MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

FRANCIELCK FREIRE

VOL.4

ENSINO SUPERIOR

EDIFAP

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL CIENTÍFICO

Abílio Eduardo
(Universidade Katyavala Bwila – AO)
Adriano Fonseca
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Aldo Parra
(Universidad Del Cauca - CO)
Alexandre Pais
(Manchester University - UK)
Armando Aroca
(Universidad del Atlántico - CO)
Eliane Vasquez
(Universidade Federal do Amapá - BR)
Elisângela Melo
(Universidade Federal do Tocantins - BR)
Hilbert Blanco
(Universidad de Nariño - CO)
Ieda Giongo
(Universidade do Vale do Taquari - BR)
Natividad Adamuz
(Universidad de Córdoba - ES)
Nuno Vieira
(Universidade Lusófona - PT)
Sávio Bicho
(Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará - BR)

INSTITUTO FEDERAL
Amapá

CONSELHO EDITORIAL DO IFAP

Titulares

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Luiz Ricardo Fernandes de Farias Aires
José Rodrigo Sousa de Lima Deniur
Nilvan Carvalho Melo
Darley Calderaro Leal Matos
Welber Carlos Andrade da Silva
Diego Armando Silva da Silva
Marialva do Socorro Ramalho de Oliveira de Almeida
Larissa Pinheiro de Melo
Suany Rodrigues da Cunha
Carlos Alexandre Santana Oliveira

Suplentes

Ivan Gomes Pereira
Jéssica de Oliveira Pontes Nóbrega
Cleber Macedo de Oliveira
Joadson Rodrigues da Silva Freitas
Adrielma Nunes Ferreira Bronze
Johnny Gilberto Moraes Coelho
Mábia Nunes Toscano
Victor Hugo Gomes Sales
Themístocles Raphael Gomes Sobrinho
Romaro Antonio Silva

FRANCIELCK DOMINGOS FREIRE
Autor

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS

CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

EDIFAP

Macapá
2024

MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS AGRÁRIAS
CONTEXTUALIZAÇÃO - MODELAGEM - TECNOLOGIA

Todos os direitos reservados. É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e que não seja para venda ou qualquer fim comercial.Os artigos assinados, no que diz respeito tanto à linguagem quanto ao conteúdo, não refletem necessariamente a opinião da Editora do Instituto Federal do Amapá. As opiniões são de responsabilidade exclusiva dos respectivos autores. A revisão textual, formatação e adequação às normas ABNT são de responsabilidade dos autores

EQUIPE TÉCNICA EDITORIAL

Flávia Karolina Lima Duarte Barbosa
Editora Chefa

Romaro Antonio Silva
Editor adjunto

Luiz Ricardo Fernandes Farias Aires
Editor adjunto

Ivan Gomes Pereira
Diagramador

Suzana Cardoso
Bibliotecária

DIAGRAMAÇÃO, PROJETO GRÁFICO E CAPA
Ivan Gomes Pereira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

F866m Freire, Francielck Domingos.
Matemática aplicada às Ciências Agrárias : contextualização, modelagem, tecnologia / Francielck Domingos Freire. – Macapá : Edifap, 2024.
564f. : il. ; v.4.

ISBN 978-65-89513-37-7 (digital)
978-65-89513-36-0 (impresso)
Volume 4: Ensino superior

1. Matemática – ciências agrárias. 2. Modelagem – matemática. 3. Ciências Agrárias - matemática. II. Título.

CDD 510

Ficha Catalográfica elaborada pela Bibliotecária Suzana Cardoso, CRB 1.142, com dados fornecidos pela Editora do IFAP

A meus filhos, Vinícius e Kauã,
e a minha esposa, Ligele Cristine.

AGRADECIMENTOS

Por esse trabalho, gostaria de agradecer imensamente à equipe técnica do Instituto Federal do Amapá - Campus Porto Grande, em particular, aos amigos e colaboradores: Alyne Cristina Sodré Lima, Antônio Francelino de Oliveira Filho, Breno Henrique Pedroso, João Maria do Amaral Junior, Marcelo Batista Teixeira, Osvaldo de Mello Campelo Vasconcelos e, em especial, ao excelente profissional, Cleber Machado de Oliveira, por algumas revisões técnicas e valiosas contribuições.

Agradecimento aos pares, amigos e excelentes professores de matemática que contribuírem com críticas, sugestões e revisões: Carlos Santana, Dejildo Roque, Eduardo Rosário, Helington Franzotti, Hilton Bruno, Paulo Robson e Rudá Magalhães.

Aos colegas da Biblioteca do instituto federal do Amapá do Campus Porto Grande: Ronny Nunes e Tábata Brito, pela paciência durante minhas consultas exaustivas e empréstimos exagerados.

Aos acadêmicos das turmas 2019.1 e 2018.2 de Engenharia agronômica do IFAP- Campus Porto Grande, 2022.1 de Engenharia civil do IFAP - Campus Macapá e aos acadêmicos de licenciatura em Matemática IFAP - Campus Macapá, que trabalharam os textos e contribuíram para sua construção. Singular gratidão aos alunos mais dedicados dessas turmas: João Vitor de Andrade Soares, Lucival Jessé Morais da Silva, Ledegelson Moura de Souza e Josué Silva Galvão.

Por fim, um agradecimento mais que especial ao meu pai (in memoriam), à minha mãe e à minha família: Ligele Cristine (esposa), Vinícius Freire e Kauã Freire (filhos), pela paciência e compreensão pelas minhas ausências enquanto estudava, pesquisava e escrevia.

PREFÁCIO

Esse livro-texto é uma coletânea de partes dos textos de um livro-caderno, objeto de minha dissertação de mestrado (FREIRE, 2014) publicada em 2014 e de pesquisas de aplicação da Matemática às ciências agrárias.

O livro-caderno (FREIRE, 2013) objeto dessa dissertação, foi um dos projetos desenvolvidos na escola estadual Esther da Silva Virgolino no estado do Amapá e é um dos trabalhos pelo qual tenho muito orgulho em ter escrito. Além de ser um material didático gratuito (por isso não foi publicado) em que o aluno não copiava conteúdos em seu caderno, oportunizava também a contextualização de conteúdos matemáticos e o uso de tecnologias em sala de aula.

É nesse sentido de contextualização e do uso de tecnologias, pensando em um livro com viés didático concomitante à modelagem matemática, que escrevi essa coletânea.

Quando comecei a lecionar no Instituto Federal do Amapá - Campus Agrícola Porto Grande, os problemas didáticos encontrados no instituto eram similares aos das escolas estaduais onde lecionava anteriormente: os livros didáticos disponibilizados pelo MEC não eram aplicáveis à realidade profissional de cada curso, seja técnico ou superior.

E além disso, o único livro de Matemática (FERREIRA, 1999) com aplicação às ciências agrárias (inclusive, um excelente livro de bibliografia complementar), não possuía todos os conteúdos exigidos nos componentes dos cursos. Lembro, por exemplo, que muitos professores que ministravam componentes técnicos nos cursos de

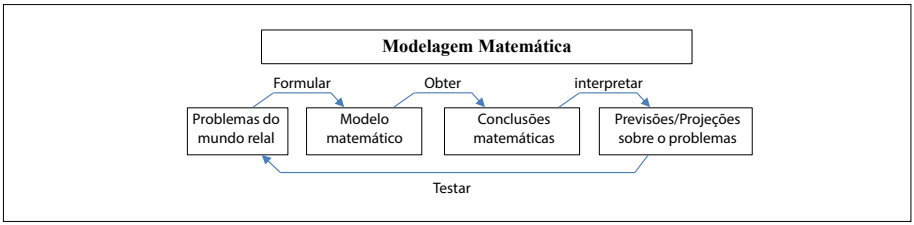
agronegócio, agropecuária ou agroecologia do campus, reclamavam que os alunos, entre outras coisas, não sabiam resolver e nem aplicar regra de três, conteúdo indispensável para o desenvolvimento do componente. Isso me incomodava!

E os alunos em contrapartida, questionavam-me: "Professor! em que situações de minha vida profissional irei aplicar tal conteúdo matemático?". Respostas improvisadas eram dadas e embora razoáveis, não satisfaziam a mim, e talvez, nem à eles. Algo faltava!

Resolvi, então, pesquisar sobre abordagens e aplicações matemáticas na área. A contextualização passou a ser, diante desse cenário, um dos pilares fundamentais da pesquisa. Mas, não queria fazê-la de qualquer forma. Não poderia ser ingênua ou sem sentido, precisava ser técnica, adequada e prática ao curso. Foi aí que surgiu uma parceria com os colegas professores da área técnica do Campus (cujos nomes estão nos agradecimentos), que não só incentivaram a produção desse material, como também sugeriram várias bibliografias, modelos de aplicação, dicas e participação na elaboração de conteúdos e exercícios. A contextualização presumidamente alcançada com essas características, pode ser apreciada em demasia nessa coleção e segue o organograma a seguir.

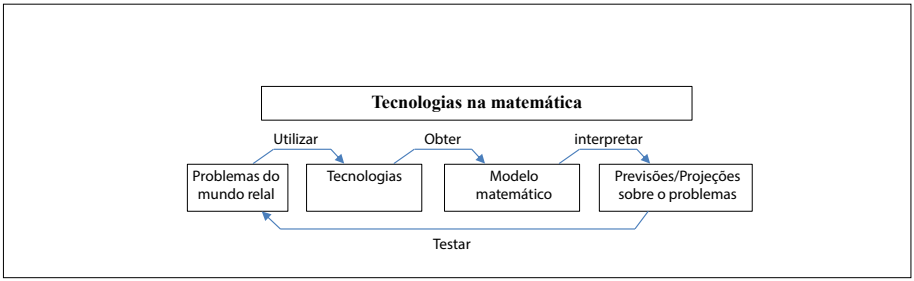
Uma vez contextualizado os conteúdos, era necessário colocar em prática o que havia sido ensinado. Foi então que elaborei um projeto de pesquisa: "uso de modelagem matemática no cultivo de alface", que foi realizado no mesmo instituto e campus, sob minha orientação, com contribuição inestimável do agrônomo Cleber Machado de Oliveira, e desenvolvido pelos alunos: Cleverton França Vaz, João Vitor de Andrade Soares (acadêmicos de engenharia agronômica) e Antônio Sales Maciel (aluno do curso técnico em agronegócio).

Nesse projeto, foi possível acompanhar o desenvolvimento da alface em doses diferentes de nitrogênio, descobrir qual o modelo matemático que se ajusta aos parâmetros de crescimento dessa hortaliça e, a partir desse modelo, resultado da regressão (presente nesse livro), identificar qual dose de nitrogênio seria ideal para a otimização da produção do cultivo (em termos matemáticos: o máximo ou mínimo da função). Ficou evidente, com esse projeto e a partir de diversas pesquisas sobre experimentos agrários (livros, revistas científicas, artigos, trabalhos de conclusão de curso, dissertações, etc.), a importância da modelagem matemática para às ciências agrárias. É o que o leitor também irá encontrar nessa coleção segundo o organograma a seguir.



Contudo, embora os alunos desse projeto tenham posto em prática o que aprenderam em sala de aula, como teorias e cálculos (à mão), a tecnologia se fez necessária como ferramenta auxiliar de confirmação de dados e interpretação de resultados. Na verdade, é difícil imaginar algum técnico ou engenheiro da área não utilizando tais ferramentas no exercício de sua profissão. É o que também propõe essa coleção.

Em todos os volumes da coleção, convenientemente, é ensinada, com imagens ilustrativas e passo a passo, a utilização de recursos tecnológicos, como calculadoras científicas, planilhas eletrônicas e softwares gráficos, para que o leitor tenha à sua disposição outras ferramentas auxiliares de conhecimento.

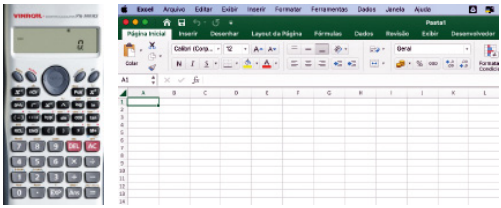


A calculadora científica sugerida na coleção para uso é a Vinacal VN-500MS. No entanto, os comandos utilizados nessa calculadora são praticamente os mesmos utilizados em muitas outras calculadoras, como a Casio FX-82MS, por exemplo.

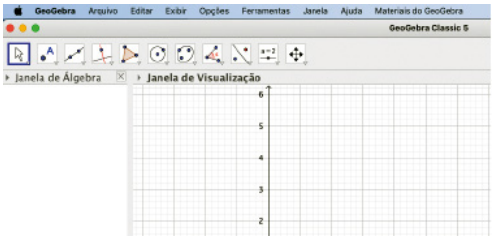
Já a planilha eletrônica utilizada no material é da Microsoft excel para Mac, versão 16.67. Não obstante, os comandos utilizados nesse software são os mesmos para qualquer versão e para qualquer sistema operacional, seja o Windows, MacOs ou Linux.

Quanto ao software gráfico foi utilizado o software geogebra classic versão 5.0. O geogebra é um software gratuito e de código aberto que permite de forma intuitiva a iteração entre diversas frentes matemáticas como geometria, álgebra, além de construção e análise de gráficos, entre outros. O download do software, seja para

computador ou smartphone pode ser feito gratuitamente pelo site geogebra.org. Há opção também de utilizar o software on-line (sem precisa instalar) no mesmo endereço eletrônico.



Calculadora vinacal VN-500MS (à esquerda) e
Planilha excel (à direita)



Geogebraclassic–versão5.0

Em termos de estrutura, a coleção matemática aplicada às ciências agrárias é dividida em quatro volumes. Os volumes 1, 2 e 3 são voltados para o ensino médio técnico em agroecologia, agronegócio, agropecuária ou qualquer nível médio técnico em ciências agrárias. Já o volume 4 é destinado ao nível superior em engenharia agronômica, engenharia agrícola ou qualquer outro nível superior, porém as aplicações são destinadas às ciências agrárias.

Cada volume é dividido em unidades, cada unidade em seções e cada seção em subseções, de forma sequencial. Por exemplo: Unidade 12, seção 12.1 e subseção 12.1.1. Os exercícios são numerados de acordo com a unidade e a ordem do exercício dentro dessa unidade. Por exemplo: exercícios 12.1, exercícios 12.2, etc. Nos volumes 1, 2 e 3 os exercícios de aplicação estão intercalados com os exercícios comuns (de nível médio), enquanto no volume 4, os exercícios de aplicação ficam sempre no final da unidade e são separados dos demais.

Além dos exercícios elaborados pelo autor com base na contextualização, modelagem e tecnologia, há também exercícios selecionados criteriosamente do ENEM, ENADE, outras instituições e vestibulares. Todos são selecionados com base no conteúdo das unidades afins e ordenados em ordem de dificuldade.

Na coleção, também é possível encontrar a matemática pura, com teoremas (inéditos, inclusive) e demonstrações (algumas inéditas, também), sempre discorridas com cuidados técnicos e formalidades que um bom livro de matemática exige.

Por fim, é uma coleção de livros didáticos elaborados com o objetivo de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos da área. Modestamente, é o que espero!

Francielck Domingos Freire

SUMÁRIO

CAP 18
18. LIMITE 25
18.1. Noção intuitiva de limite 25
18.1.1. Definição de limite 28
EXERCÍCIOS 18.1 32
18.2. Propriedades do limite de uma função 33
18.3. Limite da função polinomial 35
EXERCÍCIOS 18.2 36
18.4. Limite da função racional 37
18.4.1. Limite da função racional envolvendo polinômios 37
EXERCÍCIOS 18.3 39
18.4.2. Limite da função racional envolvendo radicais 40
EXERCÍCIOS 18.4 43
18.4.3. Limite infinito da função racional 44
EXERCÍCIOS 18.5 47
18.5. Limites no infinito 48
EXERCÍCIOS 18.6 53
18.6. Limites fundamentais 54
18.6.1. Limites trigonométricos 54
EXERCÍCIOS 18.7 58
18.6.2. Limites das funções exponencial e logarítmica 59
EXERCÍCIOS 18.8 62
18.7. Limite de funções definidas por partes 63
EXERCÍCIOS 18.9 64
18.8. Continuidade 66
EXERCÍCIOS 18.10 69
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 18.11 71
CAP 19
19. DERIVADA 77
19.1. Derivada de uma função 77
EXERCÍCIOS 19.1 79
19.2. Interpretação geométrica da derivada 80
19.3. Diferenciabilidade e continuidade 82
EXERCÍCIOS 19.2 87
19.4. Função derivada 89
19.4.1. Derivada da função constante 89
19.4.2. Derivada da potência 89
19.4.3. Derivada da função exponencial 90
19.4.4. Derivada da função seno 90
19.4.5. Derivada da função cosseno 91
19.4.6. Derivada de funções logarítmicas 91
19.4.7. Derivada de função acompanhada de constante 92
EXERCÍCIOS 19.3 93
19.5. Regras de derivação 94
19.5.1. Derivada da soma e da diferença 94

19.5.2. Derivada do produto 94
19.5.3. Derivada da potência de uma função 95
19.5.4. Derivada do quociente 96
EXERCÍCIOS 19.4 98
19.5.5. Regra da cadeia (derivação de uma função composta) 99
EXERCÍCIOS 19.5 102
19.5.6. Derivada da função inversa 102
19.6. Derivadas sucessivas 104
19.7. Derivada implícita 105
EXERCÍCIOS 19.6 107
19.8. Tabela de derivadas básicas 108
CAP 20
20. A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES 113
20.1. Crescimento e decrescimento 113
20.2. Concavidade e ponto de inflexão 117
EXERCÍCIOS 20.1 124
20.3. Extremos (máximos e mínimos) 125
20.4. Pontos notáveis de uma função no geogebra 137
EXERCÍCIOS 20.2 138
20.5. Aplicações de derivada 140
20.5.1. Problemas de otimização 140
EXERCÍCIOS 20.3 142
20.5.2. A derivada como taxa de variação de uma função 144
20.5.3. A derivada e as taxas de variação de uma função polinomial 147
20.5.4. Taxa relacionadas 151
EXERCÍCIOS 20.4 153
20.5.5. Regra de L'Hôspital 155
EXERCÍCIOS 20.5 158
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 20.6 159
CAP 21
21. INTEGRAL 169
21.1. Conceito de integral 169
21.2. Integral definida 172
21.2.1. Propriedades de integral definida 179
EXERCÍCIOS 21.1 181
21.2.2. Área entre funções 182
EXERCÍCIOS 21.2 185
21.3. Integral indefinida 187
21.3.1. Tabela de integrais básicas 188
21.4. Técnicas de integração 189
21.4.1. Integração por substituição 189
EXERCÍCIOS 21.3 191
21.4.2. Integração por partes 192
EXERCÍCIOS 21.4 198
21.4.3. Integrais trigonométricas 199
EXERCÍCIOS 21.5 202
21.4.4. Integração por substituição trigonométrica 203

EXERCÍCIOS 21.6 209
21.4.5. Integração de funções racionais por frações parciais 210
EXERCÍCIOS 21.7 214
21.5. Comprimento de curva (ou arco) 215
EXERCÍCIOS 21.8 217
21.6. Volume de sólidos 218
21.6.1. Volume de sólidos por fatiamento 218
21.6.2. Volume de sólidos de revolução (método dos discos) 220
EXERCÍCIOS 21.9 224
21.6.3. Volume por camadas cilíndricas 226
EXERCÍCIOS 21.10 229
21.7. Integrais impróprias 230
EXERCÍCIOS 21.11 234
21.8. Integração numérica aproximada 235
21.8.1. Regra do ponto médio 235
21.8.2. Regra do trapézio 236
21.8.3. Regra de Simpson 237
21.8.4. Polinômio de Taylor 238
21.9. Cálculo de integrais utilizando o geogebra 240
EXERCÍCIOS 21.12 243
21.10. Aplicações de integral 245
21.10.1. Centro de gravidade (centroide) 245
21.10.2. Energia e trabalho 247
21.10.3. Lei de resfriamento de Newton 249
21.10.4. Teorema do valor médio para as integrais (TVMI) 250
21.10.5. Aplicação em matemática financeira 252
21.10.6. Custo de armazenamento 253
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 21.13 255
CAP 22
22. GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL 263
22.1. Representação em um espaço tridimensional 263
22.2. Distância entre dois pontos no espaço 265
22.3. Equação de uma esfera 266
22.4. Ponto médio 267
22.5. Baricentro de um triângulo 267
EXERCÍCIOS 22.1 268
22.6. Vetor no espaço 269
22.6.1. Produto vetorial 270
22.6.2. Relação entre o produto vetorial e o produto interno 273
EXERCÍCIOS 22.2 276
22.6.3. Produto misto de vetores 278
EXERCÍCIOS 22.3 281
22.7. Equação da reta no espaço 282
22.8. Distância de ponto e reta 283
EXERCÍCIOS 22.4 284
22.9. Equação do plano 285
22.10. Ângulo entre dois planos 288

22.11. Distância entre dois planos 289
22.12. Distância entre ponto e plano 290
EXERCÍCIOS 22.5 291
22.13. Objetos matemáticos no geogebra 3D 292
22.13.1. Ponto no espaço no geogebra 292
22.13.2. Vetor no espaço no geogebra 293
22.13.3. Reta no espaço no geogebra 294
22.13.4. Plano no espaço no geogebra 295
22.13.5. Esfera no geogebra 296
CAP 23
23. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS (DERIVADAS PARCIAIS) 301
23.1. Gráfico de funções com duas variáveis 301
23.1.1. Gráfico de uma superfície plana 301
23.1.2. Gráfico de superfícies cilíndricas 304
23.1.3. Gráfico de superfícies quádricas 305
23.1.4. Gráfico de superfícies gerais (uso do geogebra) 308
EXERCÍCIOS 23.1 308
23.2. Curvas de nível (ou de contorno) 309
23.3. Curvas de nível no geogebra 310
23.4. Domínio de uma função de duas ou mais variáveis 312
23.5. Limite e continuidade de funções de duas ou mais variáveis 314
23.5.1. Limite de funções de duas ou mais variáveis 314
23.5.2. Continuidade de funções de duas ou mais variáveis 317
EXERCÍCIOS 23.2 319
23.6. Derivadas parciais 321
23.6.1. Interpretação geométrica das derivadas parciais 325
23.6.2. Reta tangente à superfície (visualização no geogebra) 326
23.6.3. Derivadas parciais de ordens superiores 329
EXERCÍCIOS 23.3 331
23.6.4. Plano tangente à uma superfície 333
23.6.5. Aproximação linear e diferencial de uma função 335
23.6.6. Regra da cadeia 339
23.6.7. Diferenciabilidade e continuidade 340
EXERCÍCIOS 23.4 340
23.6.8. Derivadas direcionais e vetor gradiente 342
EXERCÍCIOS 23.5 347
23.6.9. Máximos e mínimos de funções de duas variáveis 348
EXERCÍCIOS 23.6 357
23.6.10. Multiplicadores de Lagrange 358
EXERCÍCIOS 23.7 361
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 23.8 361
CAP 24
24. INTEGRAIS MÚLTIPLAS 367
24.1. Integrais duplas 367
24.1.1. Integrais duplas sobre retângulos 367

24.1.2. Integrais iteradas 369
EXERCÍCIOS 24.1 374
24.1.3. Integrais duplas em regiões gerais 376
24.1.4. Propriedades das integrais duplas 381
EXERCÍCIOS 24.2 383
24.1.5. Integrais duplas em coordenadas polares 384
EXERCÍCIOS 24.3 392
24.1.6. Integrais duplas no cálculo de área de superfície 394
EXERCÍCIOS 24.4 396
24.2. Integrais triplas 397
24.2.1. Integrais triplas em caixas retangulares 398
24.2.2. Integrais triplas em sólidos gerais 399
EXERCÍCIOS 24.5 405
24.2.3. Integrais triplas com coordenadas cilíndricas 406
24.2.4. Integrais triplas com coordenadas esféricas 408
EXERCÍCIOS 24.6 411
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 24.7 412
CAP 25
25. ÁLGEBRA LINEAR 417
25.1. Corpos 417
25.2. Espaços vetoriais 418
EXERCÍCIOS 25.1 421
25.3. Subespaço vetorial 422
25.4. Combinação linear 425
25.5. Espaços e subespaços gerados 426
EXERCÍCIOS 25.2 429
25.6. Dependência e independência linear 431
EXERCÍCIOS 25.3 437
25.7. Base e dimensão 438
EXERCÍCIOS 25.4 445
25.8. Coordenadas e mudança de base 447
25.8.1. Coordenadas 447
25.8.2. Mudança de base 449
EXERCÍCIOS 25.5 454
25.9. Transformações lineares 456
25.9.1. Núcleo e imagem 459
EXERCÍCIOS 25.6 464
25.9.2. Matriz de uma transformação linear 467
25.9.3. Operador linear 473
EXERCÍCIOS 25.7 476
25.9.4. Autovalores e autovetores 479
25.9.5. Polinômio característico 480
25.9.6. Diagonalização de operadores 482

EXERCÍCIOS 25.8 485
25.10. Espaço com produto interno 488
25.10.1. Ângulo entre vetores e ortogonalidade 491
25.10.2. Ortogonalização de Gram-Shcmidt 496
EXERCÍCIOS 25.9 496
25.11. Programação linear (desigualdades lineares) 499
25.11.1. Desigualdades lineares 499
25.11.2. Sistema de desigualdades lineares 500
25.11.3. Programação linear 502
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 25.10 504
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 509
TABELAS 517
GABARITOS E SOLUÇÕES 521
SOBRE O AUTOR 563

CAPÍTULO 18

LIMITE

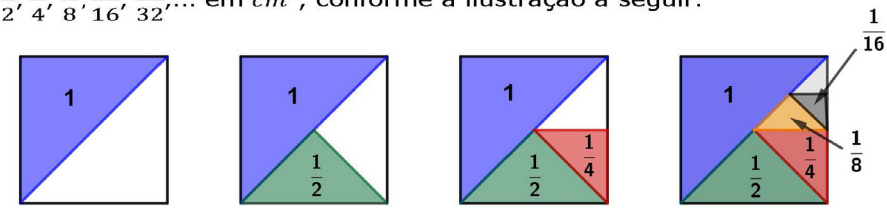
LIMITE

18. LIMITE

Nesta unidade daremos início a um dos tópicos mais importantes e também basilar do cálculo diferencial e integral: **limite.** Esse conceito matemático surgiu inicialmente de ideias abstratas e até mesmo paradoxais (como o paradoxo de Zenão[1], por exemplo) relacionadas à concepção de que se pode, mesmo no campo abstrato, proceder com operações matemáticas indefinidamente. A essa concepção, ainda vaga e incerta na época, conceituou-se de infinito. No entanto, ao longo dos anos, com longas discussões e estudos sobre esse conceito, várias teorias surgiram de forma mais sólida e contundente, relacionadas principalmente às funções, como continuidade, retas tangentes, máximo e mínimos, cálculos de área, etc., conforme veremos ao longo desse volume.

18.1. Noção intuitiva de limite

Na figura seguinte, um quadrado de lado $\sqrt{2}$ cm, foi dividido ao meio por uma de suas diagonais. Como a área do quadrado é $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2cm^2$ e a área dos dois triângulos formados são iguais, cada triângulo mede $1cm^2$ (metade). Em seguida, um desses triângulos foi dividido ao meio, resultando em novos triângulos de área $1/2cm^2$. Dividindo mais uma vez, um desses novos triângulos e também ao meio, obtemos dois outros triângulos de $1/4cm^2$. Repetindo esse processo (dividindo sempre um dos novos triângulos ao meio), teremos áreas sequencialmente iguais a $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$ em cm^2, conforme a ilustração a seguir.



