14$ *e* $R(x)=-32$.
c) $Q(x) = x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{8}x-\frac{3}{16}$ *e* $R(x)=-\frac{1}{32}$.

3) $m = 3$.
4) Letra c.
5) Letra c.
6) Letra d.
7) $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$ e $d = 3$
8) Letra d.

9)$a = 1$ ou $a = 2$.
10)Letra c.
11)Letra d.
12) $Q(x) = x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 42x^2 + 126x$ e $R(x) = -2269$
13) $Q(x) = 2x^3 + x - \frac{2}{3}$ e $R(x) = -\frac{4}{3}$
14)$m = 8$ e $n = -1$
15)Letra a.
16)Letra e.
17)Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.9

1) $S = \{4, -1, 2\}$.
2) $S = \{3i, -3i, -1, -2\}$.
3) $S = \{1 + 2i, 1 - 2i, 4i, -4i, 2\}$.
4) 7.
5)23.
6) Letra e.
7) a)F b)V c)F d)V
e)F f)F g)V h)V i) F
8) Letra d.
9) Letra c.
10) Letra c.
11) Letra c.
12) Letra c.
13) Letra c.
14) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.10

1) $r_1 + r_2 + r_3 = -10$, $r_1.r_2.r_3 = -10$ e $r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_2.r_3 = -10$
2) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -2$, $r_1.r_2.r_3.r_4 = \frac{1}{3}$
$r_1.r_2 + r_1.r_3 + r_1.r_4 + r_2.r_3 + r_2.r_4 + r_3.r_4 = 3$
$r_1.r_2.r_3 + r_1.r_2.r_4 + r_2.r_3.r_4 + r_1.r_3.r_4 = 2$

---

3)a)-5 b)-3 c)-2 d) $\frac{2}{3}$
4) Letra e.
5) Letra d.
6) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 16.11

1)a) $S = \{1, 1 + i, 1 - i,\}$ b)$S = \{2, -2, 1, -1\}$ c) $S = \{2, \frac{1}{2}, i, -i\}$
2) Letra c.
3) Letra b.
4) Letra e.
5) 2^{100}
6) 8
7) Letra c.
8) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 17.1

1)
a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -9\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -12\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 13\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{13}{11}\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$

---

2)
a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 11\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -15 \text{ ou } x > -2\}$

---

3)$S = \{1\}$
4)$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
5) Duas soluções.

6)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 7\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -11 \text{ ou } x \geq 9\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{ ou } x \geq 7\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 9 < x \leq 11\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < -5\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

---

7)Letra e.

8)Letra c.

9)Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 17.2

1)

a) $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2. \\ f(x) = 0, x = 2. \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5. \\ f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x = 5 \\ f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0. \\ f(x) = 0, x = 0. \end{cases}$

---

2)$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 7\}$

3)$S = \{k \in \mathbb{R} \mid k < -4\}$

---

4)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\sqrt{3} \text{ ou } x \geq \sqrt{3}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq \frac{1}{4}\}$

c) $S = \mathbb{R}$

d) $S = \{\ \}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 3 \leq x \leq 5\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{2}{3} \text{ ou } 1 \leq x \leq 4\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x < -1\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } \frac{1}{4} < x < 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 5\}$

5) Letra b. 6) Letra a. 7) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 17.3

1)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{2}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{7}{2}\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{2}\}$

k) $S = \mathbb{R}$

l) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

m) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$

2)

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-11}{3} < x < -3\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 3\}$
f) $S = \{\ \}$
g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1\}$
h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ 2 \text{ ou } x \ 10\}$

3) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 17.4

1)
a) $S = \{-10, 10\}$
b) $S = \{\ \}$
c) $S = \{3, 5\}$
d) $S = \{-12, -6\}$
e) $S = \{-2, 10\}$
f) $S = \{-4, 8\}$
g) $S = \{-6, 4\}$
h) $S = \{-4\}$
i) $S = \{-5\}$
j) $S = \{-3\}$
k) $S = \{-\frac{4}{3}, 20\}$
l) $S = \{1, 3\}$
m) $S = \{-1, 4\}$
n) $S = \{\ \}$

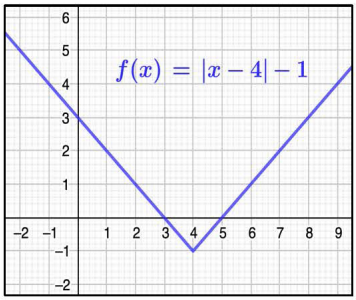
---

2)
a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ ou } x - 7\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 6\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \text{ ou } -\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