[1] Zenão foi um filósofo grego da antiguidade autor de um dos paradoxos mais conhecidos da Matemática: Aquiles e a tartaruga. Conta-se que a tartaruga tem sempre uma vantagem pré-definida à frente de Aquiles (o soldado). Por exemplo, 1/10. A cada 1/10 do intervalo percorrido por Aquiles até alcançar a tartaruga, será acrescido ao deslocamento da tartaruga, indefinidamente. Esse contexto supõe que Aquiles jamais alcançará a tartaruga.

A seguir, está a soma parcial das áreas desses novos triângulos:

- $1+\frac{1}{2}=1{,}5$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1{,}75$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=1{,}984375$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\cdots\frac{1}{1084576}=1{,}99999904.$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1{,}875$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=1{,}9375$

É possível perceber que, na medida em que dividimos novos triângulos e somamos suas áreas às somas parciais, o resultado será sempre um valor muito próximo a 2 ou tão próximo quanto se deseje (para isso, basta repetir o quanto quiser esse processo), mas nunca será superior a 2, pois essa é área do quadrado. Assim, dizemos que o **limite** dessa soma, quando o número de divisões em novos triângulos tende ao infinito, é igual a 2.

Podemos ainda, de forma contrária e equivalente, afirmar que quando essa soma tende a 2, o limite do número de divisões em novos triângulos é o infinito.

Outro exemplo de limite, agora no campo aritmético e não mais geométrico, são as dízimas periódicas. Sabemos por exemplo, que 0,22222... pode ser representado pela fração geratriz $\frac{2}{9}$, pois

0,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + 0,00002...= $\frac{2}{9}$ (certifique-se na calculadora).

Nesse caso, na medida em que acrescentamos parcelas a essa soma, o seu resultado vai se tornando muito próximo de $\frac{2}{9}$, e cada vez mais próximo ainda, quando aumentamos essas parcelas. Nessa conjuntura, dizemos que o limite dessa soma, quando a quantidade de parcelas tende ao infinito é $\frac{2}{9}$. E equivalentemente, podemos também dizer que quando essa soma tende a $\frac{2}{9}$, o limite da quantidade de parcelas é o infinito.

Essa noção intuitiva de limite, que envolve proximidade ou tendência seja a um número ou ao infinito, aplica-se também à funções. Esse é inclusive, o nosso foco de estudo.

Exemplo: Seja a função $f:\{\mathbb{R}-\{1/2\}\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$.

Vamos inicialmente atribuir valores para x, aumentando-o progressivamente e analisar o que ocorre com $f(x)$. Os valores de x escolhidos estão na tabela a seguir, use uma calculadora para acompanhar entender os resultados.

x	10	1000	100000	10000000
$f(x)$	1,57894737	1,50075038	1,50000750	1,50000008

É fácil perceber que a função $f(x)$ se aproxima de 1,5 na medida em que os valores de x aumentam consideravelmente (tendem ao infinito). Assim, dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende ao infinito é 1,5. Escreve-se assim:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)=1{,}5.$$

E lê-se assim: "o limite de $\frac{3x}{2x-1}$ quando x tende ao infinito é 1,5."

Estudaremos em detalhes esse tipo de limite, com x tendendo ao infinito, em limites no infinito na seção 18.5.

Agora, considerando a mesma função, vamos ver o que acontece com o seu valor, quando x se aproxima de 1 pela esquerda (ou seja, números estritamente menores que 1) e quando x se aproxima de 1 pela direita (isto é, números estritamente maiores que 1). Veja os valores na tabela abaixo e confirme as informações utilizando uma calculadora.

x se aproximando de 1 pela esquerda ($x < 1$) → ← x se aproximando de 1 pela direita ($x > 1$)

x	0,9	0,99	0,999	0,999999	1	1,0000001	1,0001	1,01	1,1
$f(x)$	3,375	3,030612245	3,003006012	3,000003	3	2,9999997	2,9997	2,970588	2,75

$f(x)$ se aproximando de 3 → ← $f(x)$ se aproximando de 3

Ao aproximar os valores de x tanto pela esquerda, como pela direita, a função $f(x)$ se aproxima de 3. Isso pode ser comprovado também pelo gráfico da função na figura 18.1.1.

Nesse caso, escreve-se:

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)=3.$$

E lê-se: "o limite de $\frac{3x}{2x-1}$ quando x tende à esquerda de 1 é igual a 3".

Escreve-se ainda:

$$\lim_{x\to1^+}\frac{3x}{2x-1}=3.$$

E lê-se: "o limite de $\frac{3x}{2x-1}$ quando x tende à direita de 1 é igual a 3".

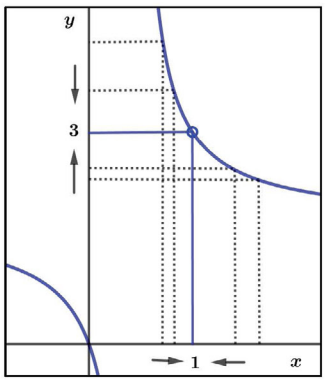


Figura 18.1.1

Observação quanto à notação: Em limites, utilizamos as expressões $x \to a^+$ e $x \to a^-$ para representar x tendendo à a pela direita e x tendendo à a pela esquerda, respectivamente. Ambos os limites são denominados de **limites laterais**.

Diante dessa noção intuitiva podemos anunciar a definição precisa de limite.

18.1.1. Definição de limite

Imaginemos uma função $f(x)$ em que os valores de x se aproximam mais e mais de um número a (real) de qualquer um dos dois lados (esquerda ou direita). Em um determinando instante, x estará dentro de um intervalo $[x_0, x_1]$ e o valor de $f(x)$ estará entre $L-\epsilon$ e $L+\epsilon$ (ver figura 18.1.1.1). Assim,

$$L-\epsilon < f(x) < L+\epsilon \Rightarrow \boxed{|f(x)-L| < \epsilon}.$$

Tomando um valor δ ainda mais próximo de a, ou seja, menor que $x_1 - a$ e $a - x_0$, conforme a figura 18.1.1.1, tem-se que x assume valores entre $a-\delta$ e $a+\delta$, mas não igual a a. E de forma equivalente, essa condição pode ser assim expressa:

$$a-\delta < x < a+\delta \Rightarrow \boxed{0 < |x-a| < \delta}.$$

De acordo com esses parâmetros, a definição matemática pode ser escrita conforme a seguir.

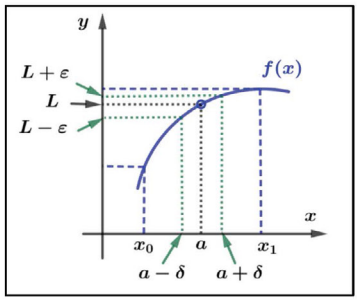


Figura 18.1.1.1

Definição 18.1.1.1 (Definição de limite):

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon$$

Leitura: "O limite de $f(x)$ quando x tende a a é igual a L, se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x)-L| < \epsilon$". Onde ϵ: épsilon e δ: delta.

Analisando a definição acima, concluímos que quanto menor for δ, mais próximo a função $f(x)$ será de L. Isso quer dizer que, é possível tornar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo de a.

O que não está explícito na definição 18.1.1.1 é sobre quais condições o limite L de uma função existe (ou não), ou ainda, se ele é único. Para isso, precisamos dos dois seguintes teoremas.

SAIBA MAIS!

Essa definição é atribuída ao matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897), conhecida como limite bilateral "épsilon-delta". Sua aplicação formal e utilidade na demonstração de limites, será vista em exemplos mais adiantes.

Teorema 18.1.1.1 (limites laterais): Temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e ambos forem iguais a L.

Demonstração:

Sabemos que a expressão $0 < |x-a| < \delta$ da definição 18.1.1.1 é equivalente a

$-\delta < x-a < 0$ ou $0 < x-a < \delta$. Então, a definição de limite pode ser expressa de duas formas:

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | -\delta < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \\ e \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 | 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \epsilon \end{cases} \text{ ou seja, } \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L \\ e \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L \end{cases}.$$

Teorema 18.1.1.2 (unicidade de limite): Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstração: Vamos supor que $L_1 \neq L_2$ e que $\epsilon = |L_1 - L_2| > 0$.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \Rightarrow \boxed{\exists \delta_1 > 0 | 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1| < \frac{\epsilon}{2}}$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2 \Rightarrow \boxed{\exists \delta_2 > 0 | 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-L_2| < \frac{\epsilon}{2}}$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim $\delta \leq \delta_1$, $\delta \leq \delta_2$ e se $0 < |x-a| < \delta$ então:

$|f(x)-L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|f(x)-L_2| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por fim, $\epsilon = |L_1 - L_2| = |L_1 + f(x) - f(x) - L_2| \leq |L_1 - f(x)| + |L_2 - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow$

$\epsilon = |L_1 - L_2| < \epsilon$. Absurdo! Logo, $L_1 = L_2$.

Isso significa que, se existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então ele é único.

Em outras palavras, para o limite de uma função existir é preciso que os limites laterais sejam iguais ao mesmo valor L e uma vez encontrado esse L, ele é único.

Exemplo: Calcule o limite de $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \left(\frac{3x}{2x-1}\right)$.

Solução: Construindo uma tabela com valores próximos e maiores que 0,5 com a ajuda de uma calculadora, encontramos:

x	0,51	0,50001	0,500000001	0,50000000001
$f(x)$	76,5	75001,5	750000022,7	74999993795,97

Analisando os resultados de $f(x)$, concluímos que quando x se aproxima de $\frac{1}{2}$ pela direita, a função assume valores elevados e positivos, ou seja, a função está tendendo ao mais infinito $(+\infty)$ e escrevemos:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \left(\frac{3x}{2x-1}\right) = +\infty.$$

Agora, construindo uma nova tabela, porém com valores próximos e menores que 0,5, encontramos utilizando uma calculadora:

x	0,49	0,499	0,49999	0,4999999
$f(x)$	-73,5	-748,5	-74998,5	-74999993792,97

Conclusão: Quando x se aproxima de $\frac{1}{2}$ pela esquerda, a função $f(x)$ assume valores

muito pequenos (negativos), e assim, dizemos que a função está tendendo ao menos infinito (-∞) e escrevemos:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(\frac{3x}{2x-1}\right) = -\infty.$$

Como os limites laterais (à direita e à esquerda) dessa função são diferentes, o limite bilateral $\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)$ não existe. Essa conclusão é assegurada pelo gráfico da função $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$ que está na figura 18.1.1.2.

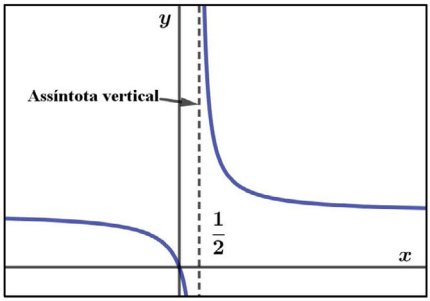


Figura 18.1.1.2

SAIBA MAIS!

Assíntota vertical é uma reta de equação $x = a$, pelo qual o limite $\lim_{x\to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$ acontece.

O leitor deve ter percebido que nos três exemplos anteriores utilizou-se a mesma a função $f(x)=\frac{3x}{2x-1}$, porém, com x se aproximando de valores diferentes. Reveja os resultados:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)=1{,}5}, \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{3x}{2x-1}=3} \text{ e } \boxed{\lim_{x\to\frac{1}{2}}\left(\frac{3x}{2x-1}\right)=\nexists}.$$

O objetivo era mostrar que o valor do limite e sua existência, depende não só da função, mas também do valor pelo qual x se aproxima.

2º exemplo: Calcule o limite de $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)$.

Solução: Construindo uma tabela com a ajuda de uma calculadora e utilizando valores de x próximos de 2, pela direita, encontramos:

x	2,01	2,002	2,0001	2,00000001
$f(x)$	4,01	4,002	4,0001	4,00000001

Agora, com valores de x próximos de 2, pela esquerda:

x	1,99	1,9998	1,99999	1,99999999
$f(x)$	3,99	3,9998	3,99999	3,99999999

É perceptível que o limite dessa função é igual a 4, com x tendendo a 2, tanto pela esquerda como pela direita. Logo,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=4.$$

O gráfico dessa função na figura 18.1.1.3, explica esse valor.

Observação: Não é preciso necessariamente que a função esteja definida em a para que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista. Pois, o resultado L do limite é proveniente de x tão próximo quanto se deseje de a e não igual a a.

O 2º exemplo anterior retrata muito bem essa observação. Note no gráfico da figura 18.1.1.3, que a função $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ não está definida para $x=2$ (no ponto $\odot$ do gráfico), no entanto, o valor de $f(x)$ quando x se aproxima à esquerda ou à direita de 2, conforme já constatamos, é 4.

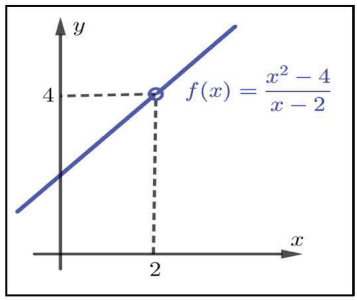


Figura 18.1.1.3

A construção de tabelas e análise de aproximações, servem apenas para conjecturar o valor do limite de uma função. Nos exemplos a seguir, usaremos a definição de limite (18.1.1.1) para demonstrar de forma irrefutável a existência de um $\delta>0$, dado $\epsilon>0$, tal que, se $0<|x-a|<\delta$, então $|f(x)-L|<\epsilon$.

3º exemplo: Use a definição para provar que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$.

Solução: Dados $f(x)=3x-1$, L $=5$ e $a=2$. Pela definição devemos mostrar que, dado um número $\epsilon>0$, podemos encontrar um número $\delta>0$, tal que

$$\underbrace{|(3x-1)}_{f(x)}-\underbrace{5}_{L}|<\epsilon, se \boxed{0<\underbrace{|x-2|}_{a}<\delta}\ (1).$$

$$|3x-6|<\epsilon \Rightarrow 3.|x-2|<\epsilon \Rightarrow \boxed{|x-2|<\frac{\epsilon}{3}}\ (2).$$

Analisando (1) e (2), concluímos que a comprovação é assegurada para $\delta=\frac{\epsilon}{3}$. Isto é, dado $\epsilon>0$ existe um $\delta>0$. Por conseguinte, $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$.

Construa uma tabela e confirme esse limite.

Convém esclarecer que o valor $\delta=\frac{\epsilon}{3}$ encontrado acima, não é único. Quaisquer outros valores menores de δ como $\frac{\epsilon}{4}$, $\frac{\epsilon}{5}$, $\frac{\epsilon}{10}$, etc., também satisfazem a desigualdade da definição.

4º exemplo: Vamos calcular o $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x}{5x-5}\right)$ e usar a definição para demonstrar.

Solução:

x se aproximando de 1 pela esquerda ($x < 1$) → ← x se aproximando de 1 pela direita ($x > 1$)

x	0,99	0,999	0,9999	0,999999	1	1,0000001	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	0,39402	0,3994	0,39994	0,3999994	0,4	0,40000006	0,40006	0,4006	0,40602

$f(x)$ se aproximando de 0,4 → ← $f(x)$ se aproximando de 0,4

De acordo com a tabela, podemos conjecturar que o $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x}{5x-5}\right) = 0{,}4$. Vamos agora, demonstrar utilizando a definição. Dados: $f(x) = \left(\frac{x^3-x}{5x-5}\right), L = 0{,}4\ e\ a = 1$.

Uma função simplificada de $\frac{x^3-x}{5x-5}$ é

$$\frac{x(x^2-1)}{5(x-1)} = \frac{x(x+1)(\cancel{x-1})}{5(\cancel{x-1})} = \boxed{\frac{x(x+1)}{5}}.$$

Podemos cancelar $(x-1)$, pois este não é zero, e sim, um valor tão próximo de zero quanto se deseje.

Então,

$$\left|\underbrace{\frac{x(x+1)}{5}}_{f(x)} - \underbrace{0{,}4}_{L}\right| < \epsilon, \quad se\ 0 < \left|x - \underbrace{1}_{a}\right| < \delta \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x(x+1)}{5} - \frac{2}{5}\right| < \epsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2+x-2}{5}\right| < \epsilon \Rightarrow \boxed{|(x+2)(x-1)| < 5\epsilon} \quad (1).$$

Devemos limitar $(x+2)$. Supondo que $\delta \leq 1 \Rightarrow |x-1| < 1 \Rightarrow \boxed{-1 < x-1 < 1}$.

Somando 3 em ambos os membros dessa desigualdades:

$$2 < x+2 < 4 \Rightarrow |x+2| < 4 \Rightarrow \boxed{|(x+2)(x-1)| < 4\delta}\ (2).$$

De (1) e (2), concluímos que $4\delta < 5\epsilon \Rightarrow \delta < \frac{5}{4}\epsilon$ e $\delta \leq 1$. E por conseguinte, tomando $\delta = \min\left(1, \frac{5}{4}\epsilon\right)$, temos $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-x}{5x-5}\right) = 0{,}4$.

Perceba que função $f(x) = \frac{x^3-x}{5x-5}$ não está definida para $x = 1$, no entanto, o $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe e como constatamos é 0,4.

EXERCÍCIOS 18.1

1) Caso existam, calcule os limites a seguir.

a) $\lim_{x\to 3}(2x+1)$

b) $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+1)$

c) $\lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{x-7}\right)$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{13}{x-13}\right)$

e) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)$

f) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{-x+3}{x}\right)$

2) Demonstre os seguintes limites usando a definição.

a) $\lim_{x\to 2}(-x+5) = 3$

b) $\lim_{x\to 4}(-3x+10) = -2$

c) $\lim_{x\to 3}(x^2-1) = 8$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-16}{x-4}\right) = 0$

18.2. Propriedades do limite de uma função

Recorrer à tabelas para conjecturar o valor de um limite e, em seguida, utilizar a definição 18.1.1.1 para demonstrá-lo, pode ser um processo dispendioso. Por isso, precisamos de algumas ferramentas que facilitem os cálculos e encontrem uma solução com mais brevidade. Dentre essas ferramentas, estão as propriedades do limite de uma função.

Como as demonstrações dessas propriedades são demasiadamente longas e não apresenta nenhum teor didático relevante aos nossos estudos, elas serão apresentadas sem demonstração[2]. São elas:

Propriedade 1: Se $c \in \mathbb{R}$ e f uma função definida por $f(x) = c$, para todo x real, então $\lim_{x \to a} c = c$.

"O limite de uma função constante é a própria constante."

Exemplos: a) $\lim_{x \to 1} -3 = -3.$ b) $\lim_{x \to -4} 11 = 11.$

Propriedade 2: Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} c.f(x) = c.\lim_{x \to a} f(x) = c.L.$$

"O limite do produto de uma constante por uma função é o produto dessa constante pelo limite da função."

Exemplo: Se $\lim_{x \to 2}(2x + 1) = 5$, então para calcular $\lim_{x \to 2} 7.(2x + 1) = 5$, basta fazer

$$\lim_{x \to 2} 7.(2x + 1) = 7.\underbrace{\lim_{x \to 2}(2x + 1)}_{5} = 7.5 = 35.$$

Propriedade 3: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L + M.$$

"O limite da soma é a soma dos limites."

Exemplo: Se $\lim_{x \to 1}(-3x^2 + 2) = -1$ e $\lim_{x \to 1}(5x) = 5$, então

$$\lim_{x \to 1}(-3x^2 + 5x + 2) = \lim_{x \to 1}(-3x^2 + 2) + \lim_{x \to 1}(5x) = -1 + 5 = 4.$$

Essa propriedade pode ser estendida a soma de três ou mais de funções (quantidade finita).

[2] Caso seja de interesse do leitor, as demonstrações dessas propriedades podem ser apreciadas em (IEZZI, 1993).

Propriedade 4: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = L - M.$$

"O limite da diferença é a diferença dos limites."

Exemplo: Se $\lim_{x \to 3}(-x + 5) = 2$ e $\lim_{x \to 3}(2x - 1) = 5$, então

$$\lim_{x \to 3}[(-x + 5) - (2x - 1)] = \lim_{x \to 3}(-x + 5) - \lim_{x \to 3}(2x - 1) = 2 - 5 = -3.$$

Propriedade 5: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$$\lim_{x \to a} (f.g)(x) = L.M.$$

"O limite do produto é o produto dos limites."

Exemplo: Se $\lim_{x \to -1}(2x^2 - 1) = 1$ e $\lim_{x \to -1}(-6x) = 6$, então

$$\lim_{x \to -1}(2x^2 - 1).(-6x) = \left[\lim_{x \to -1}(2x^2 - 1)\right].\left[\lim_{x \to -1}(-6x)\right] = 1.6 = 6.$$

Essa propriedade pode ser estendida ao produto de três ou mais funções (quantidade finita).

Propriedade 6: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, então

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}.$$

"O limite do quociente é o quociente dos limites."

Exemplo: Se $\lim_{x \to 0}(-3x + 2) = 2$ e $\lim_{x \to 0}(4x - 1) = -1$, então

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{-3x + 2}{4x - 1}\right) = \frac{\lim_{x \to 0}(-3x + 2)}{\lim_{x \to 0}(4x - 1)} = \frac{2}{-1} = -2.$$

Propriedade 7: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f^n(x) = L^n$ $(n \in \mathbb{N})$".

"O limite da potência é a potência do limite."

Exemplo: Se $\lim_{x \to 5}(x^2 - 23) = 2$, então $\lim_{x \to 5}(x^2 - 23)^3 = \left(\lim_{x \to 5}(x^2 - 23)\right)^3 = 2^3 = 8.$

Propriedade 8: Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \ (L > 0 \ e \ n \in \mathbb{N} \ ou \ L < 0 \ e \ n \ ímpar).$$

"O limite da radiciação é a radiciação do limite."

Exemplo: Se $\lim_{x\to -4}(x^2-12)=4$, então

$$\lim_{x\to -4}\sqrt[2]{x^2-12}=\sqrt[2]{\lim_{x\to -4}(x^2-12)}=\sqrt[2]{4}=2.$$

Todas essas propriedades se aplicam também aos limites laterais (à esquerda ou à direita), ou seja, são válidas para $x\to a^+$ ou $x\to a^-$. Como também, podem ser concomitantemente aplicadas. Veja um exemplo a seguir.

Exemplo: Se $\lim_{x\to 0}(x^2+2)=2$, $\lim_{x\to 0}(x^2-4x+1)=1$ e $\lim_{x\to 0}(x+1)=1$, então

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{(x^2+2).(x^2-4x+1)}{(x+1)}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2).(x^2-4x+1)}{(x+1)}}\Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x\to 0}(x^2+2).\lim_{x\to 0}(x^2-4x+1)}{\lim_{x\to 0}(x+1)}}=\sqrt{\frac{2.1}{1}}=\sqrt{2}.$$

18.3. Limite da função polinomial

A seguir está um dos mais importantes teoremas envolvendo limite, que aplicado juntamente com as propriedades já vistas, tornam-se excelentes ferramentas para a solução de limites envolvendo funções polinomiais.

Teorema 18.3.1 (limite da função polinomial): O limite da função polinomial $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ com x tentendo a a, é igual a $f(a)$, isto é

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Constate a importância desse teorema, aplicando-o nos exemplos e exercícios anteriores que envolvem funções polinomiais e confirme os resultados.

Demonstração:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$$

Aplicando a propriedade 3, dispomos de

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}a_0+\lim_{x\to a}a_1x+\lim_{x\to a}a_2x^2+\cdots+\lim_{x\to a}a_nx^n.$$

Aplicando a propriedade 1, temos

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}a_0+a_1.\lim_{x\to a}x+\ a_2.\lim_{x\to a}x^2+\ldots+a_n.\lim_{x\to a}x^n.$$

Por fim, aplicando a propriedade 7 e sabendo que $\lim_{x\to a}x=a$, concluímos que

$$\lim_{x\to a}f(x)=a_0+a_1a+a_2a^2+a_3a^3+\cdots+a_na^n=f(a).$$

Esse teorema nos diz que para calcular o limite de uma função polinomial $f(x)$ com x tendendo a a, basta substituir x por a na função.

Exemplo: Calcule os limites das funções polinomiais a seguir.

a) $\lim_{x\to 2}(-3x^2+x-1)$

Solução: $\lim_{x\to 2}(-3x^2+x-1)=-3.2^2+2-1=-3.4+1=-12+1=\boxed{-11}$.

b) $\lim_{x\to 1}(x^2+5x-2)(x^3+1)$

Solução: $\lim_{x\to 1}(x^2+5x-2).\lim_{x\to 1}(x^3+1) = (1^2+5.1-2)(1^3+1) =$

$= (1+5-2)(1+1) = 4.2 = \boxed{8}.$

c) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x^2+x-1}{2x+5}\right)$

Solução:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x^2+x-1}{2x+5}\right) = \frac{\lim_{x\to 0}(x^3-3x^2+x-1)}{\lim_{x\to 0}(2x+5)} = \frac{0^3-3.0^2+0-1}{2.0+5} = \boxed{\frac{-1}{5}}.$$

d) $\lim_{x\to 5^+}\sqrt[3]{\frac{x^3+3}{3x-13}}$

Solução:

$$\lim_{x\to 5^+}\sqrt[3]{\frac{x^3+3}{3x-13}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 5^+}\frac{x^3+3}{3x-13}} = \sqrt[3]{\frac{\lim_{x\to 5^+}(x^3+3)}{\lim_{x\to 5^+}(3x-13)}} \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{\frac{5^3+3}{3.5-13}} = \sqrt[3]{\frac{125+3}{15-13}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = \boxed{4}.$$

Observação: Como as propriedades podem ser simultaneamente aplicadas e em conjunto com o teorema 18.3.1, bastava apenas substituir o valor de x por a em todos os exemplos anteriores, sem a necessidade de aplicar as propriedades passo a passo. É o processo em que denominamos de **substituição direta** de x por a no cálculo de limites. Lembrando ainda, que essa substituição direta aplica-se somente, até o presente momento, à funções com polinômios em sua composição.

EXERCÍCIOS 18.2

1) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 2}(x-4)$

b) $\lim_{x\to\frac{-3}{2}}(2x-5)$

c) $\lim_{x\to -5}(x^2-25)$

d) $\lim_{x\to 10}(x^3-100)$

e) $\lim_{x\to 1}(x^2+2x-3)(x^3+2)$

f) $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-4x-\frac{1}{2})(x+1)$

g) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{2x^2-7x-1}{x+3}\right)$

h) $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2x^3-3x^2+2x-11}{9x^2+8x-7}\right)$

i) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x^{50}-x^{49}-x^{48}+5}{x^{50}+2}\right)$

j) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x^2+1}{x-1}\right)^2$

k) $\lim_{x\to 10}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)^3$

l) $\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{x^3+2x^2-3x-3}{-3x^2-6x+6}}$

m) $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{-x^2-x+8}}{\sqrt{5x^2+4}}$

n) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[n]{-10x^2+20x+1}}{\sqrt{5x^2+4}}$ $(n\in\mathbb{N})$

18.4. Limite da função racional

Seja a função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ e a um número real qualquer. Há três casos a considerar, quanto ao $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$. São eles:

- **1º caso:** Se $q(a) \neq 0$, então $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$.

Essa afirmação é assegurada pela propriedade 6 e pelo teorema 18.3.1.

Esse caso já foi visto nos exemplos e nos exercícios 18.2 anteriores, sua solução é simples, basta fazer a substituição direta.

- **2º caso:** Se $q(a) = 0$ e $p(a) = 0$, tem-se uma indeterminação do tipo 0/0. Estudaremos esse caso nos itens 18.4.1 e 18.4.2 a seguir.

- **3º caso:** Se $q(a) = 0$, mas $p(a) \neq 0$, então $\lim_{x \to a} f(x)$ pode não existir, ser $+\infty$ (mais infinito) ou ser $-\infty$ (menos infinito), conforme estudaremos na subseção 18.4.3 mais adiante.

18.4.1. Limite da função racional envolvendo polinômios

Nesta subseção, estudaremos o 2º caso em que o limite de $\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ resulta em uma indeterminação da forma 0/0, isto é, quando o valor numérico dos polinômios $p(a)$ e $q(a)$ resultam em zero na substituição direta.

O teorema 16.2.4.2 (teorema de D'Alembert), que está no volume 1 dessa coleção, nos assegura que se um polinômio possui um valor numérico nulo para $x = a$, então esse polinômio é divisível por $x - a$. Então, nesse caso, $p(x)$ e $q(x)$ serão divisíveis por $x - a$, o que nos permite escrevê-los como $p'(x)(x - a)$ e $q'(x)(x - a)$, respectivamente. Como consequência disso,

$$\lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{p'(x).(x - a)}{q'(x).(x - a)} = \lim_{x \to a} \frac{p'(x)}{q'(x)}.$$

Onde $p'(x)$ e $q'(x)$ são os quocientes resultantes da divisão de $p(x)$ e $q(x)$ por $x - a$, nessa ordem.

Esse procedimento, de cancelar[3] $(x - a)$ por $(x - a)$, pode resolver o problema da indeterminação, uma vez que o binômio $(x - a)$ que anulava o polinômio, é eliminado. Caso a indeterminação persista, basta aplicar o procedimento mais uma vez.

Exemplo: Calcule $\lim_{x \to 5} \left(\frac{x^2 - 25}{2x - 10}\right)$.

[3] O ato de cancelar $(x - a)$ por $(x - a)$ é válida em termos de limites, pois $(x - a)$ com x tendendo a a, não é zero e sim um número tão próximo de zero quanto se deseje.

Solução: Vamos verificar se $x = 5$ anula os polinômios.

$$\frac{\lim\limits_{x\to 5} x^2 - 25}{\lim\limits_{x\to 5} 2x - 10} = \frac{5^2 - 25}{2.5 - 10} = \frac{0}{0}\left(\text{indeterminação do tipo}\ \frac{0}{0}\right).$$

Segundo o teorema de D'Alembert os dois polinômios em questão são divisíveis por $x - 5$. Com efeito, $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ e $2x - 10 = 2(x - 5)$. Reescrevendo o limite, encontramos

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2 - 25}{2x - 10}\right) = \lim_{x\to 5} \frac{(x + 5)\cancel{(x - 5)}}{2\cancel{(x - 5)}} = \lim_{x\to 5} \frac{(x + 5)}{2} = \frac{(5 + 5)}{2} = \boxed{5}.$$

Observe que o cancelamento de $(x - 5)$ com $(x - 5)$ resolveu a indeterminação.

2º exemplo: Calcule o limite de $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{6x^2-21x-12}{x^2-16}\right)$.

Solução: Vamos verificar se $x = 4$ anula os polinômios.

$$\begin{cases} 6x^2 - 21x - 12 = 6.4^2 - 21.4 - 12 = 96 - 84 - 12 = 0. \\ x^2 - 16 = 4^2 - 16 = 0. \end{cases}$$

Temos uma indeterminação 0/0, então os dois polinômios são divisíveis por $x - 4$.

Caso o produto notável que resulta no polinômio não esteja evidente, podemos utilizar três métodos (conforme a unidade 16 – volume 3) para encontrá-lo: o método de descartes, o método da chave ou o algoritmo de Briot-Ruffini. Pela praticidade e simplicidade, em todos os exemplos, utilizaremos o algoritmo de Briot-Ruffini (consulte a subseção 16.2.4 do volume 3).

4	6	-21	-12
	6	3	0

($6x+3$)

$$6x^2 - 21x - 12 = (6x + 3)(x - 4).$$

O outro polinômio $x^2 - 16$, podemos escrever como $(x + 4)(x - 4)$. Dessa forma,

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{6x^2 - 21x - 12}{x^2 - 16}\right) = \lim_{x\to 4} \frac{(6x + 3)\cancel{(x - 4)}}{(x + 4)\cancel{(x - 4)}} = \lim_{x\to 4} \frac{6x + 3}{x + 4} = \frac{6.4 + 3}{4 + 4} = \boxed{\frac{27}{8}}.$$

3º exemplo: Calcule o limite de $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^3-x^2-4x+3}{2x^2-4x+2}\right)$.

Solução: Verificando se $x = 1$ anula os polinômios.

$$\begin{cases} 2x^3 - x^2 - 4x + 3 = 2.1^3 - 1^2 - 4.1 + 3 = 2 - 1 - 4 + 3 = 0. \\ 2x^2 - 4x + 2 = 2.1^2 - 4.1 + 2 = 2 - 4 + 2 = 0. \end{cases}$$

Indeterminação 0/0, portanto, os dois polinômios são divisíveis por $x - 1$. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

1	2	-1	-4	+3
	2	1	-3	0

($2x^2+x-3$)

$$2x^3 - x^2 - 4x + 3 = (2x^2 + x - 3)(x - 1).$$

1	2	-4	+2
	2	-2	0

($2x-2$)

$$2x^2 - 4x + 2 = (2x - 2)(x - 1).$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2x^3-x^2-4x+3}{2x^2-4x+2}\right)=\frac{(2x^2+x-3)(\cancel{x-1})}{(2x-2)(\cancel{x-1})}=\frac{2x^2+x-3}{2x-2}=\frac{2.1^2+1-3}{2.1-2}=\frac{0}{0}=?$$

Ainda há uma indeterminação. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini novamente em $2x^2+x-3$, encontramos $(2x+3)(x-1)$ e $2x-2=2(x-1)$. Logo,

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2x^3-x^2-4x+3}{2x^2-4x+2}\right)=\frac{2x^2+x-3}{2x-2}=\frac{(2x+3)(\cancel{x-1})}{2(\cancel{x-1})}=\frac{2x+3}{2}=\frac{2.1+3}{2}=\boxed{\frac{5}{2}}.$$

4º exemplo: Calcule o limite de $\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right)$.

Solução: Observe que $x=a$ anula os dois polinômios, assim de acordo com o algoritmo de Briot-Ruffini, dispomos de:

a	1	0	0	0	0	...	0	$-a^n$
	1	a	a^2	a^3	a^4	...	a^{n-1}	0

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{(x^{n-1}+a.x^{n-2}+a^2.x^{n-3}+a^3.x^{n-4}+a^4.x^{n-5}+\ldots+a^{n-1})(\cancel{x-a})}{\cancel{x-a}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=a^{n-1}+a.a^{n-2}+a^2.a^{n-3}+a^3.a^{n-4}+a^4.a^{n-5}+\ldots+a^{n-1}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\underbrace{a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\ldots+a^{n-1}}_{n\ vezes}=\boxed{n.a^{n-1}}.$$

EXERCÍCIOS 18.3

1) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)$

b) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{4x^2-1}{2x-1}\right)$

c) $\lim_{x\to \frac{-3}{2}}\left(\frac{4x^2-9}{2x+3}\right)$

d) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right)$

e) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^2-5x-7}{x+1}\right)$

f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{11x^2-2x-9}{x^2-2x+1}\right)$

g) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{-3x^2-x+14}{2x^2-8x+8}\right)$

h) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$

i) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^3+1}{x^2-1}\right)$

j) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right)$

k) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^4-3x^2-3x+2}{x^2-3x+2}\right)$

l) $\lim_{x\to -5}\left(\frac{x^3+125}{x^2+6x+5}\right)$

m) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^5+1}{x+1}\right)$

n) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^4-9x+2}{x^3-2x^2}\right)$

o) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^3-3x^2+3x-1}{3x^3-8x^2+7x-2}\right)$

p) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{2x^3+3x^2-1}{5x^3+12x^2+9x+2}\right)$

q) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-3x^2+4}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}\right)$

r) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x^4-5x^3+3x^2+x-1}{x^4-8x^3+18x^2-16x+5}\right)$

2) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to b}\left(\frac{x^2-b^2}{x-b}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x^4-a^4}{x^2-a^2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x^m-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}\right)$

18.4.2. Limite da função racional envolvendo radicais

Quando a função racional $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ possuir radicais ($\sqrt[n]{\ }$) seja em $p(x)$ e/ou $q(x)$ e houver uma indeterminação na forma 0/0, é preciso racionalizar ou "desracionalizar" a função para obter o limite. Para aplicar esse processo é preciso ter em mente os seguintes produtos notáveis:

I. $(a+b).(a-b)=\boxed{a^2-b^2}$ (Produto da soma pela diferença);

II. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=\boxed{a^3+b^3}$ (soma de dois cubos);

III. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=\boxed{a^3-b^3}$ (diferença de dois cubos).

Assim, quando a função racional apresentar raiz quadrada, devemos pensar no produto notável I e caso apresente raiz cúbica, devemos pensar nos produtos notáveis II ou III.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}\right)$

Solução: Substituindo x por 2: $\frac{\sqrt{7+2}-3}{2.2-4}=\frac{3-3}{4-4}=\frac{0}{0}$ (indeterminação do tipo 0/0).

Segundo o produto notável I: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. Nesse entendimento, devemos multiplicar o numerador e o denominador da função por $\sqrt{7+x}+3$, ou seja, pelo conjugado de $\sqrt{7+x}-3$ (mesma expressão com sinal do meio trocado), pois

$$\left(\underbrace{\sqrt{7+x}}_{a}-\underbrace{3}_{b}\right).\left(\underbrace{\sqrt{7+x}}_{a}+\underbrace{3}_{b}\right)=\underbrace{7+x}_{a^2}-\underbrace{9}_{b^2}=x-2.$$

Assim,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}.\frac{\sqrt{7+x}+3}{\sqrt{7+x}+3}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{2x-4(\sqrt{7+x}+3)}\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{2(x-2)(\sqrt{7+x}+3)}\right)=\frac{1}{2(\sqrt{7+2}+3)}=\frac{1}{2(\sqrt{9}+3)}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}\right)=\frac{1}{12}}.$$

Outra solução: Esse método consiste em utilizar uma incógnita auxiliar. Fazendo

$$\sqrt{7+x}=y\quad\Rightarrow\sqrt{7+x}=y\quad\Rightarrow\quad 7+x=y^2\Rightarrow\boxed{x=y^2-7}.$$

Se $x\to 2$, então $y\to\sqrt{7+x}=\sqrt{7+2}=3$. Nesse sentido,

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}\right)=\lim_{y\to 3}\left(\frac{y-3}{2(y^2-7)-4}\right)=\lim_{y\to 3}\left(\frac{y-3}{2y^2-14-4}\right)\Rightarrow$$

$$=\lim_{y\to 3}\left(\frac{y-3}{2y^2-18}\right)=\lim_{y\to 3}\left(\frac{y-3}{2(y^2-9)}\right)=\lim_{y\to 3}\left(\frac{y-3}{2(y+3)(y-3)}\right)=\lim_{y\to 3}\left(\frac{1}{2(y+3)}\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}\right)=\lim_{y\to 3}\left(\frac{1}{2(y+3)}\right)=\boxed{\frac{1}{12}}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{7+x}-3}{2x-4}\right)=\frac{1}{12}}.$$

2º exemplo: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{10x-1}-3}\right)$

Solução: Substituindo x por 1: $\frac{\sqrt{3.1+1}-2}{\sqrt{10.1-1}-3}=\frac{\sqrt{4}-2}{\sqrt{9}-3}=\frac{0}{0}$ (indeterminação).

Como o numerador e o denominador apresentam raízes quadradas, devemos multiplicar a função (em cima e embaixo) por $\sqrt{3x+1}+2$ e também por $\sqrt{10x-1}+3$ (conjugados respectivos das expressões). Da seguinte forma:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{10x-1}-3}\right)\left(\frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}\right)\left(\frac{\sqrt{10x-1}+3}{\sqrt{10x-1}+3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+1-4}{10x-1-9}\right)\left(\frac{\sqrt{10x-1}+3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x-3}{10x-10}\right)\left(\frac{\sqrt{10x-1}+3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{3(x-1)}{10(x-1)}\right)\left(\frac{\sqrt{10x-1}+3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{10x-1}+3}{\sqrt{3x+1}+2}\right)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{10.1-1}+3}{\sqrt{3.1+1}+2}\right)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{4}+2}\right)=\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{6}{4}\right)=\boxed{\frac{9}{20}}.$$

3º exemplo: $\lim_{x\to 27}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{3x}-9}\right)$

Solução: Substituindo x por 27: $\frac{\sqrt[3]{27}-3}{\sqrt{3.27}-9}=\frac{3-3}{\sqrt{81}-9}=\frac{0}{0}$ (indeterminação).

Como $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ (produto notável III), podemos fazer $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=3$, e em seguida multiplicar o numerador e o denominador da função por (a^2+ab+b^2), ou seja, por $\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}.3+3^2\right)=(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)$. Assim:

$$\lim_{x\to 27}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{3x}-9}\right)=\lim_{x\to 27}\left(\frac{\overbrace{\sqrt[3]{x}}^{a}-\overbrace{3}^{b}}{\sqrt{3x}-9}\right).\left(\frac{\overbrace{\sqrt[3]{x^2}}^{a^2}+\overbrace{3.\sqrt[3]{x}}^{a.b}+\overbrace{9}^{b^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9}\right)$$

$$\lim_{x\to 27}\left(\frac{\overbrace{(\sqrt[3]{x})^3}^{a^3}-\overbrace{3^3}^{b^3}}{(\sqrt{3x}-9)(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\right)=\boxed{\lim_{x\to 27}\left(\frac{x-27}{(\sqrt{3x}-9)(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\right)}.$$

Ainda há indeterminação 0/0 (verifique!). Multiplicando pelo conjugado de $\sqrt{3x}-9$, que neste caso é $\sqrt{3x}+9$, obtemos:

$$=\lim_{x\to 27}\left(\frac{x-27}{(\sqrt{3x}-9)(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\left(\frac{\sqrt{3x}+9}{\sqrt{3x}+9}\right)\right)=\lim_{x\to 27}\left(\frac{(x-27).(\sqrt{3x}+9)}{(3x-81)(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\right)$$

$$\lim_{x\to 27}\left(\frac{(x-27).(\sqrt{3x}+9)}{3(x-27)(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\right)=\lim_{x\to 27}\left(\frac{(\sqrt{3x}+9)}{3(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 27}\left(\frac{\sqrt{3x}+9}{3(\sqrt[3]{x^2}+3.\sqrt[3]{x}+9)}\right)=\frac{\sqrt{3.27}+9}{3(\sqrt[3]{27^2}+3.\sqrt[3]{27}+9)}=\frac{\sqrt{81}+9}{3(\sqrt[3]{729}+3.\sqrt[3]{27}+9)}=$$

$$\frac{18}{3(9+3.3+9)}=\frac{18}{3(27)}=\frac{18}{81}=\boxed{\frac{2}{9}}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 27}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-3}{\sqrt{3x}-9}\right)=\frac{2}{9}}.$$

4º exemplo: $\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}\right)$

Solução: Substituindo x por -1: $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}=\frac{1-1}{-1+1}=\frac{0}{0}$.

De acordo a expressão do numerador, devemos multiplicar a função, tanto em cima como embaixo, por $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{2x^2+x}$.

$$\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}.\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{2x^2+x}}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{x^2+4x+4-(2x^2+x)}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}=\boxed{\frac{-x^2+3x+4}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}}.$$

Quanto ao denominador, como $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ (produto notável II), podemos fazer $a=\sqrt[3]{4x^2+8x+3}$ e $b=1$ e, em seguida, multiplicar a função também em cima e embaixo, por (a^2-ab+b^2), isto é, por $\left(\sqrt[3]{(4x^2+8x+3)^2}-\sqrt[3]{4x^2+8x+3}.1+1^2\right)$. Da seguinte forma:

$$\frac{-x^2+3x+4}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}.\left(\frac{\sqrt[3]{(4x^2+8x+3)^2}-\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}{\sqrt[3]{(4x^2+8x+3)^2}-\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}\right)=$$

$$\frac{-x^2+3x+4.\left(\sqrt[3]{(4x^2+8x+3)^2}-\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1\right)}{4x^2+8x+3+1}=$$

$$\boxed{\frac{-x^2+3x+4}{4x^2+8x+4}.\left(\sqrt[3]{(4x^2+8x+3)^2}-\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1\right)}\ (1).$$

Nesse ponto, apenas a expressão $\frac{-x^2+3x+4}{4x^2+8x+4}$ resulta em 0/0 ao substituir x por -1. Vamos aplicar então, o algoritmo de Briot-Ruffini:

-1	-1	3	4
	$\underbrace{-1}_{-x+4}$	4	0

$$-x^2+3x+4=(-x+4)(x+1).$$

-1	4	8	4
	$\underbrace{4}_{4x+4}$	4	0

$$4x^2+8x+4=(4x+4)(x+1).$$

Substituindo em (1), encontramos

$$\frac{(-x+4)(x+1)}{(4x+4)(x+1)}\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{(4x^2+8x+3)^2}-\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}{\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{2x^2+x}}\right).$$

Agora, apenas a expressão $(4x+4)$ anula ao substituir x por -1. Vamos deixá-la como está e substituir x por -1 nas demais expressões.

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{5}{(4x+4)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{5}{8x+8}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\frac{5}{8x+8}\right)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{5}{8x+8}\right)=+\infty\end{cases}.$$

Dessa forma, $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{2x^2+x}}{\sqrt[3]{4x^2+8x+3}+1}\right)$ não existe.

EXERCÍCIOS 18.4

1) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{\sqrt{4+x}-3}{2x-10}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to6}\left(\frac{\sqrt{3x+7}-5}{3x-18}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{7-4x}}{2x-2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{7\sqrt{4x-15}-\sqrt{9x+13}}{x-4}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-\sqrt{2x-1}}{x^2-1}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{2-x^2}-\sqrt{2-x}}{x^2-1}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{x^2-9}{5-\sqrt{8x+1}}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{7x-6}-\sqrt{x^2-3x+3}}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-4}{\sqrt{2x^2-4x}}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{\sqrt{3x+7}-4}{\sqrt{10x+6}-6}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to5}\left(\frac{\sqrt{5x}-5}{\sqrt{2x-1}-3}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{3x+9}-\sqrt{2x+9}}{\sqrt{x+1}-1}\right)$

q) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-2}}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x-4}-\sqrt{x^2-2x+2}}{\sqrt{2x^2+2}-\sqrt{3x^2+1}}\right)$

s) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{-x^2-2x}}{\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{4x^2-3}}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to8}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to27}\left(\frac{\sqrt{3x}-9}{\sqrt[3]{x}-3}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\sqrt[3]{-3x+5}+1}{\sqrt[3]{4x}-2}\right)$

w) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[3]{-x+9}-2}{\sqrt[3]{8x}-2}\right)$

x) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{\sqrt[3]{-x^2+5x-2}+2}{\sqrt[3]{8x^2-16x+3}-3}\right)$

y) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}\right)$

18.4.3. Limite infinito da função racional

Finalizamos com os limites de funções racionais com a forma $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ em que $q(a) = 0$ e $p(a) \neq 0$. Para este caso, três situações podem ocorrer.

1ª situação: o $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$ não existe.

Exemplo: $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)$.

Solução:

- Quando x se aproxima (tanto quanto se deseje) de valores menores que 2, ou seja, pela esquerda, a expressão $x - 2$ será negativa e tão próxima de zero ($\cong -0$) quanto a imaginarmos. Enquanto, a expressão $x + 1$ será próxima de 3 (positiva). Desse modo

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\cong +3}{\cong -0} = -\infty.$$

- Quando x se aproxima (tanto quanto se queira) de valores maiores que 2 (ou à direita), a expressão $x - 2$ será positiva e tão próxima de zero quanto se imagine ($\cong +0$). E a expressão $x + 1$ será próxima de 3 ($\cong +3$). Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} \left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\cong +3}{\cong +0} = +\infty.$$

Nessa análise, o $\lim_{x\to 2} \left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ não existe.

Veja no gráfico dessa função na figura 18.4.3.1, que quando essa se aproxima de 2 pela esquerda e pela direita, o gráfico segue para o $-\infty$ e o $+\infty$, respectivamente.

2ª situação: o $\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = +\infty$.

Exemplo: $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right)$

Solução: Quando x se aproxima de 1 pela esquerda, a expressão $(x-1)^2$ será positiva e próxima de zero. Enquanto a expressão x será muito próxima de 1. O mesmo ocorre, quando x se aproxima de 1 pela direita. Dessa maneira

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right) = \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{(x-1)^2}\right) = \frac{\cong +1}{\cong +0} = +\infty.$$

Perceba pelo gráfico dessa função na figura 18.4.3.2, que a função segue para o $+\infty$ ao se aproximar tanto pela esquerda quanto pela direita de 1.

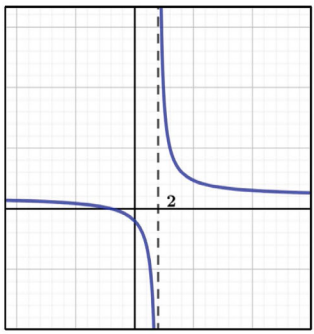


Figura 18.4.3.1

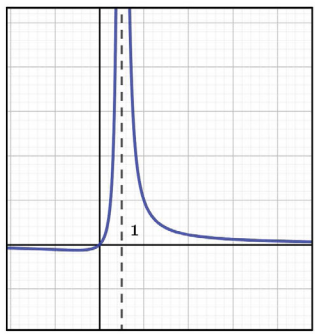


Figura 18.4.3.2

3ª situação: o $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)} = -\infty$.

Exemplo: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{-1}{(x-3)^2}\right)$

Solução: Quando x se aproxima de 3 pela esquerda, a expressão $(x-3)^2$ será positiva e tão próxima de zero quanto desejarmos. Como o numerador é negativo, o limite dessa função será o menos infinito (-∞). O mesmo ocorre quando x se aproxima de 3 pela direita. Dessa forma, a função segue para menos infinito tanto à esquerda quanto à direita de $x = 3$, isto é

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{-1}{(x-3)^2}\right) = \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{-1}{(x-3)^2}\right) = -\infty.$$

O gráfico dessa função na figura 18.4.3.3 justifica esse limite.

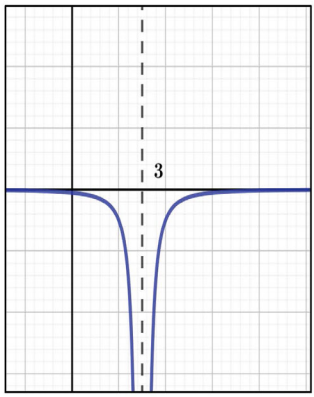


Figura 18.4.3.3

Caso o limite de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tenham com resultado $+\infty$ ou $-\infty$, algumas propriedades são válidas. Veja a seguir.

Propriedades dos limites infinitos: Dados $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ temos que,

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$;

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$;

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = +\infty$;

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = -\infty$;

Se $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim_{x\to a}(f.g)(x) = +\infty$;

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, então $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$;

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, então $\lim_{x\to a} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

Observação: Não devemos conceber a ideia de infinito como um número e sim como algo que pode ser aumentado ou diminuído, continuado ou estendido, tanto quanto se deseje. Portanto, nada podemos afirmar, antecipadamente, sobre o resultado das expressões $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\pm\infty \times 0$.

Exemplo: Sejam os limites $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}\right)}$ e $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{-x^2}\right)}$.

A soma será $\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}\right) + \left(\frac{n}{-x^2}\right) = \frac{5-n}{x^2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{5-n}{x^2}\right)}$ (3)

Se $n = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}\right) = +\infty$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{-x^2}\right) = -\infty$ e a soma (3) será $+\infty$;

Se $n = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}\right) = +\infty$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{-x^2}\right) = -\infty$ e a soma (3) será indeterminada 0/0;

Se $n = 6 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}\right) = +\infty$, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{n}{-x^2}\right) = -\infty$ e a soma (3) será $-\infty$.

Portanto, nada podemos afirmar sobre $+\infty + (-\infty)$.

2º exemplo: Os limites $\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{-x^2}\right)}$ e $\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^4}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{-x^2}\right)}$ teoricamente significam $\frac{+\infty}{-\infty}$, porém apresentam resultados diferentes. Veja:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{-x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^2}.\frac{-x^2}{1}\right) = -5$$

e

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{5}{x^4}}{\frac{1}{-x^2}}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5}{x^4}.\frac{-x^2}{1}\right) = -\frac{5}{x^2} = -\infty.$$

O caso $\pm\infty \times 0$, fica para o leitor elaborar um exemplo.

Concluímos então, que as expressões $+\infty + (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ e $\pm\infty \times 0$ são também indeterminações, assim como 0/0. Outras indeterminações em forma de potência como 0^0, $\pm\infty^0$ e 1^∞ serão estudadas na subseção 20.5.5 (Regra de L'Hospital).

EXERCÍCIOS 18.5

1) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1-2x}{x-2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{1-2x}{x-2}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1-2x}{x-2}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{-x}{6-2x}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{-x}{6-2x}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{-x}{6-2x}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to 0{,}5^+}\left(\frac{x}{1-2x}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to 0{,}5^-}\left(\frac{x}{1-2x}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to 0{,}5}\left(\frac{x}{1-2x}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\frac{1}{(x-4)^2}\right)$

q) $\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{(x-4)^2}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{(x-4)^2}\right)$

s) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{7x-1}{(-2-x)^2}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{9x^2-13x-2}{x^2}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x-3}{|x+1|}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x^2+5x-3}{(x-1)^3}\right)$

w) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{|-3x+12|}{(x-5)^3}\right)$

x) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\frac{|-3x+12|}{|(x-5)^3|}\right)$

2) Para que valor(es) real(is) de n temos:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{n}{1-nx}\right)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^n}\right)=-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^n}\right)=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^n}\right)=\nexists$

3) Marque V para verdadeiro e F para falso, nas seguintes afirmações:

a) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=0$;

b) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=0$;

c) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=-\infty$;

d) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=-\infty$;

e) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, então $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=0$;

f) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, então $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x)=+\infty$;

g) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$;

h) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, então $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=+\infty$;

i) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=-\infty$;

j) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$, então $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=1$;

k) ( ) Se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ e $n>0$, então $\lim\limits_{x\to a} n.f(x)=+\infty$.

18.5. Limites no infinito

Nesta seção, resolveremos limites em que $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$, chamados de limites no infinito. Para resolver esses limites, usaremos basicamente três teoremas. Os dois primeiros são óbvios e não precisam de demonstração, e o terceiro é aplicado para funções polinomiais.