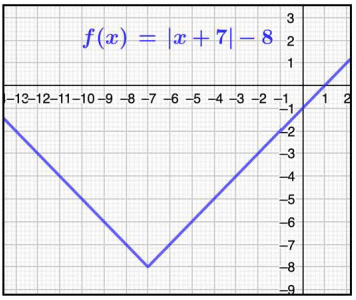
---

3)

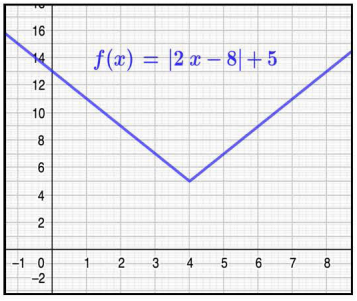
a)



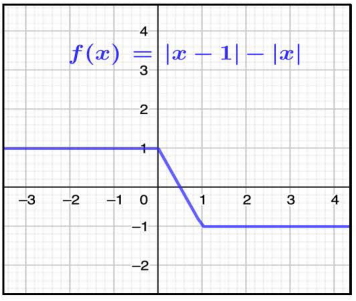
b)



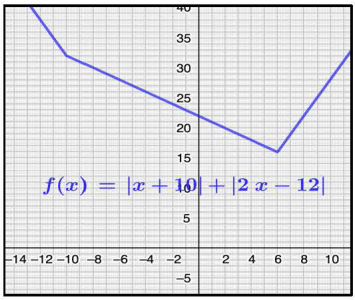
c)



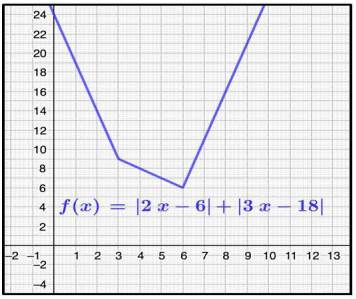
d)



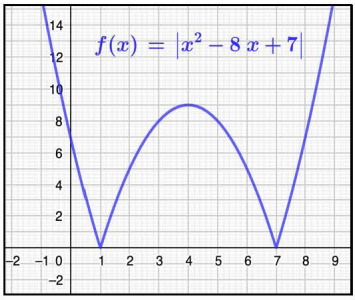
e)



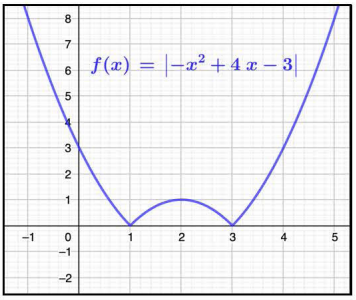
f)



g)



h)



SOBRE O AUTOR

Francielck Domingos Freire: Mestre em Matemática pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM-UNIFAP-PROFMAT), graduado em licenciatura plena em Matemática e Física pela Universidade Federal do Amapá (Unifap) e professor do Instituto federal do Amapá.

SOBRE A OBRA

Matemática Aplicada às Ciências Agrárias é uma coleção com quatro livros (didáticos) voltados para os cursos de ciências agrárias.

Os volumes 1, 2 e 3 são destinados ao nível médio técnico da área de ciências agrárias, como agroecologia, agropecuária e agronegócio, e também para os componentes de conhecimentos matemáticos básicos de nível superior, ministrados em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

O volume 4 foi elaborado para os componentes de Matemática de nível superior em qualquer área, porém aplicações em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

Em todos os volumes, os conteúdos são abordados com Matemática pura, exatamente como se ensina no ensino médio e no nível superior, porém acompanhados de contextualização, modelagem, uso de tecnologias e aplicação às ciências agrárias.

Todos os exercícios possuem questões elaboradas pelo autor visando uma melhor assimilação do conteúdo, além de questões selecionadas criteriosamente do ENEM, ENADE, vestibulares e outras instituições.

É uma coleção de livros (didáticos) elaborada com intuito de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos de cursos afins.


COMUNICADO
IMPORTANTE
Visite nossas
outras obras
de Ensino,
Pesquisa e
Extensão
EDIFAP



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO AMAPÁ - IFAP

Rodovia BR 210 KM 3, s/n - Bairro Brasil Novo

CEP: 68.909-398

Email: reitoria@ifap.edu.br

Telefone: (96) 3198-2150

Site: https://ifap.edu.br/

Twitter: @ifap_oficial

Facebook: /institutofederaldoamapa

ISBN: 978-65-89513-34-6

EDIFAP