Teorema 18.5.1: Se n é um número inteiro e positivo, então: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Exemplo: Vamos calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}$.

Solução:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} 1}_{1} + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}}_{0} = 1.$$

Essa informação é ratificada pelo gráfico da função na figura 18.5.1 e sua assíntota horizontal em $y = 1$.

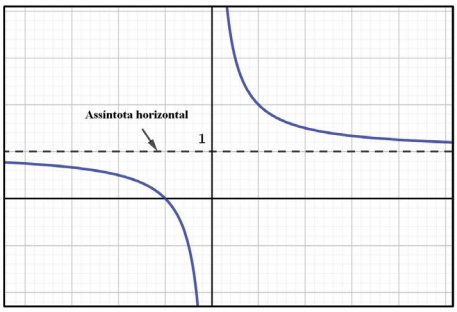


Figura 18.5.1

SAIBA MAIS!

Assíntota horizontal é uma reta de equação $y = b$, onde o gráfico da função se aproxima (mas nunca intersecta) quando x tende ao infinito, ou seja, quando $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ acontece.

Teorema 18.5.2: Se n é um número inteiro e positivo, então

$$\text{I. } \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty.$$

$$\text{II. } \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ se } n \text{ for par} \\ -\infty \text{ se } n \text{ for ímpar} \end{cases}.$$

Exemplo: Analisemos as funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$ no infinito.

$f(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$ (ver figura 18.5.2).

$f(x) = x^3 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{cases}$ (ver figura 18.5.3).

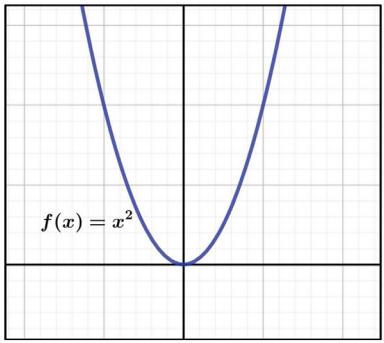


Figura 18.5.2

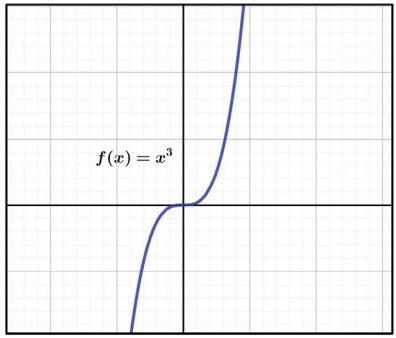


Figura 18.5.3

Teorema 18.5.3 (limite no infinito da função polinomial): O limite no infinito da função polinomial $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ é o mesmo limite correspondente ao seu termo de maior grau, isto é

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n) = \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} a_nx^n}$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n) = \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} a_nx^n}$.

Demonstração: Pondo em evidência a_nx^n na função polinomial, temos

$$\lim_{x\to+\infty} a_nx^n\left(\frac{a_0}{\underbrace{a_nx^n}_{0}} + \frac{a_1}{\underbrace{a_nx^n}_{0}}x + \frac{a_2}{\underbrace{a_nx^n}_{0}}x^2 + \frac{a_3}{\underbrace{a_nx^n}_{0}}x^3 + \cdots + 1\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} a_nx^n(0 + 0 + 0 + 0 + \cdots + 1) = \lim_{x\to+\infty} a_nx^n.$$

Esse teorema e os passos de sua demonstração nos mostram duas maneiras de resolver limite no infinito de uma função polinomial: usando o termo de maior grau e ignorando os outros termos ou colocando o termo de maior grau em evidência para, em seguida, aplicar o teorema 18.5.1. Como a primeira alternativa é consequência da segunda, essa será a mais utilizada.

1º modelo de exemplos:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (7x^2 - 2x + 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} 7x^2 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x^2 + 11x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (9x^4 + x^3 - 3x^2 + 1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 9x^4 = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^3 - x^2 + 8x - 9) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$.

Foram utilizados somente os termos de maior grau e desprezados os demais termos da função.

2º modelo de exemplos:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x-11}{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x}{2x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2=2.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x+5}{2x^3-6x+4}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2x^3}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)=0.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{11x^3-x+1}{-x^2-13x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{11x^3}{-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{11x}{-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}-11x=+\infty.$

Foram utilizados somente os termos de maior grau e desprezados os demais termos da função.

3º modelo de exemplos (indeterminação do tipo $\pm\infty$ x 0):

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((8x^2-2)\left(\frac{1}{2x-1}\right)\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^2-2).\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x-1}\right)\infty$ x 0?

Utilizando somente os termos de maior grau, temos

$\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^2-2).\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(8x^2).\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x}\right)=+\infty\times 0.\Leftarrow$ Indeterminação!

Vamos unir os produtos e verificar se a indeterminação persiste.

$$\lim_{x\to-\infty}\left((8x^2)\left(\frac{1}{2x}\right)\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8x^2}{2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}(4x)=\boxed{-\infty}.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((5x+3)\left(\frac{x}{3x^2-2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+3).\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{3x^2-2}\right)=\infty$ x 0?

Utilizando somente os termos de maior grau e unindo os termos, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left((5x)\left(\frac{x}{3x^2}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5x^2}{3x^2}\right)=\boxed{\frac{5}{3}}.$$

4º modelo de exemplos (indeterminação do tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$):

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2-10x}}{x+1}\right)=\left(\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2-10x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}x+1}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}\Leftarrow$ Indeterminação!

Vamos colocar x^2 do numerador e o x do denominador, respectivamente, em evidência, da seguinte maneira

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2\left(2-\frac{10}{x}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2(2-0)}}{x(1+0)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}|x|}{x}\right)=\sqrt{2}.$$

Atenção!!! $\sqrt{x^2}=|x|$

Veja no gráfico da função $\frac{\sqrt{2x^2-10x}}{x+1}$ na figura 18.5.4, a assíntota horizontal em $\sqrt{2}$.

Outra solução seria utilizar somente o termo de maior grau do numerador e do denominador como de praxe. Veja a seguir.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2}|x|}{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2} & se\ x\geq 0\\ \dfrac{\sqrt{2}(-x)}{x}=-\sqrt{2}\ se\ x<0\end{cases}.$$

Desse modo, $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2-10x}}{x+1}\right)=\sqrt{2}$ e caso o limite a ser calculado fosse $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{2x^2-10x}}{x+1}\right)$ seu valor seria obviamente $-\sqrt{2}$.

Veja a assíntota horizontal nessa função em $-\sqrt{2}$ na figura 18.5.4.

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4-8x^2+2}}{3x^2-x+1}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}\Leftarrow$ Indeterminação!

Vamos colocar x^4 do numerador e o x^2 do denominador, respectivamente, em evidência, dispomos de

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4\left(1-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}}{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4(1-0+0)}}{x^2(3-0+0)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4}}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3x^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Outra solução, utilizando somente os termos de maior grau de cada polinômio:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4}}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{3x^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Interessante observar que se o limite fosse $x\to-\infty$, o resultado seria o mesmo. Veja:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^4}}{3x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{3x^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

Isso é corroborado pelo gráfico da função na figura 18.5.5.

5º modelo de exemplos (indeterminação do tipo $+\infty-\infty$):

- $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+2}-x\right)=(+\infty)-(+\infty)\Leftarrow$ Indeterminação!

Para obtermos o limite nesse modelo é preciso multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado da expressão, nesse caso, por $\sqrt{x^2-5x+2}+x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+2}-x\right).\left(\frac{\sqrt{x^2-5x+2}+x}{\sqrt{x^2-5x+2}+x}\right)=\frac{x^2-5x+2-x^2}{\sqrt{x^2-5x+2}+x}=\frac{-5x+2}{\sqrt{x^2-5x+2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+2}-x\right)=\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x+2}{\sqrt{x^2-5x+2}+x}\right)}.$$

O limite ficou de acordo com 3º modelo. Vamos colocar x^2 do denominador e o x do numerador, respectivamente, em evidência. Caso o leitor prefira, alternativamente, pode

escolher os termos de maior grau de cada polinômio.

Atenção!!!
$\sqrt{x^2} = |x|$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(-5+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(-5+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(-5+0)}{\sqrt{x^2(1-0+0)}+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x}{|x|+x}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x}{x+x}\right) \text{ se } x \geq 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x}{-x+x}\right) \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5x}{x(1+1)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-5}{1+1}\right) = \boxed{\frac{-5}{2}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+2}-x\right) = \frac{-5}{2}}.$$

Observação: Caso o limite fosse $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-5x}{-x+x}\right)$, teríamos uma indeterminação $\frac{+\infty}{+\infty-\infty}$.

Porém, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+2}-x\right) = +\infty-(-\infty) = +\infty+\infty = +\infty$. Essa informação pode ser averiguada no gráfico da função que está na figura 18.5.6.

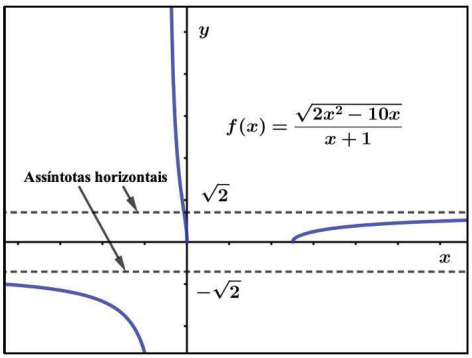


Figura 18.5.4

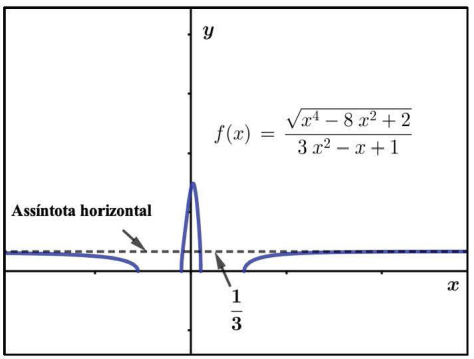


Figura 18.5.5

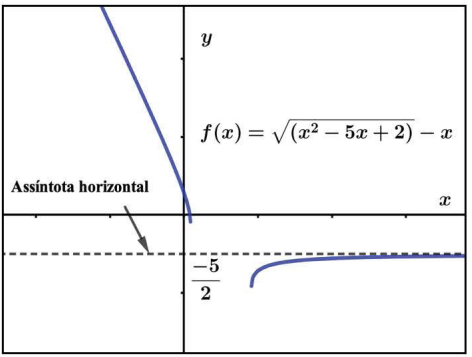


Figura 18.5.6

EXERCÍCIOS 18.6

1) Calcule os limites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-5x+1)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-6x+3)$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-7x^3-12x^2+15)$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(12x^4-10x^3-13x+2)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{-12x^5+2x-1}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-6x-13}{5x+10}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{5-4x}{7-8x}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{-x^2-4x-8}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4x}{-x^3-x^2-30}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+2x^2-9}{(x-1)^3}\right)$

k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2-9)^4}{(2x-1)^3}\right)$

l) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)^2}{(2x+1)^2}\right)$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{(11x-4)^3}{x(x-3)(x-1)}\right)$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)$

o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)$

p) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2-15}}{3x-2}\right)$

q) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2-15}}{3x-2}\right)$

r) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{16x^2-1}}{x-2}\right)$

s) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x^2-3}{\sqrt{x^4-1}}\right)$

t) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{16x^4-7}}\right)$

u) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt[4]{16x^4-7}}\right)$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{1-x\sqrt{x}}\right)$

w) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}-3}\right)$

x) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+4}\right)$

y) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{2x}-\sqrt{x}\right)^2}{(\sqrt{x}-1)^3}\right)$

z) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x^2-1)\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)$

2) Calcule os limites.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+2}-x\right)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-7x+1}+x\right)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+mx+n}-x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-3x-1}-2x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{-x+5}-\sqrt{-x-5}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2+2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{x^2-x+3}+x}\right)$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{9x^2-6x+16}-3x}{x-\sqrt{x^2+3x-1}}\right)$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{27x^3-x^2+x-8}-3x}{x-\sqrt{x^2+5x}}\right)$

18.6. Limites fundamentais

Os limites que vamos estudar nesta seção são fundamentais não apenas para a análise e desenvolvimento de outros limites, mas também como base para o estudo do cálculo diferencial e integral.

Antes dos limites fundamentais propriamente ditos, precisamos de um importante teorema.

Teorema 18.6.1 (Teorema do confronto ou teorema do sanduíche): Se $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ e se f é tal que $g(x) < f(x) < h(x)$ para todo intervalo $x \in I - \{a\}$, em que I é intervalo aberto que contém a, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Demonstração: Se $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$< 0|x-a| < \delta_1 \Rightarrow \ |g(x) - L| < \epsilon \ \Rightarrow \ \boxed{L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon}.$$

$$< 0|x-a| < \delta_2 \Rightarrow \ |h(x) - L| < \epsilon \ \Rightarrow \ \boxed{L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon} +$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos $\forall\, \epsilon > 0$ um $\delta > 0$, tal que

$$< 0|x-a| < \delta \ \Rightarrow L - \epsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \epsilon \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon \ \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L}.$$

Esse teorema serve como recurso para várias demonstrações envolvendo limites.

18.6.1. Limites trigonométricos

Teorema 18.6.1.1 (limite trigonométrico fundamental):

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1.$$

Demonstração: Pela imagem do primeiro quadrante do ciclo trigonométrico na figura 18.6.1.1, podemos ver que $sen\, x < x < tgx$.

Invertendo essa desigualdade, temos

$$\frac{1}{\frac{sen\, x}{cosx}} < \frac{1}{x} < \frac{1}{sen\, x} \Rightarrow \frac{cosx}{sen\, x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{sen\, x}.$$

Multiplicando tudo por $sen\, x$, encontramos

$$cosx < \frac{sen\, x}{x} < 1.$$

Aplicando o limite à direita, obtemos

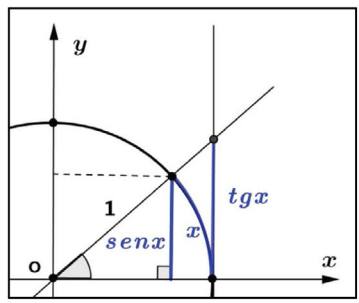


Figura 18.6.1.1

$$\lim_{x\to 0^+} \cos x < \lim_{x\to 0^+} \frac{sen\ x}{x} < \lim_{x\to 0^+} 1 \Rightarrow \boxed{1 < \lim_{x\to 0^+} \frac{sen\ x}{x} < 1}.$$

Aplicando agora, o limite à esquerda:

$$\lim_{x\to 0^-} \cos(-x) < \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\ (-x)}{-x} < \lim_{x\to 0^-} 1 \Rightarrow \boxed{1 < \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\ x}{x} < 1}.$$

Pelo teorema do confronto, concluímos que $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1}$.

Essa informação é ratificada pelo gráfico da função que está na figura 18.6.1.2.

Podemos generalizar esse teorema para uma função $f(x)$ qualquer, e não somente x, conforme o corolário a seguir.

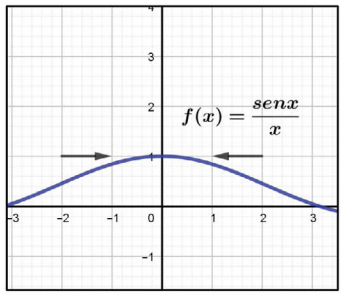


Figura 18.6.1.2

Corolário 18.6.1.1: Se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, então

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ [f(x)]}{f(x)} = 1.$$

Demonstração: Denominando $y = f(x)$, se $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, então $y \to 0$. Logo,

$$\lim_{y\to 0} \frac{sen\ y}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\ [f(x)]}{f(x)} = 1.$$

Teorema 18.6.1.2:

$$\lim_{x\to a} sen\ x = sen\ a \qquad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a \qquad \lim_{x\to a} tg\ x = tg\ a$$

Demonstração:

Da trigonometria temos que:

$$sen\ x - sen\ a = 2.sen\left(\frac{x-a}{2}\right).\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

Multiplicando por $\left(\frac{x-a}{2}\right)$, obtemos

$$sen\ x - sen\ a = \frac{2.sen\left(\frac{x-a}{2}\right).\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}.\left(\frac{x-a}{2}\right) \Rightarrow$$

$$sen\ x - sen\ a = \frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}.\cos\left(\frac{x+a}{2}\right).(x-a).$$

Aplicando o limite de $x \to a$ em ambos os membros, encontramos

$$\lim_{x\to a} [sen\ x - sen\ a] = \lim_{x\to a}\left[\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}.\cos\left(\frac{x+a}{2}\right).(x-a)\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a}[sen\,x - sen\,a] = \underbrace{\lim_{x\to a}\left[\frac{sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\left(\frac{x-a}{2}\right)}\right]}_{1\ (pelo\ corolário\ 18.6.1.1)} . \underbrace{\lim_{x\to a}\left[cos\left(\frac{x+a}{2}\right).(x-a)\right]}_{0} = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a}[sen\,x - sen\,a] = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} sen\,x = sen\,a}.$$

A demonstração de $\lim_{x\to a} cos\,x = cos\,a$ é análoga. Quanto à tangente, podemos fazer:

$$\lim_{x\to a} tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{\lim_{x\to a} sen\,x}{\lim_{x\to a} cos\,x} = \frac{sen\,a}{cos\,a} = tg\,a.$$

A seguir estão algumas identidades trigonométricas que, além dos teoremas e o corolário, podem ser úteis no desenvolvimento de limites trigonométricos.

Tabela 18.6.1.1 (identidades trigonométricas):

1. $\boxed{cos^2x + sen^2x = 1}$
2. $\boxed{cos2x = cos^2x - sen^2x}$
3. $\boxed{sen2x = 2.senx.cosx}$
4. $\boxed{tg2x = \frac{2.tgx}{1-tg^2x}}$
5. $\boxed{cosx = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$
6. $\boxed{senx = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$
7. $\boxed{sen\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{2}}} \Rightarrow \boxed{1 - cosx = 2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
8. $\boxed{cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+cosx}{2}}} \Rightarrow \boxed{1 + cosx = 2.cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
9. $\boxed{tg\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-cosx}{1+cosx}}} \Rightarrow \boxed{\frac{1-cosx}{1+cosx} = tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$
10. $\boxed{\cos x - \cos a = -2.sen\left(\frac{x+a}{2}\right).sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}$
11. $\boxed{sen\,x - sen\,a = 2.sen\left(\frac{x-a}{2}\right).cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}$
12. $\boxed{cos\,x + cos\,a = 2.sen\left(\frac{x+a}{2}\right).sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}$
13. $\boxed{sen\,x + sen\,a = 2.sen\left(\frac{x+a}{2}\right).cos\left(\frac{x-a}{2}\right)}$
14. $\boxed{tg\,x - tg\,a = \frac{sen(x-a)}{cos\,x\,.cos\,a}}$
15. $\boxed{cos(x + a) = cos\,x\,.cos\,a - sen\,x\,.sen\,a}$
16. $\boxed{cos(x - a) = cos\,x\,.cos\,a + sen\,x\,.sen\,a}$
17. $\boxed{sen(x + a) = sen\,x\,.cos\,a + cos\,x\,.sen\,a}$

As demonstrações dessas identidades trigonométricas estão na unidade 11 (volume 2) dessa coleção.

18. $\boxed{sen(x-a) = sen\,x\,.cos\,a - cos\,x\,.sen\,a}$

19. $\boxed{tg(x+a) = \frac{tg\,x + tg\,a}{1 - tg\,x\,.\,tg\,a}}$ 20. $\boxed{tg(x-a) = \frac{tg\,x - tg\,a}{1 + tg\,x\,.\,tg\,a}}$

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\,4x}{7x}$

Solução: Aplicando o limite do quociente $\frac{\lim\limits_{x\to 0}(sen\,4x)}{\lim\limits_{x\to 0}(7x)} = \frac{0}{0}$ ⇐ indeterminação.

Para resolver essa indeterminação, iremos utilizar o corolário 18.6.1.1. Nesse sentido, vamos multiplicar o denominador e o numerador por 4, com intuito de obtermos um denominador igual ao arco do seno. Da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\,4x}{7x}\cdot\frac{4}{4} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,4x}{4x}\cdot\frac{4}{7} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{sen\,4x}{4x}}_{1}\cdot\frac{4}{7} = \boxed{\frac{4}{7}}.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x.senx}$

Solução: Observe que há indeterminação 0/0 e o limite trigonométrico fundamental não envolve cosseno. Nesse caso, é viável utilizar a identidade trigonométrica 7: $\boxed{1 - cosx = 2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}$, com o intuito de substituir cosseno por seno. Da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x.senx} = \lim_{x\to 0} \frac{2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x.senx} = \lim_{x\to 0} \frac{2.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x.senx}\cdot\frac{x/4}{x/4} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{2}.sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2.senx} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{senx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{senx}{x}} \Rightarrow$$

$$\left[\underbrace{\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)}_{1}\right]^2\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\right)}{\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}}_{1}} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Uma solução alternativa seria multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do numerador, isto é, por $1 + cosx$. Do seguinte modo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x.senx}\cdot\frac{(1+cosx)}{(1+cosx)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-cos^2x}{x.senx.(1+cosx)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen^2x}{x.senx.(1+cosx)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x}\cdot\frac{1}{(1+cosx)} = \overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}}^{1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+cosx)} = \frac{1}{1+1} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2cosx}{\pi-3x}$

Solução: Observe que há indeterminação 0/0 e o artifício para esse caso, consiste em substituir $\frac{1}{2}$ por $cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e aplicar a identidade trigonométrica 10: $\boxed{\cos x - \cos a = -2.sen\left(\frac{x+a}{2}\right).sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2(\frac{1}{2}-cosx)}{\pi-3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2(cos\frac{\pi}{3}-cosx)}{\pi-3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\left(-2.sen\left(\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\right).sen\left(\frac{\frac{\pi}{3}-x}{2}\right)\right)}{\pi-3x} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\left(-2.sen\left(\frac{\pi+3x}{6}\right).sen\left(\frac{\pi-3x}{6}\right)\right)}{\pi-3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{2}{6}\left(-2.sen\left(\frac{\pi+3x}{6}\right).sen\left(\frac{\pi-3x}{6}\right)\right)}{\frac{\pi-3x}{6}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \underbrace{\frac{\left(sen\left(\frac{\pi-3x}{6}\right)\right)}{\frac{\pi-3x}{6}}}_{1} . \frac{2}{6}\left(-2.sen\left(\frac{\pi+3x}{6}\right)\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-2}{3}\left(sen\left(\frac{\pi+3x}{6}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-2}{3}\left(sen\left(\frac{\pi+3x}{6}\right)\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{-2}{3}\left(sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-2cosx}{\pi-3x} = \frac{-\sqrt{3}}{3}}.$$

EXERCÍCIOS 18.7

1) Calcule os limites.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 9x}{x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ 8x}{4x}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ ax}{bx}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\ x}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\ 3x}{2x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{tg\ ax}{bx}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{2-2cosx}{x}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx+senx}{x}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx+senx}{senx}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-senx}-\sqrt{1+senx}}{2x}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-sen\ x}}{x}$

l) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{sen\ x-\cos x}{1-tgx}\right)$

m) $\lim_{x\to\pi} \left(\frac{cos\ x-\cos\pi}{x-\pi}\right)$

n) $\lim_{x\to\pi} \left(\frac{sen\ x-sen\ \pi}{x-\pi}\right)$

o) $\lim_{x\to\pi} \left(\frac{\pi-x}{sen\ x}\right)$

p) $\lim_{x\to+\infty} \left(x.sen\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

18.6.2. Limites das funções exponencial e logarítmica

A seguir, apresentaremos as propriedades dos limites envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. Como essas propriedades são intuitivas e fáceis de compreender, não apresentaremos as demonstrações.

Seja $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, tem-se:

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \qquad \lim_{x \to b} a^x = a^b \qquad \lim_{x \to b} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \to b} f(x)}$$

$$\lim_{x \to 1} (\log_a x) = 0 \qquad \lim_{x \to b} (\log_a x) = \log_a b$$

$$\lim_{x \to b} (\log_a f(x)) = \log_a \left(\lim_{x \to b} f(x) \right)$$

Se $a > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$$

Se $0 < a < 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$$

Vimos na unidade sobre os logaritmos naturais (seção 9.5 - volume 1) que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende ao $+\infty$ possui como limite o valor $\boxed{e = 2{,}7182818284\ldots}$, ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Agora, vamos demonstrar que essa mesma expressão quando n tende ao $-\infty$ também tem como limite o mesmo valor e.

Fazendo $n = -(x+1)$, temos $x = -n+1$ e se $n \to -\infty$, então $x \to +\infty$, substituindo, encontramos

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{(x+1)}\right)^{-(x+1)}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x}.\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}}_{e}.\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{1}=e.1=e.$$

Veja no gráfico da figura 18.6.2.1 que a função tem como limite o valor e tanto para $x\to+\infty$ como para $x\to-\infty$.

Outra expressão com n tendendo a zero, com o mesmo limite e, pode ser encontrada usando uma incógnita auxiliar: $x=\frac{1}{n}$. Dessa forma, se $n\to+\infty$, então $x\to 0$. Substituindo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.}$$

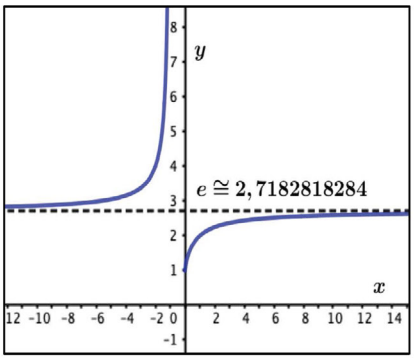


Figura 18.6.2.1

Agora, vamos a outra importante expressão de limite fundamental.

Seja $a\in\mathbb{R}$ e $0<a\neq1$, fazendo $a^x-1=k\Rightarrow a^x=k+1$, temos:

$$ln\,a^x=ln(k+1)\Rightarrow\ x.ln\,a=ln(k+1)\ \Rightarrow x=\frac{ln(k+1)}{ln\,a}.$$

Substituindo em $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$, obtemos

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{k\to0}\frac{k}{\frac{ln(k+1)}{ln\,a}}=\lim_{k\to0}\frac{k.ln\,a}{ln(k+1)}=\lim_{k\to0}\frac{ln\,a}{\frac{ln(k+1)}{k}}\Rightarrow$$

$$\lim_{k\to0}\frac{ln\,a}{ln(k+1)^{1/k}}=\frac{ln\,a}{\lim_{k\to0}ln(k+1)^{1/k}}=\frac{ln\,a}{ln\,e}=ln\,a.$$

Logo,

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=ln\,a.}$$

Como exemplo, veja no gráfico da função $f(x)=\frac{2^x-1}{x}$, que está na figura 18.6.2.2, que o $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}=ln\,2\cong0{,}693147$.

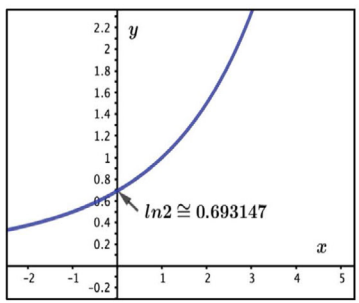


Figura 18.6.2.2

Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 3} 3^x = 3^3 = 27.$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{x^2-x} = 2^{+\infty} = +\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x^2-4}{x-2}}$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\lim\limits_{x\to 2} x+2} = \boxed{\left(\frac{1}{e}\right)^4}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\log_2 x\right) = \lim\limits_{x\to 8}\left(\log_2 8\right) = 3.$

e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\log_5 \frac{x^2+3x-4}{x-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\log_5 \frac{(x+4)(x-1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}(\log_5(x+4)) = \lim_{x\to 1}(\log_5(1+4)) = \lim_{x\to 1}(\log_5 5) = \boxed{1}.$$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}$

Fazendo $\frac{a}{x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{x = ay}$. Se $x \to +\infty$ então, $y \to +\infty$, caso $a > 0$. Se $x \to +\infty$, então $y \to -\infty$, caso $a < 0$. Mas isso tanto faz, pois ambos os limites são iguais a e. Substituindo no limite, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{bay} = \left[\underbrace{\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}_{e}\right]^{ba} = \boxed{e^{ba}}.$$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{3x+2}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{3x}\cdot\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x+2}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^{3x}\cdot\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2}}_{1} = \left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^{x}\right]^3 =$$

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}\right]^3 = \left[\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}\right]^3 = \left[\frac{e^2}{e^{-1}}\right]^3 = [e^{2+1}]^3 = \boxed{e^9}.$$

h) $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{2^x-2^a}{x-a}\right)$

Sabendo que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$ e fazendo $y = x - a$, temos que, se $x \to a$, então $y \to 0$ e $\boxed{x = y + a}$, substituindo no limite, obtemos

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{2^x-2^a}{x-a}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2^{y+a}-2^a}{y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\frac{2^y.2^a-2^a}{y}\right) = \lim_{y\to 0}\left(2^a.\underbrace{\frac{(2^y-1)}{y}}_{\ln 2}\right) = \boxed{2^a.\ln 2}.$$

EXERCÍCIOS 18.8

1) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to 1} 2^x$

b) $\lim_{x\to 2} e^x$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

d) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $\lim_{x\to -\infty} e^{x^2}$

f) $\lim_{x\to -\infty} e^{-x^2}$

g) $\lim_{x\to 1} 3^{(-x^2+1)}$

h) $\lim_{x\to 3} 5^{\left(\frac{2x^2-18}{x-3}\right)}$

i) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}}$

j) $\lim_{x\to 4} 2^{\left(\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}\right)}$

k) $\lim_{x\to 27} \left(log_3 x\right)$

l) $\lim_{x\to 2} (ln\, x^2)$

m) $\lim_{x\to +\infty} \left(log_{0,5} x\right)$

n) $\lim_{x\to +\infty} \left(log_5 x\right)$

o) $\lim_{x\to 0^+} (log\, x)$

p) $\lim_{x\to 0^+} \left(log_{0,1} x\right)$

q) $\lim_{x\to 2} \left[log_4 \left(\frac{4-x^2}{2-x}\right)\right]$

r) $\lim_{x\to 3} \left[log_{\sqrt{7}} \left(\frac{x^2+x-12}{x-3}\right)\right]$

s) $\lim_{x\to 1} \left[ln \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)\right]$

2) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$

b) $\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$

d) $\lim_{x\to -\infty} \left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$

e) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{3x}$

f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-5}{x+2}\right)^{2x}$

g) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+3}$

h) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{x}$

i) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{5^x-1}{x}\right)$

j) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

k) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{4^{2x}-1}{x}\right)$

l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{e^{5x}-1}\right)$

m) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3^x-3^a}{x-a}\right)$

n) $\lim_{x\to a} \left(\frac{e^x-e^a}{x-a}\right)$

o) $\lim_{x\to 0} \left[\frac{ln(1+5x)}{x}\right]$

18.7. Limite de funções definidas por partes

Para calcular o limite de funções definidas por partes, é necessário analisar os limites laterais para verificar a sua existência.

Exemplo: Vamos calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ em que $f(x) = \begin{cases} x+3 & se\ x < 0 \\ 2 & se\ x \geq 0 \end{cases}$.

Solução:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = x + 3 = 0 + 3 = 3$.

Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, o $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

Veja no gráfico dessa função, na figura 18.7.1, como de fato a função se aproxima de valores diferentes pela esquerda e pela direita de zero.

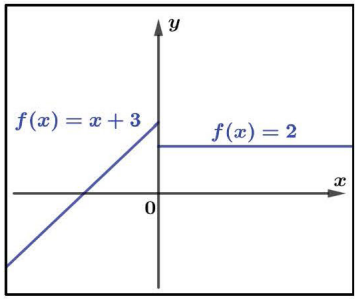


Figura 18.7.1

2º exemplo: Calcule o $\lim_{x\to 0} f(x)$ em que $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & se\ x < 3 \\ 0 & se\ x = 3 \\ 2x - 3 & se\ x > 3 \end{cases}$.

Solução:

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2x - 3 = 2.3 - 3 = 6 - 3 = 3$.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = x^2 - 6 = 3^2 - 6 = 9 - 6 = 3$.

Como $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$, o $\lim_{x\to 3} f(x) = 3$.

É importante observar no gráfico dessa função, na figura 18.7.2, que o valor 0 da função para $x = 3$, não interfere no valor pela qual a função se aproxima à esquerda e à direita de 3.

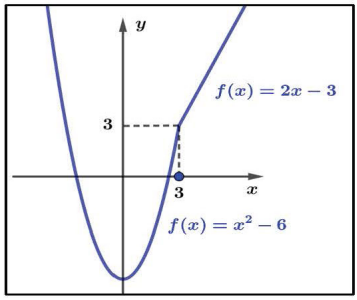


Figura 18.7.2

3º exemplo: Calcule $\lim_{x\to 1}\left(\frac{|2x-2|}{x^2-1}\right)$.

Solução: A função $|2x - 2|$ pode ser escrita de forma equivalente como

$$\begin{cases} \frac{2x-2}{x^2-1} & se\ x \geq 1 \\ \frac{-(2x-2)}{x^2-1} & se\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} & se\ x \geq 1 \\ \frac{-2(x-1)}{(x+1)(x-1)} & se\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{(x+1)} & se\ x \geq 1 \\ \frac{-2}{(x+1)} & se\ x < 1 \end{cases}.$$

Como $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{(x+1)} = \frac{2}{(1+1)} = 1$ é diferente de $\lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{(x+1)} = \frac{-2}{(1+1)} = -1$, então: $\lim_{x\to 1} \left(\frac{|2x-2|}{x^2-1}\right)$ não existe.

Observe no gráfico dessa função na figura 18.7.3, que a função se aproxima de valores diferentes à esquerda e à direita de 1.

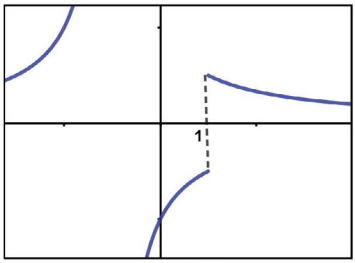


Figura 18.7.3

4º exemplo: Dada a função $f(x) = \begin{cases} 1/(x-2) & se\ x < 2 \\ x^2+1 & se\ 2 \le x < 3 \\ 3x+1 & se\ x \ge 3 \end{cases}$, calcule $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to 3} f(x)$ e $\lim_{x\to 2,5} f(x)$.

Solução: Como os limites laterais $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^2+1) = 5$ são diferentes, então o $\lim_{x\to 2} f(x)$ não existe.

O $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x^2+1) = 10$ é igual ao $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (3x+1) = 10$, assim o $\lim_{x\to 3} f(x) = 10$.

O $\lim_{x\to 2,5} f(x) = \lim_{x\to 2,5} (x^2+1) = 2{,}5^2 + 1 = 6{,}25 + 1 = 7{,}25$.

EXERCÍCIOS 18.9

Dadas as funções $f(x)$, calcule os limites indicados.

1) $f(x) = \begin{cases} -x+1 & se\ x < 2 \\ 3 & se\ x \ge 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

2) $f(x) = \begin{cases} -2x+5 & se\ x > 3 \\ 5x-16 & se\ x \le 3 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

3) $f(x) = \begin{cases} x-5 & se\ x > 5 \\ 10-2x & se\ x \le 5 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 5^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 5} f(x)$

4) $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & se\ x > 2 \\ 4 & se\ x = 2 \\ -3x+8 & se\ x < 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

5) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & se\ x > 3 \\ 3 & se\ x = 3 \\ -x + 3 & se\ x < 3 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

6) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 11/4 & se\ x > 1/2 \\ 1 & se\ x = 1/2 \\ 4x^2 & se\ x < 1/2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$

7) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 & se\ x < -1 \\ 0 & se\ x = -1 \\ x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 3x - 10 & se\ x > -1 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to -1} f(x)$

8) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

9) $f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3}$

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to 3} f(x)$

10) $f(x) = \frac{2x^2 - x - \frac{2}{9}}{\left|2x - \frac{4}{3}\right|}$

a) $\lim_{x\to \frac{2}{3}^+} f(x)$ b) $\lim_{x\to \frac{2}{3}^-} f(x)$ c) $\lim_{x\to \frac{2}{3}} f(x)$

11) $f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & se\ x < -1 \\ 2/(x^2 + 1) & se\ -1 \le x \le 1 \\ 3x - 2 & se\ x > 1 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to -1} f(x)$ c) $\lim_{x\to 1} f(x)$

12) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1) & se\ x < 0 \\ 4/x^2 & se\ 0 < x < 2 \\ 3x - 5 & se\ x \ge 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)$ c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

18.8. Continuidade

O conceito de continuidade de uma função é simples e incontroverso, mas é fundamental para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral. Ao longo deste curso, veremos que muitas teorias, teoremas e propriedades só se aplicam quando as funções envolvidas são contínuas, o que destaca a importância desse conceito.

Definição 18.8.1 (Continuidade em um ponto): Dizemos que uma função f é **contínua** em um ponto a, se as três condições a seguir estiverem satisfeitas:

1-Existe $f(a)$;

2-Existe $\lim_{x\to a} f(x)$;

3-$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

O bem da verdade, é suficiente observar apenas a terceira condição, pois ao afirmar que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, subentende-se que ambos existem (implicando nas duas primeiras condições). Assim, podemos simplesmente dizer que uma função é contínua quando $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Quando essa última igualdade não é verdadeira, dizemos que a função é **descontínua** em a. Alguns exemplos de **descontinuidade** estão a seguir.

- A função $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ não está definida para $x = 3$, ou seja, não existe $f(3)$. Portanto, a função é descontínua em $x = 3$ (ver figura 18.8.1).
- A função $g(x) = \begin{cases} 3x+1 & se\ x > 2 \\ x^2 & se\ x \leq 2 \end{cases}$ está definida para $x = 2$, pois $g(2) = 4$. Porém, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 3.2 + 1 = 7$ e $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 2^2 = 4$, o que implica que o $\lim_{x\to 2} g(x)$ não existe e, portanto, a função é descontínua em $x = 2$ (ver figura 18.8.2).

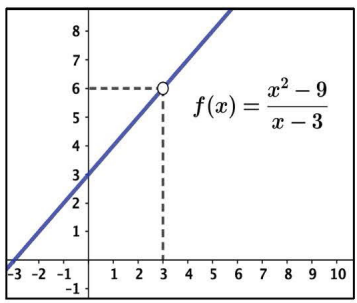


Figura 18.8.1

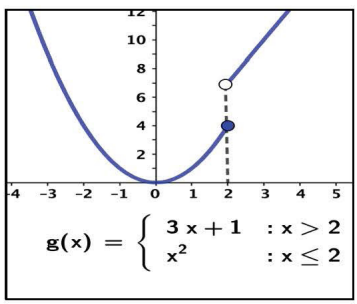


Figura 18.8.2

- A função $h(x) = \frac{1}{x-1}$ não está definida para $x = 1$, e além disso, $\lim_{x\to 1} h(x)$ não existe. Assim, a função é descontínua em $x = 1$ (ver gráfico 18.8.3).

A ideia de descontinuidade de uma função em a, pode ser verificada por "quebras" ou "buracos" na função em a, e claro, a continuidade em a, é a negação disso. A função $I(x) = 2x^3 - 5x - 1$, por exemplo, é contínua em qualquer ponto do domínio, pois está definida para qualquer valor de a e qualquer que seja a, tem-se $\lim_{x\to a} I(x) = I(a)$. O gráfico dessa função está na figura 18.8.4.

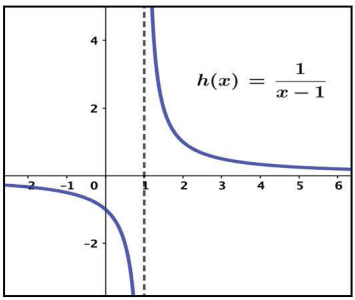


Figura 18.8.3

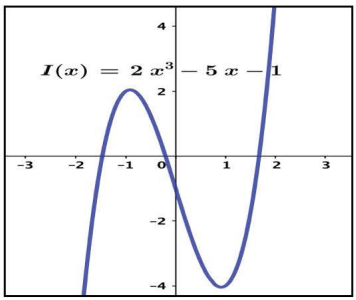


Figura 18.8.4

Definição 18.8.2 (Continuidade em um intervalo): Dizemos que uma função f é **contínua** em um intervalo fechado $[a, b]$, se as três condições a seguir estiverem satisfeitas:

1- f é contínua no intervalo aberto (a, b), ou seja, sendo c um ponto qualquer do intervalo (a, b), tem-se sempre $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$;

2-f é contínua à direita de a, ou seja, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$;

3-f é contínua à esquerda de b, ou seja, $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

Exemplo: Vamos verificar se a função $f(x) = \frac{x}{x-1}$ é contínua nos seguintes intervalos.

a) $[2, 4]$

Solução:

1- Sendo c um ponto qualquer do intervalo $(2, 4)$, temos: $\lim_{x\to c} \frac{x}{x-1} = \frac{c}{c-1} = f(c)$, para $c \neq 1$ (fora do intervalo);

2- $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 1 = f(2)$;

3- $\lim_{x\to 4^-} \frac{x}{x-1} = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3} = f(4)$.

Portanto, a função $f(x)$ é **contínua** no intervalo $[2,4]$.

b) $[0,2]$

Solução:

1-Sendo c um ponto qualquer do intervalo (0,2), temos: $\lim_{x\to c}\frac{x}{x-1}=\frac{c}{c-1}=f(c)$, para $c\neq 1$. Como a função não está definida para $c=1$, o $\lim_{x\to c} f(x)$ é diferente de $f(c)$ para $c=1$. Portanto, a função $f(x)$ é **descontínua** no intervalo [0,2].

Verifique no gráfico dessa função, na figura 18.8.5, a continuidade e descontinuidade nos intervalos [2,4] e [0,2], respectivamente.

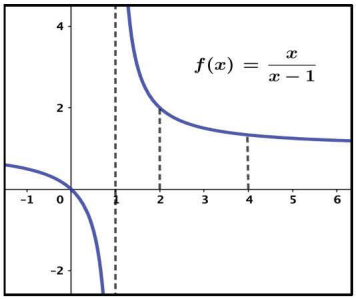
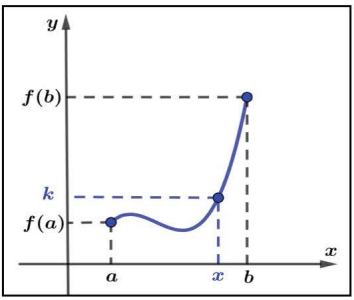


Figura 18.8.5

A grosso modo, a continuidade de uma função em um intervalo consiste na ideia de se traçar a função no intervalo sem interrupções ou "saltos" (sem tirar a ponta da caneta do papel). A descontinuidade ocorre quando isso não é possível.

A seguir estão um teorema e um corolário, que são consequências de funções contínuas em um intervalo.

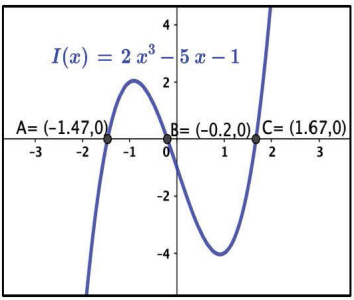
Teorema 18.8.1 (Teorema do valor intermediário ou teorema de Bolzano[4]): Se f for uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e k um número qualquer entre $f(a)$ e $f(b)$, inclusive, então existe no mínimo um número x no intervalo $[a,b]$, tal que $f(x)=k$.



Demonstração: Imaginemos uma reta paralela ao eixo das abscissas de função $g(x)=k\in[f(a),f(b)]$. Em razão da continuidade da função f no intervalo $[a,b]$, tal reta irá intersectar a função f em ao menos um ponto, e assim, k terá ao menos um correspondente em x no intervalo $[a,b]$, em que $f(x)=k$.

Um caso particular desse teorema é o corolário seguinte.

Corolário 18.8.1: Se f for uma função contínua no intervalo $[a,b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$, forem diferentes de zero com sinais opostos, então existe no mínimo uma solução para equação $f(x)=0$ no intervalo $[a,b]$.



Exemplo: Seja função $I(x)=2x^3-5x-1$ já estudada anteriormente. Já sabemos que ela é contínua em qualquer intervalo. Como

$I(-1)=2(-1)^3-5(-1)-1=-2+5-1=2,$

$I(1)=2.1^3-5.1-1=2-5-1=-4,$

são diferentes de zero e possui sinais opostos, concluímos que existe um valor de $x\in[-1,1]$, tal que

[4] Bernard Bolzano (1781-1848)

$f(x) = 0$. Veja o gráfico dessa função e seus respectivos zeros (raízes A, B e C), dentre eles, o ponto B $\in [-1,1]$.

Diante do exposto e das definições de continuidade, podemos anunciar as seguintes propriedades.

Propriedades de funções contínuas:

1- Os polinômios são contínuos em $\mathbb{R}$.

2- Todas funções racionais, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, trigonométricas inversas e funções raízes, são contínuas em seu domínio.

3- Não se discute continuidade de funções em pontos que não pertencem ao domínio da função.

4- Se k é uma constante e f e g são funções contínuas em $x = a$, então $f + g$, $f - g$, $k \cdot f$ e $f \cdot g$ são funções contínuas em $x = a$.

EXERCÍCIOS 18.10

1) Verifique se a funções a seguir são contínuas na abscissa especificada.

a) $f(x) = 2^x$ em $x = 0$;

b) $f(x) = x^2 - 4$ em $x = 2$;

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ em $x = 0$;

d) $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ em $x = 5$;

e) $f(x) = \frac{x^2+9x-10}{x^2-1}$ em $x = 1$;

f) $f(x) = \begin{cases} -1 & se\ x > 0 \\ 1 & se\ x \leq 0 \end{cases}$ em $x = 0$;

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & se\ x \neq 2 \\ 7 & se\ x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$;

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-8}{x-2} & se\ x \neq 2 \\ 8 & se\ x = 2 \end{cases}$ em $x = 2$;

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-6x+5}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ 4 & se\ x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$;

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-6x+5}{x-1} & se\ x \neq 1 \\ x-5 & se\ x = 1 \end{cases}$ em $x = 1$;

k) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x^2 - x + 2 & se\ x > -1 \\ 2x^2 - x - 3 & se\ x \leq -1 \end{cases}$ em $x = -1$;

l) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 6 & se\ x > 3 \\ 3 & se\ x = 3 \\ -x + 3 & se\ x < 3 \end{cases}$ em $x = 3$;

$$m)\quad f(x)=\begin{cases}x^3-3x^2-3x+1 & se\ x<-1\\ 0 & se\ x=-1\\ x^4-2x^3+4x^2-3x-10 & se\ x>-1\end{cases}\ \text{em } x=-1;$$

$$n)f(x)=\begin{cases}\frac{senx}{x} & se\ x\neq 0\\ 1 & se\ x=0\end{cases}\quad \text{em } x=0;$$

$$o)f(x)=\begin{cases}\frac{2^x-1}{x} & se\ x\neq 0\\ ln2 & se\ x=0\end{cases}\quad \text{em } x=0;$$

$$p)f(x)=\begin{cases}\frac{e^x-1}{x} & se\ x\neq 0\\ 1 & se\ x=0\end{cases}\quad \text{em } x=0.$$

2) Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que as funções a seguir sejam contínuas na abscissa especificada.

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}\frac{a^x-1}{x} & se\ x\neq 0\\ ln10 & se\ x=0\end{cases}\quad \text{em } x=0;$$

$$b)\quad f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x}{x-2} & se\ x\neq 2\\ 2a & se\ x=2\end{cases}\quad \text{em } x=2;$$

$$c)\quad f(x)=\begin{cases}10-x^2 & se\ x\geq -3\\ \frac{a}{x^2} & se\ x<-3\end{cases}\quad \text{em } x=-3;$$

$$d)\quad f(x)=\frac{1}{|x-a|}\ \text{em } x=a.$$

3) Verifique se as funções são contínuas ou descontínuas nos respectivos intervalos a seguir.

a) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ em $[1,3]$;

b) $f(x)=\frac{1}{x-2}$ em $[-1,1]$;

c) $f(x)=\frac{x}{2x^2-x-1}$ em $[0,2]$;

d) $f(x)=\frac{x}{2x^2-x-1}$ em $[-2,-1]$;

e) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ em $[-4,4]$.

f) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$ em $[4,6]$;

4) Use o teorema de Bolzano e o corolário 18.1.1 para mostrar que as funções a seguir assumem um valor nulo no intervalo mencionado.

a) $f(x)=x^3-3x-10$ em $[2,3]$;

b) $f(x)=x^3-9x^2+5x-8$ em $[8,9]$;

c) $f(x)=5x-\frac{1}{2x^2-1}$ em $\left[-\frac{1}{2},0\right]$.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 18.11

1)Um experimento com a cultura do girassol realizado em casa de vegetação, no Instituto de Ciências Agrárias e Tecnológicas – ICAT da Universidade Federal de Mato grosso, Campus de Rondonópolis – MT, visando correlacionar a umidade do solo com o potencial matricial do solo, obteve a seguinte curva característica ajustada ao modelo de Van Genuchten:

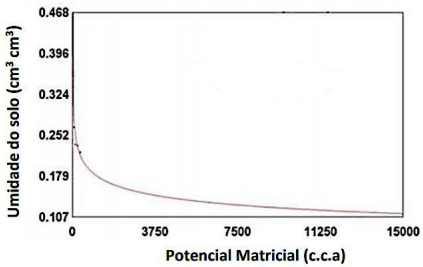
$$\theta = \frac{0{,}468}{[1+(0{,}0573.|\psi m|)^{0{,}3545}]^{0{,}5724}}$$

Onde: θ é a umidade do solo (dado em cm^3 cm^3) e ψm é o potencial matricial (dado em cm c.a)

Calcule:

a) $\lim_{\psi m \to 0^+} \theta$;

b) $\lim_{\psi m \to +\infty} \theta$.



Fonte adaptada: (FONTENELLI, 2014)

2)Um botânico registrou a altura (em cm) de uma planta ao longos dos meses e encontrou o seguinte modelo matemático para sua altura em função do tempo: $f(t) = \frac{27t}{2t+3}$ (com t em meses). Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e explique seu significado.

3) A densidade de semeadura da soja é um dos fatores primordiais para atingir altas produtividades e a rentabilidade desejada. A fórmula a seguir calcula a taxa de semeadura a partir do número de plantas e o poder germinativo das sementes:

$$N = \frac{P \times 100}{G}$$

Onde: N é o número de sementes por metro, P o número de plantas por metro linear e G a poder de germinação das sementes (em %).

Fonte adaptada: (MENDES, 2019)

Supondo um número de 10 plantas por metro linear, explique porque não cabe calcular $\lim_{G \to +\infty} N$ e o que significa tecnicamente a expressão $\lim_{G \to 100^-} N$.

4)Em um determinado experimento, observou-se que a relação entre duas grandezas analisadas correspondia a uma função racional na forma $f(x) = \frac{k}{x}$. Considerando os valores na tabela a seguir:

x	10	20	30	40
$f(x)$	3	1,5	1	0,75

Calcule:

a) O valor de k;

b) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

CAPÍTULO

19

DERIVADA

DERIVADA

19. DERIVADA

Desenvolvido quase simultaneamente por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes, o cálculo diferencial e integral teve seus conceitos iniciais vinculados aos estudos de taxas de variação de funções (diferencial ou derivada) e áreas entre curvas de funções (a integral). Trata-se de um ramo da matemática imprescindível em diversas ciências, como física, química, engenharia, economia, entre outras, além é claro, das ciências agrárias, como veremos ao longo deste volume. O cálculo diferencial (ou derivada) será estudado nesta unidade e na unidade 20, enquanto o cálculo integral será abordado na unidade 21.

19.1. Derivada de uma função

Definição 19.1.1: Seja f uma função definida em um intervalo I e seja x_0, um ponto pertencente a esse intervalo, denomina-se **derivada** de f em x_0, o valor da expressão:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando esse limite existir e for finito, dizemos que f é **derivável** (ou **diferenciável**) em x_0.

As notações mais utilizadas para representar uma derivada no ponto de abscissa x_0 são:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x)$ é a notação de Lagrange (1736-1813).

$$\frac{df}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$\frac{df}{dx}$ é a notação de Leibniz (1646-1716).

Podemos também calcular a derivada em x_0, substituindo a expressão $\Delta x = x - x_0$ por $\Delta x \to 0$, da seguinte forma

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Exemplo: Calcular a derivada da função $f(x) = 7x$ em $x_0 = 2$.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{7x - f(2)}{x - 2} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{7x - 14}{x - 2} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{7(\cancel{x - 2})}{\cancel{x - 2}} = 7.$$

Dessa forma, $\boxed{f'(2) = 7}$, ou se preferir $\boxed{\frac{df}{dx} = 7}$.

Outra solução:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(2 + \Delta x) - 14}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{14 + 7.\Delta x - 14}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7.\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \Rightarrow \boxed{f'(2) = 7}.$$

2º exemplo: Calcular a derivada da função $f(x) = 4x^2 + x$ em $x_0 = 1$.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{4x^2 + x - f(1)}{x - 1} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x - 1}.$$

Há uma indeterminação $0/0$. Como o polinômio $4x^2 + x - 5$ pode ser escrito como $(4x + 5)(x - 1)$, obtemos

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{(4x + 5)(\cancel{x - 1})}{\cancel{x - 1}} = \lim_{x \to 1} 4x + 5. \text{ Logo, } \boxed{f'(1) = 9}.$$

3º exemplo: Calcular a derivada da função $f(x) = 5^x$ em $x_0 = 4$.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{5^x - f(4)}{x - 4} \Rightarrow f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{5^x - 5^4}{x - 4}.$$

Sabemos que $\lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = ln\, a$. Ao utilizar uma incógnita auxiliar y e fazer $y = x - 4$, obtemos

$$f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{5^x - 5^4}{x - 4} = \lim_{y \to 0} \frac{5^{y+4} - 5^4}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{5^y.5^4 - 5^4}{y} \Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{5^4(5^y-1)}{y}=f'(4)=5^4.\underbrace{\left(\lim_{y\to 0}\frac{(5^y-1)}{y}\right)}_{ln\,5}\Rightarrow\boxed{f'(4)=5^4.ln\,5}.$$

4º exemplo: Calcular a derivada da função $f(x)=\sqrt{x}$ em $x_0=0$.

Solução:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}-f(0)}{x-0}\Rightarrow$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{x}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}}=\nexists.$$

Como limite não existe essa função não é derivável em $x_0=0$.

É importante destacar, que essa função é derivável em qualquer outro ponto do seu domínio, menos no ponto de abscissa proposto, $x_0=0$. Verifique!

5º exemplo: Calcular a derivada da função $f(x)=\sqrt[5]{x}$ em $x_0=0$.

Solução:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x}-f(0)}{x-0}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x}}{x}\Rightarrow$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}x^{\frac{1}{5}-1}=\lim_{x\to 0}x^{-\frac{4}{5}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}=+\infty.$$

Essa função não é derivável em $x_0=0$, pois o limite não é finito.

EXERCÍCIOS 19.1

1) Calcular as derivadas das funções nos seguintes pontos x_0.

a) $f(x)=-2x+1$ no ponto $x_0=-1$.

b) $f(x)=5-x$ no ponto $x_0=0$.

c) $f(x)=x^2+1$ no ponto $x_0=1$.

d) $f(x)=3x^2-11x+7$ no ponto $x_0=2$.

e) $f(x)=x^3-2x+1$ no ponto $x_0=-1$.

f) $f(x)=2^x$ no ponto $x_0=1$.

g) $f(x)=3^x-1$ no ponto $x_0=0$.

h) $f(x)=senx$ no ponto $x_0=\frac{\pi}{6}$.

i) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no ponto $x_0=1$.

j) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ no ponto $x_0=0$.

k) $f(x)=|x|$ no ponto $x_0=0$.

19.2. Interpretação geométrica da derivada

Observe no gráfico da figura 19.2.1, que na medida que x se aproxima de x_0, as retas secantes, que intersectam a função em dois pontos, seguem os passos das retas r_1, r_2, r_3 e r_4 até se tornar uma reta tangente, tocando em um único ponto da função.

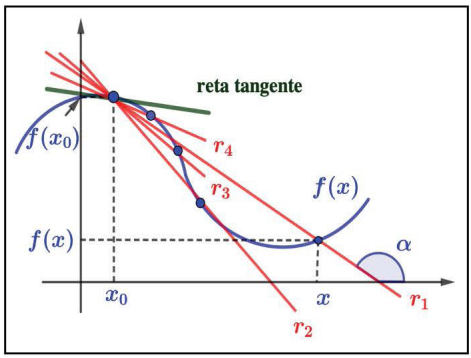


Figura 19.2.1

Os coeficientes angulares dessas retas secantes podem ser calculados por

$$a = tg\alpha = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como $x \to x_0$ e $x \neq x_0$, então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\alpha = a.$$

Assim, concluímos que **a derivada de uma função no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente à função no ponto de abscissa x_0.**

Podemos ainda, a partir dessa informação e consoante ao que foi visto em função afim (ou geometria analítica), obter a equação da reta tangente a uma função no ponto (x_0, y_0), utilizando a expressão

$$a = f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow \boxed{y - y_0 = [f'(x_0)].(x - x_0)}.$$

Onde, $f'(x_0)$ é a derivada da função no ponto de abscissa x_0.

Exemplo: Seja a função $f(x) = \frac{3}{x}$, vamos calcular a equação da reta tangente à função no ponto de abscissa $x_0 = 3$.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - f(3)}{x - 3} \Rightarrow$$

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{3 - x}{x}}{x - 3} \Rightarrow f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{\frac{-(x-3)}{x}}{x - 3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{f'(3) = -\frac{1}{3}}$$

$$y - y_0 = [f'(x_0)].(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}.(x - 3) \Rightarrow$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}x + 2}.$$

A reta tangente à função $f(x) = \frac{3}{x}$ no ponto de abscissa $x_0 = 3$ é $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Veja o gráfico dessa função e a reta tangente na figura 19.2.2.

2º exemplo: Seja a função $f(x) = x^3 - x + 3$, vamos calcular a equação da reta tangente à função no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 3 - f(1)}{x - 1} \Rightarrow$$

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x + 3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x+1)(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 2.$$

$$y - y_0 = \underbrace{[f'(x_0)]}_{2}.(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 2.(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = 2x + 1}.$$

A reta tangente à função $f(x) = x^3 - x + 3$ no ponto de abscissa $x_0 = 1$ é $y = 2x + 1$. Veja o gráfico dessa função e a reta tangente na figura 19.2.3.

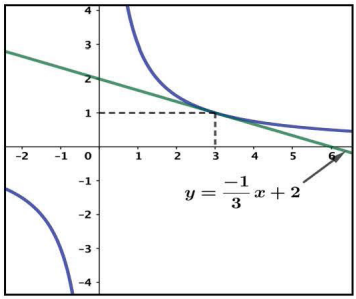


Figura 19.2.2

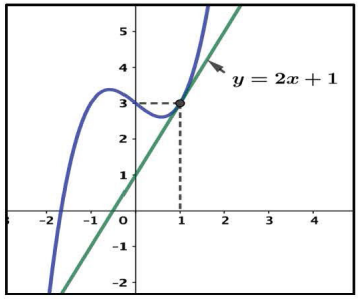


Figura 19.2.3

É importante salientar que a ideia de reta tangente está associada apenas a funções representadas por curvas no plano (a reta tangente toca a curva em um único ponto), e não faz sentido aplicá-la a uma reta. No entanto, no caso de retas, a interpretação da derivada nos leva a considerar a reta tangente como sendo a própria reta. Veja o cálculo da reta tangente à função $f(x) = -4x + 1$ no ponto $(-1, 5)$ utilizando a derivada:

$$f'(-1) = \lim_{x \to 1} \frac{-4x + 1 - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{-4x - 4}{x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{-4(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} \Rightarrow \boxed{f'(-1) = -4}.$$

$y - y_0 = [f'(x_0)].(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = -4.(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -4x + 1}$. É a própria reta.

E se eventualmente a função não for diferenciável (ou não derivável) em um ponto, como se apresenta a reta tangente a essa função? As condições geométricas de diferenciabilidade ou não diferenciabilidade de uma função em um ponto estão na seção a seguir e respondem a essa pergunta.

19.3. Diferenciabilidade e continuidade

Vimos que uma função é diferenciável quando o limite bilateral $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe e é finito. Isso corresponde a afirmar que os limites laterais à direita: $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ e à esquerda: $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ são equivalentes a um mesmo número real. Esses limites laterais são chamados de **derivadas laterais**.

As derivadas laterais de uma função nos fornecem os coeficientes angulares das retas tangentes à função em um ponto de abscissa x_0, imediatamente à esquerda e à direita desse ponto, isto é, nos fornece as retas tangentes:

$$y - y_0 = \left[\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right].(x-x_0) \Rightarrow Reta\ tangente\ à\ esquerda\ de\ x_0,$$

$$y - y_0 = \left[\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right].(x-x_0) \Rightarrow Reta\ tangente\ à\ direita\ de\ x_0.$$

Como as derivadas laterais precisam ser equivalentes, uma função será diferenciável em um ponto de abscissa x_0, quando ambas as derivadas laterais fornecerem uma mesma (ou única) reta tangente à função nesse ponto (ver figura 19.3.1). E além disso, essa reta tangente única não pode ser vertical, pois não existe coeficiente angular de reta vertical (conforme vimos na seção 6.2 do volume 1). Em resumo:

Uma função é diferenciável em um ponto quando existe uma única reta não vertical tangente a essa função nesse ponto.

Uma outra forma de pensar geometricamente em diferenciabilidade de uma função em um ponto, é imaginar ampliações cada vez maiores da região próxima ao ponto x_0 (aumentando o zoom). O que se deve visualizar com essas ampliações é uma sobreposição da reta tangente e a função, ambas coincidindo em uma única reta não vertical, conforme a figura 19.3.2.

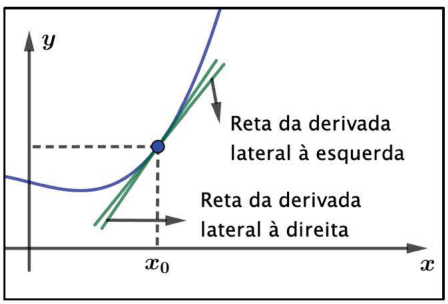


Figura 19.3.1

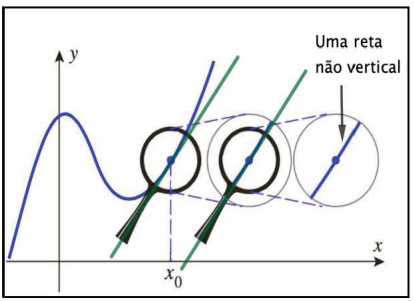


Figura 19.3.2

Uma vez compreendida a diferenciabilidade de uma função em um ponto, vamos agora, ainda no contexto geométrico, anunciar os três casos possíveis em

que a diferenciabilidade **não** ocorre:

- **1º caso:** x_0 é um bico.

Neste caso, a reta tangente à esquerda e à direita de x_0 não é única.

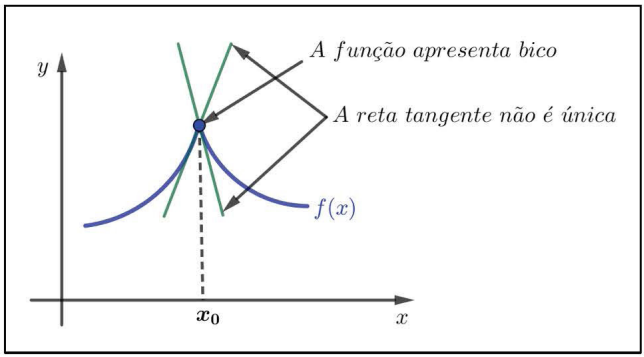


Figura 19.3.3

Exemplo: Vamos calcular a derivada da função $f(x) = |x-2|$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$ e analisar a reta tangente.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2| - f(2)}{x-2} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2| - f(2)}{x-2} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)}{x-2} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = -1 \end{cases}.$$

Como os limites à esquerda e à direita de $x_0 = 2$ são diferentes, não existe o limite bilateral e a função não é diferenciável nessa abscissa.

Em termos geométricos, as derivadas laterais "fornecem" retas tangentes diferentes em $x = 2$. Veja a seguir.

À esquerda de $x = 2$, tem-se a reta tangente:

$$y - y_0 = [f'(x_0)].(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1.(x-2) \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}.$$

E à direita de $x = 2$, encontramos: $y - 0 = 1.(x-2) \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$.

Como a reta tangente não é única, a função não é derivável nesse ponto. O gráfico da função (de cor azul) e as retas tangentes (de cor verde) estão na figura 19.3.4.

2º exemplo: Vamos calcular a derivada da função $f(x) = |x^2 - 4|$ no ponto de abscissa $x_0 = -2$ e analisar a reta tangente.

Solução:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f'(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{|x^2-4| - f(-2)}{x+2} \Rightarrow$$

$$f'(-2) = \lim_{x\to -2} \frac{|x^2-4| - 0}{x+2} \Rightarrow f'(2) = \lim_{x\to -2} \frac{|x+2|.|x-2|}{x+2} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x+2).|x-2|}{x+2} = 4 \quad e \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{-(x+2).|x-2|}{x+2} = -4$$

Como os limites à esquerda e à direita de $x_0 = -2$ são diferentes, não existe o limite bilateral e a função não é diferenciável nesse ponto.

Geometricamente, a derivada lateral à esquerda de $x = -2$ nos fornece a seguinte reta tangente:

$$y - y_0 = [f'(x_0)].(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -4.(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = -4x - 8}.$$

Enquanto a derivada lateral à direita de $x = -2$, apresenta a seguinte:

$$y - y_0 = [f'(x_0)].(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = 4.(x + 2) \Rightarrow \boxed{y = 4x + 8}.$$

Como a reta tangente não é única, a função não é derivável nesse ponto.

Veja no gráfico da função (de cor azul) na figura 19.3.5, que as retas (de cor verde) tangentes à função nesse ponto são, de fato, diferentes.

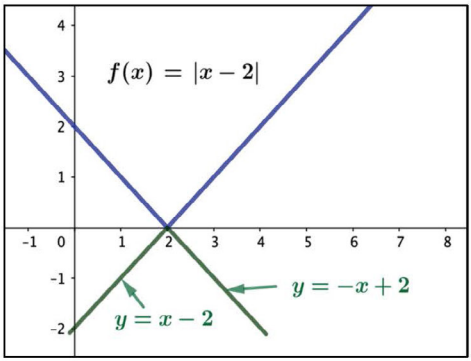


Figura 19.3.4

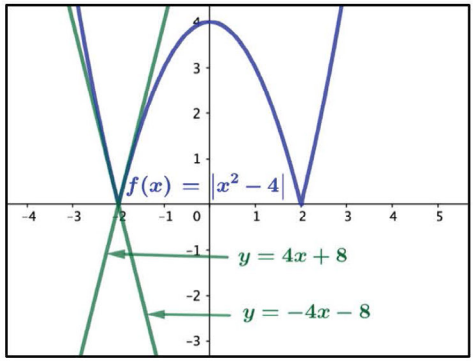


Figura 19.3.5

- **2º caso:** x_0 é abscissa de um ponto de tangência vertical.

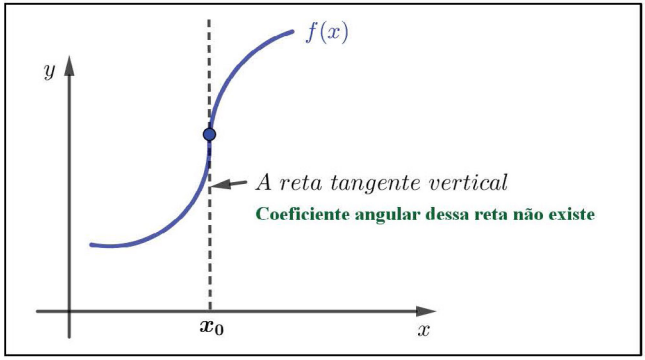


Figura 19.3.6

Este caso ocorrerá quando o $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ apresentar como resultado $\pm\infty$.

Com efeito, se o $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ corresponde à tangente do ângulo entre a reta tangente à função em x_0 e o eixo x, então, na hipótese desse limite ser $\pm\infty$, implica em um ângulo cuja tangente seja tão grande ou tão pequena quanto se deseje. Esse ângulo é de 90º, portanto, uma reta tangente é vertical.

Exemplo: Vamos calcular a derivada da função $f(x)=(x-1)^{1/3}$ no ponto de abscissa $x_0=1$ e analisar a reta tangente.

Solução:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{1/3}-f(1)}{x-1}\Rightarrow$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}-f(1)}{x-1}\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{x-1}\Rightarrow$$

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^{2/3}}\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=+\infty\end{cases}.$$

Assim: $f'(1)=+\infty$.

Como não é finito, a função $f(x)=(x-1)^{1/3}$ não é derivável no ponto de abscissa $x_0=1$. Geometricamente, isso equivale a dizer que a reta tangente a essa função, nesse ponto, é vertical. Ver figura 19.3.7.

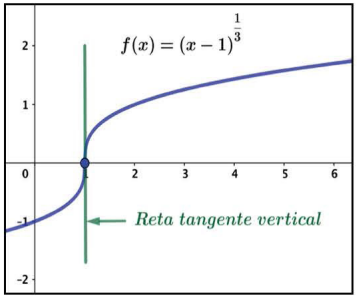


Figura 19.3.7

- **3º caso:** x_0 é um ponto de descontinuidade da função.

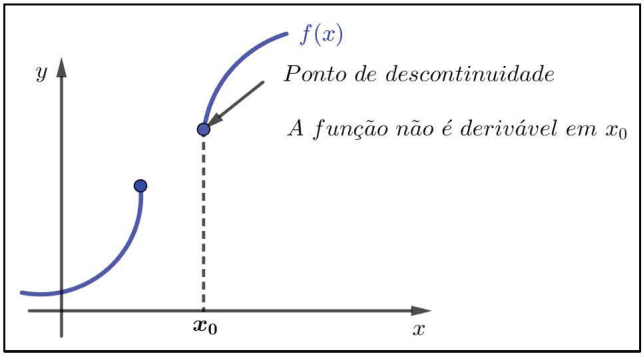


Figura 19.3.8

Neste caso, devido a descontinuidade no ponto, pode ocorrer de existir somente uma derivada lateral ou algum dos dois casos anteriores.

Exemplo: A função $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & se\ x > 2 \\ x^2 & se\ x \leq 2 \end{cases}$ é descontínua em $x_0 = 2$, e portanto, não derivável em $x_0 = 2$.

Observe no gráfico dessa função que está na figura 19.3.9, que as retas tangentes à esquerda e à direita são distintas.

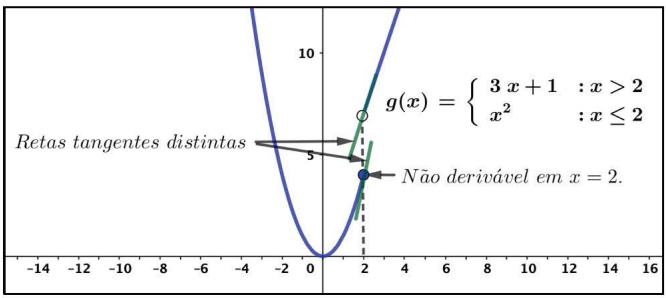


Figura 19.3.9

Existem outras circunstâncias de descontinuidade de uma função em um ponto, além das ilustradas anteriormente. No entanto, em todos esses casos, a não diferenciabilidade nesse ponto é garantida pela contrapositiva do Teorema 19.3.1 a seguir.

Teorema 19.3.1: Seja uma função $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Se f é diferenciável (ou derivável) em x_0, então f é contínua em x_0.

Demonstração:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(f(x)-f(x_0))}{x-x_0} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{0} = \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}.$$

Como a derivada existe e é finita, concluímos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou seja, contínua.

Resumidamente, concluímos que:

– A diferenciabilidade implica em continuidade.

E sua contrapositiva nos diz que:

– A descontinuidade implica em não diferenciabilidade.

E por fim, a recíproca desse teorema é falsa, isto é:

– A continuidade não implica em diferenciabilidade.

Veja os exemplos do 1º e 2º caso em que as funções são contínuas mas não são diferenciáveis.

EXERCÍCIOS 19.2

1) Calcular a equação da reta tangente às funções no ponto dado:

a) $f(x) = x^2 + 1$ no ponto $x_0 = -1$;

b) $f(x) = -5x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ no ponto $x_0 = 0$;

c) $f(x) = cosx$ no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

d) $f(x) = 7^x$ no ponto $x_0 = 1$;

e) $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 4$;

f) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$ no ponto $x_0 = 1$;

g) $f(x) = -3x + 5$ no ponto $x_0 = -1$.

2) Quais as funções a seguir, são diferenciáveis e quais não são diferenciáveis no ponto de abscissa x_0 especificado. Explique geometricamente a sua conclusão.

a) $f(x) = -4x + 3$ no ponto $x_0 = -1$;

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ no ponto $x_0 = 2$;

c) $f(x) = |2x - 4|$ no ponto $x_0 = 2$;

d) $f(x) = |2x - 4|$ no ponto $x_0 = 4$;

e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $x_0 = 0$;

f) $f(x) = |x^2 - x|$ no ponto $x_0 = 1$;

g) $f(x) = |x^2 - x|$ no ponto $x_0 = 0$;

h) $f(x) = \begin{cases} 6x & se\ x > 1 \\ 3x^2 & se\ x \leq 1 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 1$;

i) $f(x) = \begin{cases} 6x - 3 & se\ x > 1 \\ 3x^2 & se\ x \leq 1 \end{cases}$ no ponto $x_0 = 1$.

3) Sobre a diferenciabilidade e continuidade de uma função em um ponto, podemos afirmar que:

a) Se uma função é contínua em um ponto isso implica que ela é diferenciável nesse ponto;

b) Se uma função é descontínua em um ponto isso implica que ela é diferenciável nesse ponto;

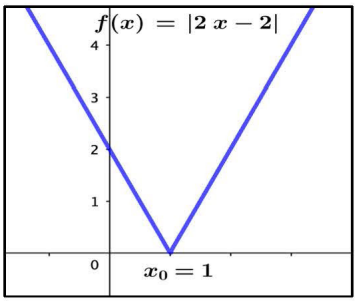
c) Se uma função é diferenciável em um ponto isso implica que ela é contínua nesse ponto;

d) Se uma função é não diferenciável em um ponto isso implica que ela é descontínua nesse ponto.

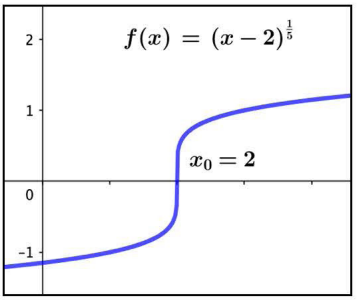
e) Uma função é contínua se, e somente se, é diferenciável nesse ponto.

4) Verifique a partir de uma análise geométrica, se as funções são deriváveis no ponto x_0 especificado:

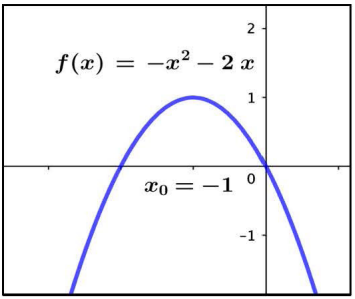
a)



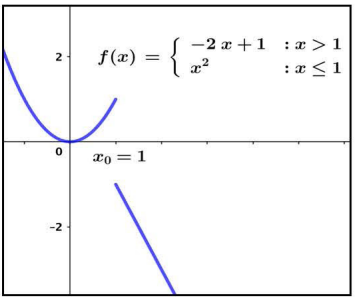
b)



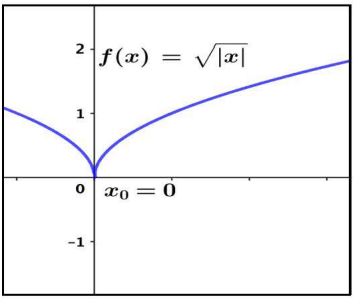
c)



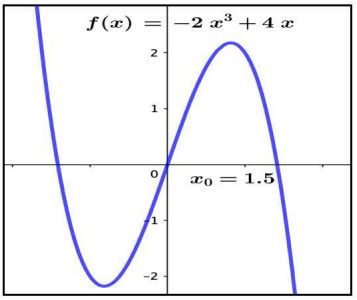
d)



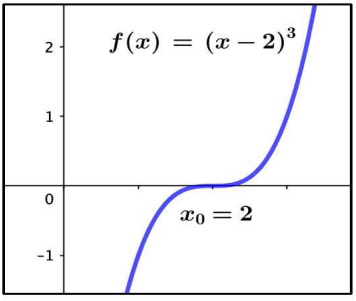
e)



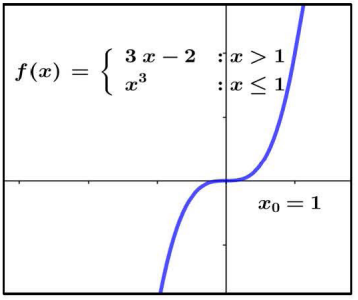
f)



g)



h)



5)Verifique, utilizando o cálculo de derivada, se a análise geométrica de cada item da questão anterior está correta.

19.4. Função derivada

Seja f uma função derivável em um intervalo I. Denomina-se **função derivada** a função $f': I \to \mathbb{R}$, que associa a cada x pertencente ao intervalo I a derivada de f no ponto genérico x.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

É possível utilizar também, a fórmula $f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ para cálculo de função derivada, basta substituir o ponto x_0 por x ao final do cálculo do limite.

Nas próximas subseções, serão apresentadas as funções derivadas das principais funções, juntamente com suas respectivas demonstrações.

19.4.1. Derivada da função constante

Seja uma função constante $f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0. \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x) = c \; f'(x) = 0.}$$

Exemplo: $f(x) = -7 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$

19.4.2. Derivada da potência

Seja a função $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0}.$$

Como x_0 anula o polinômio $x^n - {x_0}^n$, então ele é divisível por $x - x_0$. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini, obtemos

x_0	1	0	0	0	0	...	0	$-{x_0}^n$ ⇒
	1	x_0	${x_0}^2$	${x_0}^3$	${x_0}^4$	...	${x_0}^{n-1}$	0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = \frac{(x^{n-1} + x_0.x^{n-2} + {x_0}^2.x^{n-3} + {x_0}^3.x^{n-4} + {x_0}^4.x^{n-5} + \ldots + {x_0}^{n-1})(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0.x^{n-2} + {x_0}^2.x^{n-3} + {x_0}^3.x^{n-4} + {x_0}^4.x^{n-5} + \ldots + {x_0}^{n-1}.$$

Substituindo x_0 por x, concluímos que

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - {x_0}^n}{x - x_0} = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}}_{n \text{ vezes}} = \boxed{n.x^{n-1}}.$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$$

Exemplo: $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4.x^{4-1} = 4x^3.$

2º exemplo: $f(x) = x^{13} \Rightarrow f'(x) = 13.x^{13-1} = 13x^{12}.$

Pode-se demonstrar, a partir das regras de derivação mais adiante, que essa fórmula pode ser estendida para qualquer expoente real.

Exemplo: $f(x) = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2.x^{-2-1} = -2x^{-3}.$

2º exemplo: $f(x) = x^{3/4} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{4}.x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{4}} = \frac{3}{4.x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4.\sqrt[4]{x}}.$

3º exemplo: $f(x) = x^{\sqrt{3}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt{3}.x^{\sqrt{3}-1}.$

19.4.3. Derivada da função exponencial

Seja a função $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} a^x . \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}}_{ln a} = \boxed{a^x.lna} \Rightarrow \boxed{f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x.lna.}$$

Exemplo: $f(x) = 2^x \Rightarrow f'(x) = 2^x.ln2.$

2º exemplo: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.\underbrace{lne}_{1} \Rightarrow f'(x) = e^x.$

Esse último exemplo mostra que a função derivada de e^x é a própria função.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

19.4.4. Derivada da função seno

A função $f(x) = senx$ possui a seguinte derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen(x+\Delta x) - senx}{\Delta x}.$$

Aplicando a identidade trigonométrica

$$sen\, x - sen\, a = 2.sen\left(\frac{x-a}{2}\right).cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

podemos reescrever esse limite como

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2.sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Desse modo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right).cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1} . \lim_{\Delta x \to 0} cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \boxed{cosx}.$$

$$\boxed{f(x) = senx \Rightarrow f'(x) = cosx.}$$

19.4.5. Derivada da função cosseno

$$\boxed{f(x) = cosx \Rightarrow f'(x) = -senx.}$$

Demonstração a cargo do leitor. Uma dica é usar identidade trigonométrica:

$$\boxed{cos\,x - cos\,a = -2.sen\left(\frac{x+a}{2}\right).sen\left(\frac{x-a}{2}\right)}.$$

19.4.6. Derivada de funções logarítmicas

Admitindo que as funções $f(x) = ln\,x$ e $g(x) = log_a x$ são diferenciáveis (ou deriváveis) para $x > 0$ e usando a expressão $\lim_{v \to 0}(1+v)^{\frac{1}{v}} = e$ (já demonstrada), temos para $f(x) = ln\,x$ que

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x+\Delta x) - ln\,(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x}.$$

Fazendo $\frac{\Delta x}{x} = v \Rightarrow \frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{vx}$ e se $\Delta x \to 0 \Rightarrow v \to 0$. Substituindo:

$$f'(x) = \lim_{\Delta v \to 0} ln(1+v)^{\frac{1}{vx}} = \lim_{\Delta v \to 0} ln\left[(1+v)^{\frac{1}{v}}\right]^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.\lim_{\Delta v \to 0} ln(1+v)^{\frac{1}{v}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}.ln\left(\overbrace{\lim_{\Delta v \to 0}(1+v)^{1/v}}^{e}\right) = \frac{1}{x}.\underbrace{lne}_{1} = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}.}$$

Por outro lado, como $g(x) = log_a x = \frac{lnx}{lna}$, obtemos

$$\boxed{g(x) = log_a x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x.lna}.}$$

Outra demonstração mais sucinta sobre a derivada de $log_a x$ está na subseção 19.5.6 - derivadas das funções inversas.

19.4.7. Derivada de função acompanhada de constante

Caso a função esteja acompanhada de uma constante a, ou seja, for da forma $a.f(x)$, repete-se a constante a e deriva-se somente a função $f(x)$.

Demonstração: Seja uma função na forma $a.f(x)$. Se $a \in \mathbb{R}$, então

$$[af(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a.f(x+\Delta x) - a.f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a.\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) = a.f'(x).$$

Exemplo: $f(x) = -11sen x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -11cos x.$

2º exemplo: $f(x) = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2.3.x^{3-1} = 6x^2.$

Um interessante caso particular para essa regra de derivação é:

$$\boxed{f(x) = ax \Rightarrow f'(x) = a.}$$

A importância de se saber a função derivada imediata de funções, consiste em encontrar, por exemplo, retas tangentes à função em um ponto x qualquer da função.

Utilizando a derivada da função $f(x) = 2x^3$ do exemplo anterior $f'(x) = 6x^2$, podemos encontrar as equações das retas tangentes à função em alguns pontos:

- $(1, 2)$

$$f'(1) = 6.1^2 \Rightarrow f'(1) = 6.$$
$$\text{reta tangente} \Rightarrow \boxed{y - 2 = 6(x-1)}.$$

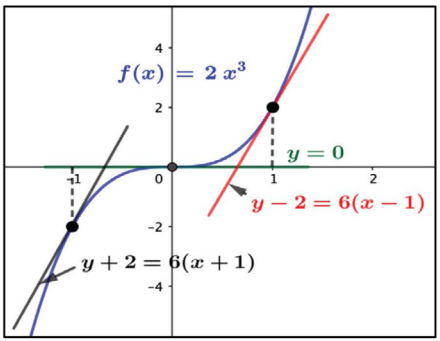
- $(0, 0)$

$$f'(0) = 6.0^2 \Rightarrow f'(0) = 0.$$
$$\text{reta tangente} \Rightarrow \boxed{y = 0}.$$

- $(-1, 2)$

$$f'(-1) = 6.(-1)^2 \Rightarrow f'(-1) = 6.$$
$$\text{reta tangente} \Rightarrow \boxed{y + 2 = 6(x+1)}.$$

Veja o gráfico da função e as retas tangentes na figura a seguir.



EXERCÍCIOS 19.3

1) Obtenha a função derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = -10$
b) $f(x) = 99$
c) $f(x) = 5x$
d) $f(x) = -12x$
e) $f(x) = -x$
f) $f(x) = x^5$
g) $f(x) = 2x^{10}$
h) $f(x) = x^{-2}$
i) $f(x) = 3x^{-4}$
j) $f(x) = x^{1/2}$
k) $f(x) = -2x^{0,8}$
l) $f(x) = x^{\pi}$
m) $f(x) = 9^x$
n) $f(x) = 2.3^x$
o) $f(x) = -e^x$
p) $f(x) = 5.cosx$
q) $f(x) = -senx$
r) $f(x) = \sqrt{2}cosx$

2) Calcular a equação da reta tangente às funções no ponto dado.

a) $f(x) = x^4$ no ponto $x_0 = 1$.
b) $f(x) = 8^x$ no ponto $x_0 = -1$.
c) $f(x) = senx$ no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
d) $f(x) = e^x$ no ponto $x_0 = 0$.
e) $f(x) = log_2 x$ no ponto $x_0 = 4$.
f) $f(x) = log_5 x^3$ no ponto $x_0 = 5$.
g) $f(x) = 2lnx$ no ponto $x_0 = 2$.

3) Use as regras de derivação para calcular o valor de $\lim_{x \to 1} \frac{3.x^{1999} - 3}{x - 1}$.

4) Em relação a função derivada, assinale a alternativa incorreta.

a) A derivada de $f(x) = senx$ é $f'(x) = cosx$.
b) A derivada de $f(x) = a^x$ é $f'(x) = a^x.lna$.
c) A derivada de $f(x) = ax$ é $f'(x) = ax^2$.
d) A derivada de $f(x) = alnx$ é $f'(x) = \frac{a}{x}$.
e) A derivada de $f(x) = log_a x$ é $f'(x) = \frac{1}{xlna}$.

5) Demonstre, usando a definição, que a derivada de $f(x) = x^{-n}$ é $f(x) = -nx^{-n-1}$ (com $n \in N$), ou seja, que a regra de derivação da potência aplica-se também a números inteiros negativos. Dica: use o binômio de Newton.

19.5. Regras de derivação

Muitas vezes, precisamos derivar funções que não estão entre as básicas já conhecidas e usar a definição pode exigir cálculos demasiadamente longos. Nesta seção, vamos conhecer algumas regras de derivação que irão simplificar os cálculos de função derivada, sem recorrer ao uso da definição.

19.5.1. Derivada da soma e da diferença

Sejam as funções g e h deriváveis em x, então $g+h$ e $g-h$ também serão, e podem assim ser calculadas:

$$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x).$$

$$f(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) - h'(x).$$

Em outras palavras, a derivada da soma é igual a soma das derivadas, a derivada de diferença é igual a diferença das derivadas.

Demonstração:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x) + h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{g'(x)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}}_{h'(x)} \Rightarrow \boxed{f'(x) = g'(x) + h'(x)}.$$

A demonstração da subtração é similar e notadamente, pode ser generalizada para mais de duas funções.

Exemplos:

- $f(x) = -5x + 1 \Rightarrow f'(x) = -5 + 0 = -5.$
- $f(x) = 2x^3 - 11x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = 3.2.x^{3-1} - 2.11x^{2-1} + 3 = 6x^2 - 22x + 3.$
- $f(x) = 6x^5 + 8^x \Rightarrow f'(x) = 6.5.x^{5-1} + 8^x.ln8 = 30.x^4 + 8^x.ln8.$
- $f(x) = senx + e^x \Rightarrow f'(x) = cosx + e^x.$

Imagine o trabalho que seria utilizar a definição para calcular a derivada das funções anteriores.

19.5.2. Derivada do produto

Sejam as funções g e h deriváveis em x, então $g.h$ também será, e pode ser assim calculada:

$$f(x) = g(x).h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x).g(x).$$

Em outros termos, a derivada de um produto de duas funções é igual ao produto da derivada da primeira função vezes a segunda, somado com o produto da derivada da segunda função vezes a primeira.

Demonstração:

$$f'(x) = g(x).h(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x).h(x+\Delta x) - g(x).h(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x).h(x+\Delta x) - g(x).h(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x).h(x)}{\Delta x} - \frac{g(x+\Delta x).h(x)}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x).[h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x} + \frac{h(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x).[h(x+\Delta x) - h(x)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x).[g(x+\Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = g'(x).h(x) + h'(x).g(x)}.$$

Essa regra pode ser estendida ao produto de mais funções. Veja o caso para três funções:

$$f(x) = g(x).h(x).I(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x).h(x).I(x) + h'(x).g(x).I(x) + h(x).g(x).I'(x)$$

Exemplos:

- $f(x) = \underbrace{(11x^2+3)}_{g(x)} \underbrace{(4x^3-5x^2)}_{h(x)}$

$$f'(x) = \underbrace{(22x)}_{g'(x)}.\underbrace{(4x^3-5x^2)}_{h(x)} + \underbrace{(12x^2-10x)}_{h'(x)}\underbrace{(11x^2+3)}_{g(x)} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 88x^4 - 110x^3 + 132x^4 + 36x^2 - 110x^3 - 30x \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = 220x^4 - 220x^3 + 36x^2 - 30x}.$$

- $f(x) = 2^x.cosx$

$$f'(x) = \underbrace{2^x.ln2}_{g'(x)}.\underbrace{cosx}_{h(x)} + \underbrace{(-senx)}_{h'(x)}.\underbrace{2^x}_{g(x)} \Rightarrow \boxed{f'(x) = 2^x(ln2.cosx - senx)}.$$

- $f(x) = e^x.2x.senx$

$$f'(x) = \underbrace{e^x}_{g'(x)}.\underbrace{2x}_{h(x)}.\underbrace{senx}_{I(x)} + \underbrace{e^x}_{g(x)}.\underbrace{2}_{h'(x)}.\underbrace{senx}_{I(x)} + \underbrace{e^x}_{g(x)}.\underbrace{2x}_{h(x)}.\underbrace{cosx}_{I'(x)} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = 2e^x(x.senx + senx + xcosx)}.$$

19.5.3. Derivada da potência de uma função

Na subseção anterior, vimos que há um padrão para a derivada do produto de funções. Para o produto de duas funções, devemos somar duas parcelas em que cada parcela consiste no produto da derivada de uma das funções, respectivamente, pela outra função. No produto de três funções, são três parcelas de soma, e em

cada parcela, o produto da derivada de uma das funções, respectivamente, pelas demais funções. E isso se estende, obviamente, a n funções.

Aplicando esse entendimento ao produto de n funções iguais, ou seja, uma mesma função, temos

$$f(x) = [g(x)]^n = \underbrace{g(x).g(x).g(x)\dots g(x)}_{n\ fatores} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = g'(x).\underbrace{g(x).g(x).g(x)\dots g(x)}_{n-1\ fatores} + \\ g'(x).\underbrace{g(x).g(x).g(x)\dots g(x)}_{n-1\ fatores} + \\ \vdots \\ g'(x).\underbrace{g(x).g(x).g(x)\dots g(x)}_{n-1\ fatores}. \end{array}\right\} \quad n\ fatores\ iguais\ a\ g'(x).[g(x)]^{n-1}$$

$$\boxed{f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)}$$

A regra da cadeia a seguir (subseção 19.5.5), nos garante a extensão dessa fórmula para qualquer n real.

$$\boxed{f(x) = [g(x)]^n \Rightarrow f'(x) = n.[g(x)]^{n-1}.g'(x)}$$

Exemplos:

- $f(x) = (senx)^3$

$$f'(x) = \underbrace{3.(senx)^{3-1}}_{n.[f(x)]^{n-1}}.\underbrace{cosx}_{f'(x)} \Rightarrow \boxed{f'(x) = 3.sen^2x.cosx}.$$

- $f(x) = e^{4x}$

$$f(x) = (e^x)^4 \Rightarrow \quad f'(x) = \quad 4.(e^x)^{4-1}.e^x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 4.e^{4x}}.$$

- $f(x) = (e^x.cosx)^2$

$$f(x) = (e^x.cosx)^2 \Rightarrow \quad f'(x) = \quad 2.(e^x.cosx)^{2-1}.(e^x.cosx - senx.e^x) \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = 2e^{2x}cosx(cosx - senx)}.$$

19.5.4. Derivada do quociente

Sejam as funções g e h deriváveis em x, então g/h também será e pode assim ser calculada:

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}}.$$

Tratando $g(x)$ como sendo a 1ª função e $h(x)$ como a 2ª função, podemos anunciar a regra do quociente da seguinte forma: a derivada do quociente de duas funções é igual a derivada da 1ª função vezes a 2ª função, menos a derivada da 2ª função vezes a 1ª função. Tudo isso dividido pelo quadrado da 2ª função.

Demonstração:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \quad g(x) = f(x).h(x) \Rightarrow$$

$$g'(x) = f'(x).h(x) + \underbrace{f(x)}_{\frac{g(x)}{h(x)}}.h'(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x).h(x) + \frac{g(x)}{h(x)}.h'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x).h(x) = g'(x) - \frac{g(x)}{h(x)}.h'(x) \Rightarrow f'(x).h(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{h(x)} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}}.$$

Exemplos:

- $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x)}^{g'(x)}.\overbrace{(x)}^{h(x)} - \overbrace{(1)}^{h'(x)}\overbrace{(x^2-1)}^{g(x)}}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)}{x^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}}.$$

- $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(e^x)}^{g'(x)}.\overbrace{(x^2)}^{h(x)} - \overbrace{(2x)}^{h'(x)}\overbrace{(e^x)}^{g(x)}}{[x^2]^2} = \frac{e^x(x^2-2x)}{x^4} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{e^x(x^2-2x)}{x^4}}.$$

- $f(x) = \frac{(x^2-3).(5x+1)}{e^x}$

Fazendo $g(x) = (x^2-3).(5x+1)$

$$g'(x) = (2x).(5x+1) + 5.(x^2-3) = 10x^2 + 2x + 5x^2 - 15 = \boxed{15x^2 + 2x - 15}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(15x^2+2x-15)}^{g'(x)}.\overbrace{(e^x)}^{h(x)} - \overbrace{(e^x)}^{h'(x)}\overbrace{((x^2-3).(5x+1))}^{g(x)}}{[e^x]^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{e^x(15x^2+2x-15-5x^3-x^2+15x+3)}{[e^x]^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-5x^3+14x^2+17x-12}{e^x}}.$$

- $f(x) = tgx$

$$f'(x) = tgx = \frac{senx}{cosx} = \frac{\overbrace{(cosx)}^{g'(x)}.\overbrace{(cosx)}^{h(x)} - \overbrace{(-senx)}^{h'(x)}\overbrace{(senx)}^{g(x)}}{[cosx]^2} \Rightarrow$$

$$\frac{sen^2x + cos^2x}{cos^2x} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{cos^2x}}.$$

Esse último exemplo demonstra a derivada da tangente de x.

$$\boxed{f(x) = tgx \Rightarrow f'(x) = sec^2x.}$$

EXERCÍCIOS 19.4

1) Calcule a derivada das seguintes funções.

a) $f(x) = \frac{11}{2}x^2 - 4$
b) $f(x) = 18x^3 - x^2 + 2$
c) $f(x) = x^3 + 8x^2 - 2^x$
d) $f(x) = x^4 - e^x + lnx$
e) $f(x) = 2x^3 + 3e^x + lnx + log_2 x$
f) $f(x) = 5x^n + n.e^x (n \in \mathbb{N})$
g) $f(x) = (4x).(1 - x^2)$
h) $f(x) = (7x^4 - 1).(1 + 2x^2)$
i) $f(x) = (x^{10} - x).(1 + x^3).(x^2 - 1)$
j) $f(x) = cos^3 x$
k) $f(x) = (-2x^5 + 3)^2$
l) $f(x) = (1 - x^{15})^4$
m) $f(x) = (e^x - 20x^3)^3$
n) $f(x) = e^x.log_3 x - 10x$
o) $f(x) = (e^x - lnx.x)^3$
p) $f(x) = (2^x - cosx.senx + e^x)^2$
q) $f(x) = (cosx + e^x)^2.(senx - e^x)^3$
r) $f(x) = \frac{1}{x^{15}}$
s) $f(x) = \frac{5x}{e^{2x}}$
t) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$
u) $f(x) = \frac{x^2.cosx}{e^{3x}}$
v) $f(x) = \frac{x^2.senx}{5x^3.e^x}$
w) $f(x) = \frac{(2x^2 - 1).(-7x + 3)}{10^x}$
x) $f(x) = \left[\frac{(2x^2).(-x+3).(x^3)}{e^x}\right]^3$

2) Calcule a derivada das seguintes funções trigonométricas:

a) $f(x) = sec^2 x$
b) $f(x) = tg^2 x$
c) $f(x) = cosx - x.cossecx$
d) $f(x) = sec^2 x - tg^2 x$
e) $f(x) = sen^2 x - cos^2 x$
f) $f(x) = cos^2 x.cossecx$
g) $f(x) = cos^3 x.sen^4 x$
h) $f(x) = cossecx + cotgx$
i) $f(x) = secx - tgx$
j) $f(x) = \frac{1}{cosx}$
k) $f(x) = \frac{1}{senx.cosx}$
l) $f(x) = \frac{senx}{1 + cosx}$
m) $f(x) = \frac{tgx}{senx - cosx}$
n) $f(x) = \frac{senx.secx}{1 - x.tgx}$
o) $f(x) = \left[\frac{senx + cosx}{senx - cosx}\right]^2$

3) Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}} - 1}{cosx}$
b) $f(x) = \frac{9x^{\frac{-1}{2}} + x}{secx}$
c) $f(x) = \frac{x^{\frac{5}{4}} - 4x^{\frac{1}{4}}}{2^x}$
d) $f(x) = \left[\frac{(cosx)^{\frac{3}{4}}}{tgx}\right]^{\frac{1}{2}}$

4) Calcular a equação da reta tangente às funções no ponto dado.

a) $f(x) = (e^x - \frac{1}{x})^2$ no ponto $x_0 = 1$.
b) $f(x) = (2.senx - cosx)^4$ no ponto $x_0 = \pi$.
c) $f(x) = (e^x - x^5)^3$ no ponto $x_0 = 0$.
d) $f(x) = tgx$ no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

19.5.5. Regra da cadeia (derivação de uma função composta)

Seja a função g derivável em x e a função f derivável em $g(x)$, então a função composta $f(g(x))$ também será derivável em x e pode assim ser calculada:

$$f(x) = f\big(g(x)\big) \Rightarrow f'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Usando a notação de Leibniz com $y = f(z)$ e $z = g(x)$, escrevemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}.$$

Demonstração: Para demonstração usaremos a concepção de derivada como taxa de variação Δ (conteúdo que será visto em detalhes na seção 20.5).

Fazendo $y = f(z) = f\big(g(x)\big)$ e $z = g(x)$, temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z}.\frac{\Delta z}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Como $y = f(z)$ e $z = g(x)$ são deriváveis, os limites $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}$ e $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}$ são finitos, e portanto, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ também. Assim, $y = f(z)$ é derivável e sua derivada é: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z}.\frac{\Delta z}{\Delta x}$, o que corresponde à $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}}$ ou $\boxed{f'(x) = f'(g(x)).g'(x)}$.

É imediato que a aplicação da regra da cadeia se estende a mais funções compostas. Veja o caso para três funções $y = f(t)$, $t = f(z)$ e $z = g(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dz}.\frac{dz}{dx}.$$

O termo "cadeia" se refere ao encandeamento. Para derivar uma função composta, devemos encadear os produtos entre as derivadas das funções compostas envolvidas, de forma que, se pudéssemos "cancelar" os termos iguais do numerador e do denominador sobraria a derivada pretendida. Veja o caso para três funções:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{dt}}.\frac{\cancel{dt}}{\cancel{dz}}.\frac{\cancel{dz}}{dx}$$

Exemplos: Vamos derivar as seguintes funções.

- $f(x) = cos4x$

Como se trata de função composta, faremos $y = cosz$ e $z = 4x$, isso implica em $\frac{dy}{dx} = -senz$ e $\frac{dz}{dx} = 4$. Assim,

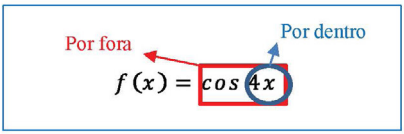
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = -sen\underbrace{z}_{4x}.4 = -4.sen4x \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -4.sen4x}.$$

Didaticamente, podemos utilizar a regra da cadeira da seguinte maneira: A derivada da função composta é o produto da derivada da função "de fora" pela derivada da função "de dentro".

Derivando por fora: $-sen4x$.

Derivando por dentro: 4.

O produto: $\boxed{f'(x) = -4.sen4x}$.

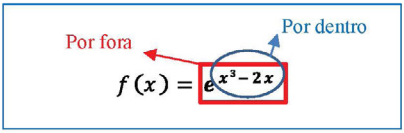


- $f(x) = e^{x^3-2x}$

Derivando por fora: e^{x^3-2x}.

Derivando por dentro: $3x^2 - 2$.

O produto: $\boxed{f'(x) = e^{x^3-2x}.(3x^2-2)}$.



Alternativamente, utilizando a notação de Leibniz para $z = x^3 - 2x$, temos

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = 3x^2 - 2} \text{ e } y = e^z \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dz} = e^z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^z.(3x^2-2) = \boxed{e^{x^3-2x}.(3x^2-2)}.$$

- $f(x) = \sqrt{x^3+1}$

Derivando por fora: $(x^3+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}(x^3+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}$.

Derivando por dentro: $3x^2$.

O produto: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+1}}.3x^2 \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}$.

Utilizando a notação de Leibniz para $z = x^3 + 1$, obtemos:

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = 3x^2} \; e \; y = \sqrt{z} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z}}}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2.\frac{1}{2\sqrt{z}} = \boxed{\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}.$$

- $f(x) = sen^4(5x^2-3)$

Derivando por fora: $4.sen^3(5x^2-3).\cos(5x^2-3)$

Derivando por dentro: $10x$

O produto: $f'(x) = 10x.4.sen^3(5x^2-3)\cos(5x^2-3)$

$$f'(x) = \boxed{40xsen^3(5x^2-3)cos(5x^2-3)}.$$

Usando a notação de Leibniz e fazendo $z = 5x^2 - 3, t = senz$ e $y = t^4$, temos

$$\boxed{\frac{dz}{dx} = 10x}; \boxed{\frac{dt}{dz} = cosz}; \boxed{\frac{dy}{dt} = 4.t^3}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dz}.\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = [4.t^3].[cosz].[10x] = \boxed{40xsen^3(5x^2-3)cos\,(5x^2-3)}.$$

- $f(x) = cos^3(tg(2x.lnx))$

Derivando por fora: $3.cos^2(tg(2x.lnx))$

Derivando por dentro: $-sen(tg(2x.lnx)$

Derivando o dentro do dentro, ou seja, a função $tg(2x.lnx)$:

Derivando por fora: $sec^2(2x.lnx)$

Derivando por dentro: $(2.lnx + 2x.\frac{1}{x} = 2(lnx+1)$

O produto: $[3.cos^2(tg(2x.lnx))].[-sen(tg(2x.lnx)].[sec^2(2x.lnx)].[2(lnx+1)] =$

$\boxed{-6.cos^2(tg(2x.lnx)).sen(tg(2x.lnx)).sec^2(2x.lnx).(lnx+1)}$.

Usando a notação de Leibniz e fazendo $z = 2x.lnx$, $t = tgz$, $u = cost$ e $y = u^3$, temos

$$\frac{dz}{dx} = 2.lnx + 2x.\frac{1}{x} = 2(lnx+1)$$

$$\boxed{\frac{dt}{dz} = sec^2z}; \boxed{\frac{du}{dt} = -sent}; \boxed{\frac{dy}{du} = 3.u^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dz}.\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3.u^2.(-sent).sec^2z.2(lnx+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -6.\underbrace{u}_{cost}{}^2.sen\,\underbrace{t}_{tgz}.sec^2\,\underbrace{z}_{2x.lnx}.(lnx+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -6.cos^2\,\underbrace{t}_{tg(2x.lnx)}.sen(tg\,\underbrace{z}_{2x.lnx}).sec^2(2x.lnx).(lnx+1)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -6.cos^2(tg(2x.lnx)).sen(tg(2x.lnx)).sec^2(2x.lnx).(lnx+1)}.$$

- $f(x) = (senx)^{x^2+1}$

Não podemos aplicar diretamente a regra da cadeia, pois não se trata de uma função composta. Usaremos o seguinte artifício algébrico:

$f(x) = (senx)^{x^2+1} = \left(e^{ln\,(senx)}\right)^{x^2+1} = e^{ln(senx).(x^2+1)}$

Derivando por fora: $e^{ln(senx).(x^2+1)}$

Derivando por dentro: $\frac{cosx}{senx}.(x^2+1) + 2x.ln\,(senx)$

O produto: $f'(x) = e^{ln(senx).(x^2+1)}.\left(\frac{cosx}{senx}.(x^2+1) + 2x.ln\,(senx)\right)$

Substituindo $e^{ln(senx).(x^2+1)}$ pela função inicial: $(senx)^{x^2+1}$, temos

$$\boxed{f'(x) = (senx)^{x^2+1}.\left(\frac{cosx}{senx}.(x^2+1) + 2x.ln\,(senx)\right)}.$$

Fica como exercício, a aplicação da regra da cadeia utilizando a notação de Leibniz.

EXERCÍCIOS 19.5

1) Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = sen5x$

b) $f(x) = cos^2 9x$

c) $f(x) = 5^{7x^2-4x}$

d) $f(x) = e^{cos^2 4x}$

e) $f(x) = cos^3 x - sen^3 x$

f) $f(x) = e^x + e^{-x}$

g) $f(x) = cos^2(sen8x)$

h) $f(x) = cos\,(6x).sen(2x^2)$

i) $f(x) = e^{sen5x}.cos5x$

j) $f(x) = 1 - x^2.cotg(x^2)$

k) $f(x) = \sqrt[5]{cos\,(1+2x)}$

l) $f(x) = (x^2.tg^2 x)^4$

m) $f(x) = \frac{sen(\,e^{-x})}{\sqrt{3x}}$

n) $f(x) = \frac{sen(-2x^2+x-1)}{tg(cosx)}$

2) Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = x^{x^2}$

c) $f(x) = x^{3x^3-1}$

d) $f(x) = (2x+1)^{2x+1}$

e) $f(x) = x^{e^x}$

f) $f(x) = (e^x)^{arctgx}$

3) Sendo as funções compostas $y = f(z)$, $z = g(t)$, $t = h(w)$ e $w = i(x)$, escreva $\frac{dy}{dx}$ a partir das derivadas dessas funções.

4) Algumas combinações de funções exponenciais são denominadas de funções hiperbólicas, dentre elas, o seno hiperbólico: $senh\,x = \frac{e^x - e^x}{2}$ e o cosseno hiperbólico: $cosh\,x = \frac{e^x + e^x}{2}$. Mostre que a derivada do seno hiperbólico é igual ao cosseno hiperbólico e vice-versa.

19.5.6. Derivada da função inversa

Seja uma função bijetora, contínua e derivável f, então a função $f^{-1}(y)$, com $y = f(x)$, também será derivável em x e sua derivada é calculada pelo inverso da derivada da função $f(x)$, ou seja

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Demonstração:

Como f é bijetora, derivável e contínua, decorre que Δx e Δy são diferentes de zero, e vale a igualdade, bem como a aplicação dos limites:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \Rightarrow \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}}.$$

Exemplos:

- $f(x) = log_a x$

$$f(x) = log_a x \Rightarrow y = log_a x \Rightarrow x = a^y \Rightarrow x' = a^y . lna \Rightarrow$$

$$x' = a^{log_a x} . lna \Rightarrow \boxed{x' = x.lna}, como\ y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{x.lna}}.$$

- $f(x) = ln\,(4x + 1)$

$$y = ln\,(4x + 1) \Rightarrow 4x + 1 = e^y \Rightarrow x = \frac{e^y - 1}{4} \Rightarrow x' = \frac{e^y}{4}$$

Como $y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow y' = \frac{1}{\frac{e^y}{4}} = \frac{4}{e^y}$. Porém, $y = l\,n(4x + 1)$, assim

$$y' = \frac{4}{e^{l\,n(4x+1)}} = \boxed{\frac{4}{4x+1}}.$$

É óbvio que usando a regra da cadeia a solução seria bem mais simples. Veja:

$$\underbrace{\frac{1}{4x+1}}_{derivando\ por\ fora} \cdot \underbrace{4}_{derivando\ por\ fora} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{4}{4x+1}}.$$

O objetivo é mostrar a aplicabilidade da derivada da função inversa.

- $f(x) = arc\ sen\,x$

$$y = arc\ sen\,x \Rightarrow x = sen\,y \Rightarrow x' = cosy.$$

$$y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow y' = \frac{1}{cosy}.$$

Como, $cos^2 y = \sqrt{1 - sen^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Temos

$$\boxed{f(x) = arc\ \text{sen}\,x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

De forma análoga, é possível mostrar que:

$$\boxed{f(x) = arc\ \cos x \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$\boxed{f(x) = arc\ \text{tg}\,x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

As demonstrações dessas duas últimas fórmulas serão cobradas nos exercícios 19.6 a seguir.

19.6. Derivadas sucessivas

A derivada f' (ou y') de uma função f é outra função que pode ser também derivável. Se f' for derivável, denotamos por f'' (ou y'') e denominamos de derivada segunda ou derivada de segunda ordem. Se a função f'' for derivável, denotamos por f''' (ou y''') e denominamos de derivada terceira ou derivada de terceira ordem. Podemos continuar o processo de derivação sucessivamente e obter derivadas de quarta, quinta, sexta,..., ordem, onde denotamos de $f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}$, ..., respectivamente.

Usando a notação de Leibniz escrevemos:

$y' = \frac{dy}{dx}$ ⇒ derivada (ou derivada de primeira ordem).

$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$ ⇒ derivada de segunda ordem ou segunda derivada.

$y''' = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d^3y}{dx^3}$ ⇒ derivada de terceira ordem ou terceira derivada.

$\vdots$

$y^n = \frac{d^ny}{dx^n}$ ⇒ derivada de ordem n ou enésima derivada.

Exemplos:

- $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 2x + 8$

$f'(x) = -4x^3 - 6x^2 + 14x - 2$

$f''(x) = -12x^2 - 12x + 14$

$f'''(x) = -24x - 12$

$f^{(4)}(x) = -24$

$f^{(5)}(x) = 0 \Rightarrow f^{(6)}(x) = 0,\ f^{(7)}(x) = 0, f^{(8)}(x) = 0,\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = 0.$

- $f(x) = senx$

$f'(x) = cosx$

$f''(x) = -senx$

$f'''(x) = -cosx$

$f^{(4)}(x) = senx$

$\vdots$

$Se\ o\ resto\ da\ divisão\ de\ n\ por\ 4, for: \begin{cases} 1,\ f^{(n)}(x) = cosx \\ 2,\ f^{(n)}(x) = -senx \\ 3,\ f^{(n)}(x) = -cosx \\ 4,\ f^{(n)}(x) = senx \end{cases}.$

A importância e a aplicação das derivações (sucessivas) de ordem n será vista na unidade seguinte sobre derivada em gráficos e aplicações.

19.7. Derivada implícita

Todas as funções que vimos até o presente momento foram dadas explicitamente, ou seja, a função y (ou $f(x)$ se preferir) se apresentava isolada no 1º membro da equação. Nesse caso, o cálculo da derivada é imediato.

Nesta seção, verificaremos uma modalidade de derivação, denominada de **derivação implícita,** em que y não está explicitamente no 1º membro da equação, isto é, y pode estar em ambos ou em algum dos membros da equação (não isolado).

O método da derivação implícita consiste em derivar ambos os membros da equação em relação à x e, em seguida, isolar a derivada y'.

Exemplo: Considerando a equação da curva $x^2 + y^2 = 100$, calcule.

a) A derivada y'.

Solução: Utilizando a derivação implícita.

1º passo: Derivar ambos os membros da equação em relação à x.

$$2x + 2y.y' = 0$$

Atente-se à utilização da regra da cadeia ao derivar y^2. Derivando por fora: $2y$ e derivando por dentro: y'.

2º passo: Isolar y'.

$$y' = \frac{-2x}{2y} \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x}{y}}.$$

Outra solução: A equação $x^2 + y^2 = 100$ representa uma circunferência de raio 10 no plano cartesiano e não uma função. Porém, considerando somente a parte positiva de y, temos uma função na forma

$$y = \sqrt{100 - x^2}.$$

Cuja derivada é

$$y' = \frac{1.(-2x)}{2\underbrace{\sqrt{100 - x^2}}_{y}} = -\frac{x}{y}.$$

Considerando a parte negativa de y, encontramos: $y' = \frac{x}{y}$

b) A equação das retas tangentes à curva em $x = 8$.

Solução:

$$x^2 + y^2 = 100 \Rightarrow 8^2 + y^2 = 100 \Rightarrow$$
$$8^2 + y^2 = 100 - 64 \Rightarrow \boxed{y = \pm 6}.$$

No ponto (8, 6) o coeficiente angular da reta tangente à circunferência é

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}.$$

E a equação dessa reta é:

$$y - 6 = -\frac{4}{3}(x - 8) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{4}{3}x + \frac{50}{3}}.$$

No ponto (8, -6) o coeficiente angular da reta tangente à circunferência é

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{8}{(-6)} = \frac{4}{3}.$$

E a equação dessa reta é

$$y + 6 = \frac{4}{3}(x - 8) \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}x - \frac{50}{3}}.$$

A circunferências e as duas retas tangentes estão na figura 19.7.1.

2º exemplo: Considerando a curva de equação $y^3 + y = 2x$, calcule:

a) A derivada y'.

Solução: Derivar ambos os membros da equação em relação à x.

$$\underbrace{3y^2.y'} + y' = 2$$

Atente-se à utilização da regra da cadeia ao derivar y^3. Derivando por fora: $3y^2$ e derivando por dentro: y'.

$$y'(3y^2 + 1) = 2$$

$$\boxed{y' = \frac{2}{3y^2 + 1}}.$$

b) A equação da reta tangente à curva em $x = 1$.

Solução:

Para $x = 1$, obtém-se

$$y^3 + y = 2x \Rightarrow y^3 + y = 2.1 \Rightarrow y^3 + y = 2.$$

Cuja solução é $y = 1$. Assim, o coeficiente angular da reta tangente à curva é

$$y' = \frac{2}{3y^2 + 1} = \frac{2}{3.1^2 + 1} = \frac{2}{4} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{1}{2}}.$$

E a equação de reta igual a

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}.$$

A curva e a reta estão na figura 19.7.2.

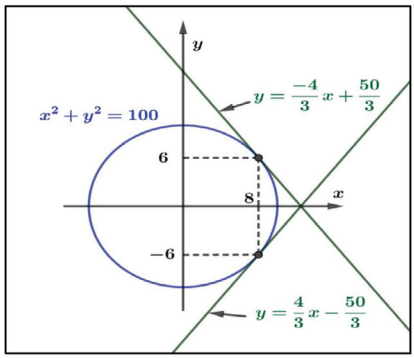


Figura 19.7.1

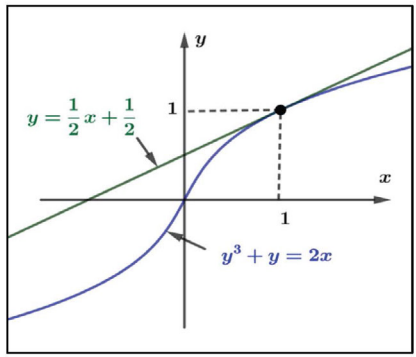


Figura 19.7.2

3º exemplo: Se $y^3 - x^3 = 1$ encontre $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Solução: Trata-se da derivada de segunda ordem. Calculando a 1ª derivada:

$$3y^2.y' - 3x^2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{3y^2} \Rightarrow \boxed{y' = \frac{x^2}{y^2}}.$$

Calculando a 2ª derivada utilizando a derivada do quociente

$$y'' = \frac{2x.y^2 - 2y.y'.x^2}{(y^2)^2} = \frac{2x.y^2 - 2y.y'.x^2}{y^4}.$$

Substituindo $y' = \frac{x^2}{y^2}$, concluímos que

$$y'' = \frac{2x.y^2 - 2y.\frac{x^2}{y^2}.x^2}{y^4} = \frac{2x.y^3 - 2.x^4}{y^5} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x.y^3 - 2.x^4}{y^5}}.$$

EXERCÍCIOS 19.6

1) Calcule a derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{arc\ senx}$
b) $f(x) = \frac{1}{arc\ cosx}$
c) $f(x) = (arc\ tgx)^2$
d) $f(x) = ln(arc\ senx)$
e) $f(x) = arc\ sen(lnx)$
f) $f(x) = arc\ tg(e^x.x)$
g) $f(x) = ln(\frac{arc\ cosx}{arc\ senx})$
h) $f(x) = (e^x)^{arc\ tgx}$

2) Calcule as derivadas de segunda ordem das seguintes funções:

a) $f(x) = lnx$
b) $f(x) = 5^x$
c) $f(x) = cosx - senx$
d) $f(x) = e^x.senx$

3) Calcule as derivadas sucessivas, generalizando para derivada de ordem n.

a) $f(x) = 2x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$
b) $f(x) = 11^x$
c) $f(x) = e^x$
d) $f(x) = cosx$

4) Demonstre que a função derivada de $arc\ cos\ x$ é $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $arc\ tg\ x$ é $\frac{1}{1+x^2}$.

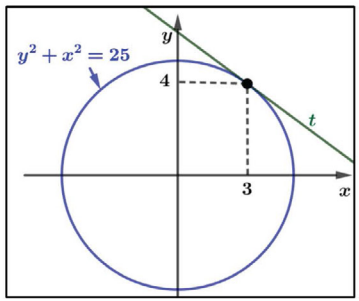
Utilize os dois métodos: derivada da função inversa e a derivada implícita.

5) Calcule a derivada implícita y' das seguintes curvas de equações:

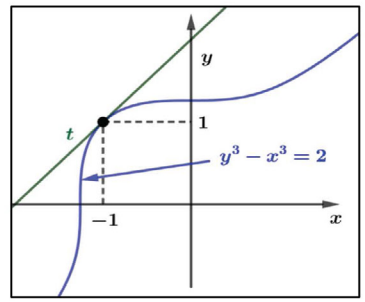
a) $x^2 + y^2 = 1$.
b) $x^2 + y^2 = 9$.
c) $x^2 + 4xy + y^2 = 4$.
d) $x^3 + x^2y + y^3 = 1$.
e) $x + y = e^{yx}$
f) $sen(x + y) = cosy$
g) $seny + cosx = tg(y + x)$
h) $yseny = e^{\frac{x}{y}}$

6) Use a derivada implícita para encontrar a equação da reta t tangente à curva no ponto dado:

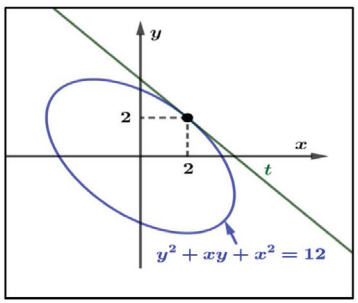
a)



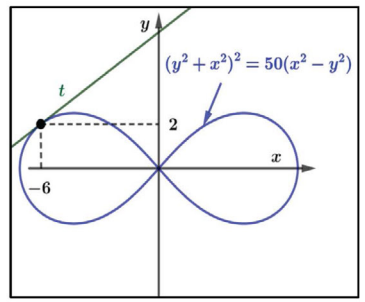
b)



c)



d)



7) Calcule a segunda derivada implícita y'' das seguintes curvas de equações:

a) $x^3 + y^2 = 1$. *b)* $senx + cosy = 1$. c) $x^4 + y^4 = 2$.

19.8. Tabela de derivadas básicas

$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x . lna$
$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n . x^{n-1}$	$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = senx \Rightarrow f'(x) = cosx$	$f(x) = cosx \Rightarrow f'(x) = -senx$
$f(x) = tgx \Rightarrow f'(x) = sec^2 x$	$f(x) = log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x . lna}$
$f(x) = lnx \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \text{arc sen } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = arc\ cos\ x \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \text{arc tg } x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

CAPÍTULO

20

A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES

A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES

20. A DERIVADA EM GRÁFICOS E APLICAÇÕES

Nesta unidade, estudaremos as aplicações da derivada na análise de gráficos de funções. A derivada é uma ferramenta poderosa que nos permite entender como as funções mudam, e as aplicações incluem identificação de pontos de máximo e mínimo, análise de variação, determinação de taxas de variação, resolução de problemas de otimização e modelagem matemática. Aprenderemos como usar essas técnicas para entender como as funções se comportam e como podem ser usadas para resolver problemas práticos.

20.1. Crescimento e decrescimento

Nesta seção, anunciaremos a definição 5.4.2 (volume 1) novamente através da definição 20.1.1 a seguir. Essa definição, versa sobre função crescente, decrescente e constante. Em seguida, veremos um importante teorema que utiliza a derivada da função para obtenção dessas informações.

Definição 20.1.1: Seja f uma função definida em um intervalo e sejam x_1 e x_2 pontos desse intervalo.

I. f é dita **crescente** nesse intervalo se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ (ver figura 20.1.1);

II. f é dita **decrescente** nesse intervalo se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ (ver figura 20.1.3);

III. f é dita **constante** nesse intervalo se $f(x_1) = f(x_2)$ para qualquer valor x_1 e x_2 (ver figura 20.1.5).

Teorema 20.1.1: Seja uma função f contínua em $[x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2).

I)Se $f'(x) > 0$, para qualquer valor de x em (x_1,x_2), então f é crescente em $[x_1,x_2]$;

II)Se $f'(x) < 0$, para qualquer valor de x em (x_1,x_2), então f é decrescente em $[x_1,x_2]$;

III)Se $f'(x) = 0$, para qualquer valor de x em (x_1,x_2), então f é constante

em $[x_1,x_2]$.

Demonstração: Seja $x_0 \in [x_1,x_2]$ e derivável em (x_1,x_2). Convencionando $x > x_0$, temos:

I)Se $f'(x) > 0$, temos $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, o quociente desse limite só será positivo, se $f(x) > f(x_0)$, ou seja, função crescente.

II)Se $f'(x) < 0$, temos $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$, o quociente desse limite só será negativo, se $f(x) < f(x_0)$, uma vez que $x > x_0$, ou seja, função decrescente.

III)Se $f'(x) = 0$, temos $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$, o quociente desse limite só será nulo, se $f(x) = f(x_0)$, uma vez que $x > x_0$, ou seja, função constante.

As afirmações do teorema 20.1.1, podem ser facilmente relembradas a partir de uma análise geométrica da derivada, isto é, dos coeficientes angulares das retas tangentes à função, ao longo dos pontos do intervalo.

Se a função for crescente em um intervalo, veja na figura 20.1.2, as retas tangentes à função ao longo dos pontos serão crescentes, o que implica em coeficientes angulares positivos e o que equivale a $f'(x) > 0$.

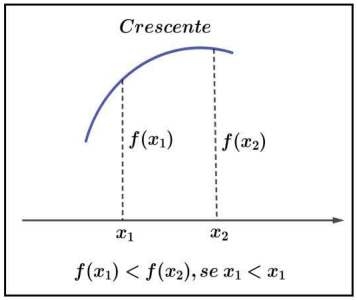


Figura 20.1.1

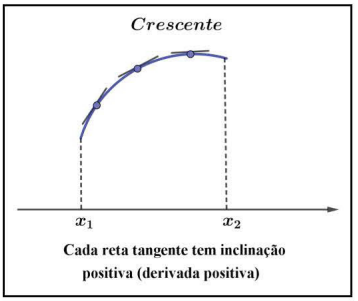


Figura 20.1.2

Se a função for decrescente em um intervalo, veja na figura 20.1.4, as retas tangentes à função ao longo dos pontos serão decrescentes, o que implica em coeficientes angulares negativos, e isso é o mesmo que $f'(x) < 0$.

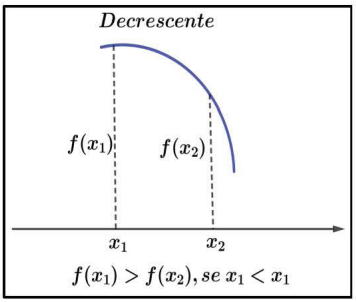


Figura 20.1.3

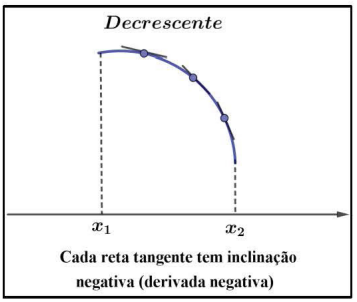


Figura 20.1.4

Por fim, se a função for constante em um intervalo, veja na figura 20.1.6, as retas tangentes coincidem com a reta constante e ambos com coeficientes angulares são iguais a zero, isto é, $f'(x) = 0$.

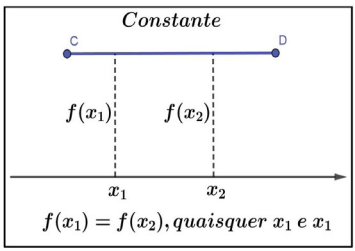


Figura 20.1.5

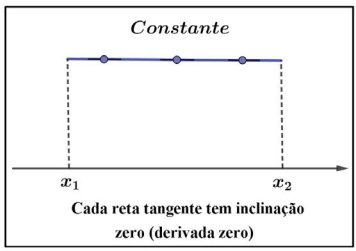


Figura 20.1.6

Os exemplos a seguir ajudarão no entendimento dessa ferramenta.

1° exemplo: Vamos analisar o crescimento e o decrescimento da função $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ usando a função derivada.

Solução: $f'(x) = -4x + 4$.

A função é crescente para $-4x + 4 > 0$ $(\times\ -1)$ $\Rightarrow$ $4x < 4$ $\Rightarrow x < \frac{4}{4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x < 1}$.

A função é decrescente para $-4x + 4 < 0$ $(\times\ -1) \Rightarrow$ $4x > 4$ $x > \frac{4}{4}$ $\Rightarrow$ $\boxed{x > 1}$.

A função não será crescente e nem decrescente (portanto, constante) no ponto $x = 1$, pois é o vértice da parábola (ver figura 20.1.7).

2° exemplo: Vamos analisar o crescimento e o decrescimento da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ usando a função derivada.

Solução: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0 \Rightarrow (a = 3, b = -4\ e\ c = 1)$.

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-4)^2 - 4.3.1 \Rightarrow \Delta = 4.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.3} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} x' = \dfrac{4+2}{6} = 1 \\ x'' = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

A função derivada está no gráfico da figura 20.1.8.

Essa função será negativa $(f'(x) < 0)$ para valores entre os zeros (x' e x''), ou seja, para $\frac{1}{3} < x < 1$ (observe na figura 20.1.8 que nesse intervalo a função derivada está abaixo do eixo x). E ela será positiva $(f'(x) > 0)$ para $x < \frac{1}{3}$ e $x > 1$ (perceba na figura 20.1.8 que, nesse intervalo, a função derivada está acima do eixo x).

Dessa forma, a função original será crescente nos intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ e $(1, +\infty)$,

decrescente no intervalo $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ e constante nos pontos $x = \frac{1}{3}$ e $x = 1$.

Veja o gráfico da função na figura 20.1.9.

3° exemplo: Vamos analisar o crescimento e o decrescimento da função $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ usando a função derivada.

Solução: $f'(x) = \frac{2x.e^x - x^2.e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2x - x^2)}{e^x.e^x} = \frac{(2x - x^2)}{e^x}$.

Uma vez que e^x é sempre positivo, para qualquer valor de x, então é suficiente analisarmos somente o numerador $2x - x^2$.

$2x - x^2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$.

$2x - x^2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 2 \\ x'' = 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) < 0$ para $x < 0$ e $x > 2$.

Desse modo, a função:

- É decrescente nos intervalos: (-∞, 0) e (2,+∞).
- É crescente no intervalo: (0, 2).
- É constante nos pontos: $x = 0$ e $x = 2$.

Veja o gráfico dessa função na figura 20.1.10.

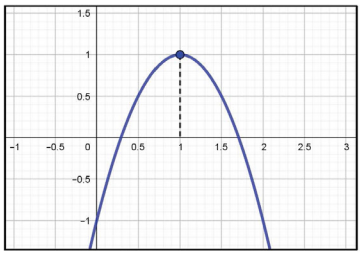


Figura 20.1.7

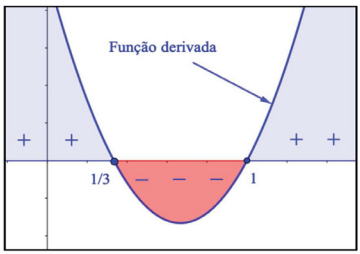


Figura 20.1.8

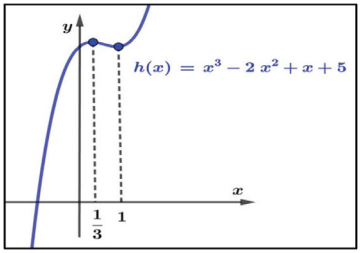


Figura 20.1.9

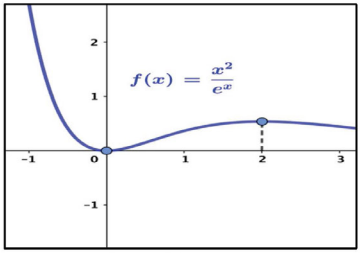


Figura 20.1.10

20.2. Concavidade e ponto de inflexão

Uma função f é dita **côncava para cima** ou **que possui concavidade para cima** quando, em um determinado intervalo, a abertura de sua curvatura for para cima. Veja a figura 20.2.1 no intervalo entre o ponto de inflexão e o ponto B.

Já uma função f é dita **côncava para baixo** ou **que possui concavidade para baixo** quando, em um determinado intervalo, a abertura de sua curvatura for para baixo. Veja a mesma figura 20.2.1 no intervalo entre o ponto de inflexão e o ponto A.

E quanto ao **ponto de inflexão,** é o ponto onde a função f muda de curvatura, seja de concavidade de cima para baixo ou de concavidade de baixo para cima.

Pela análise geométrica da derivada, uma função é côncava para cima, quando as retas tangentes estão abaixo da função, conforme a figura 20.2.2. E uma função é côncava para baixo, quando as retas tangentes estão acima da função, como ilustrado na figura 20.2.3.

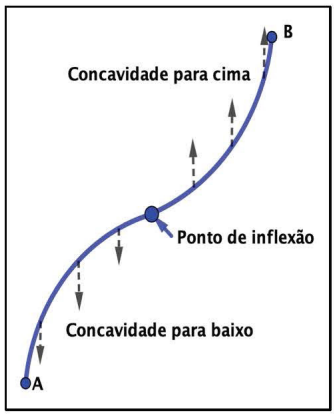


Figura 20.2.1

Figura 20.2.2

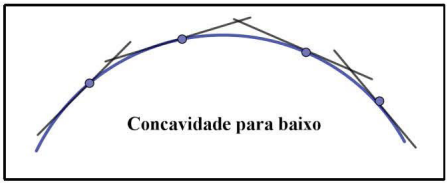


Figura 20.2.3

Nesse contexto, para saber se em um determinado intervalo a função é côncava para cima ou para baixo, devemos verificar se as retas tangentes à função $f(x)$, dadas por $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, estão abaixo ou acima da função f, ou seja, se $f(x) > T(x)$ ou $f(x) < T(x)$. Equivalente a isso, basta verificar se uma terceira função $g(x)$ dada por $g(x) = f(x) - T(x)$ e representada na figura 20.2.4, é maior que zero ou menor que zero. Faremos essa verificação analisando o sinal da derivada dessa função, da seguinte forma

$$g(x) = f(x) - T(x) \Rightarrow g'(x) = f'(x) - T'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

Para $x = x_0 \Rightarrow g'(x) = 0$.

Para $x > x_0$ há duas possibilidades:

$$\begin{cases} f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow função\ estritamente\ crescente \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \\ f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow função\ estritamente\ decrescente \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \end{cases}$$

Analogamente, para $x < x_0$ também há duas possibilidades:

$$\begin{cases} f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow função\ estritamente\ crescente \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \\ f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow função\ estritamente\ decrescente \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \end{cases}$$

Diante dessas possibilidades, analisar o sinal da segunda derivada $f''(x)$ corresponde a analisar o sinal de $g'(x)$ e, consequentemente, a concavidade da função no intervalo. Essas colocações demonstram o teorema a seguir.

Teorema 20.2.1 (Teste da concavidade): Seja uma função f duas vezes diferenciável em intervalo aberto de seu domínio, se $f''(x) > 0$ em qualquer x desse intervalo, então f é côncava para cima, se $f''(x) < 0$ em qualquer x desse intervalo, então f é côncava para baixo.

É imediato que o ponto em que $x = x_0$ é um candidato a ponto de inflexão, pois $x = x_0 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$ (a concavidade nesse ponto é nulo). Porém, essa é uma condição necessária, mas não suficiente. É preciso, além disso, que haja uma variação de sinal de $f''(x)$, ou seja, que ocorra uma mudança de concavidade imediatamente à esquerda e à direita de x_0 (ver figura 20.2.5). A análise dessa variação de sinal nos leva a terceira derivada $f'''(x)$ e ao teorema a seguir.

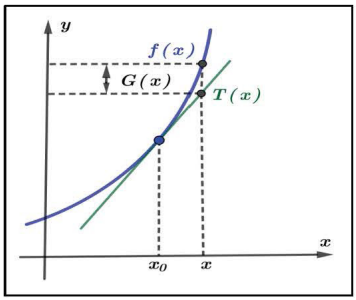


Figura 20.2.4

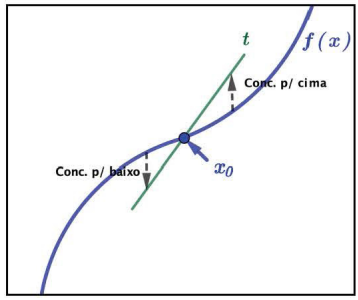


Figura 20.2.5

Teorema 20.2.2 (Teste do ponto de inflexão): Seja f uma função derivável até a terceira ordem em um intervalo aberto e seja x_0 um ponto pertencente a esse intervalo. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é abcissa de um ponto de inflexão.

Demonstração: Anteriormente, vimos que $g'(x)$ e $f''(x)$ tem o mesmo sinal. Uma possível mudança de concavidade ocorre nos casos em que $g'(x) > 0$ ou $g'(x) < 0$, isso equivale a analisar o crescimento e o decrescimento de $f''(x)$, ou seja, analisar $f'''(x)$.

Suponha que $f'''(x) > 0$. Neste caso, $f''(x)$ é estritamente crescente em um intervalo $]x_0 - p, x_0 + p[$ próximo de x_0 (com $p > 0$). Como necessariamente

$f''(x_0) = 0$, temos que $f''(x_0) < 0$ em $]x_0 - p, x_0[$ e $f''(x_0) > 0$ em $]x_0, x_0 + p[$.

O caso de $f'''(x) < 0$ é análogo.

Em ambos os casos, a mudança de sinal da concavidade em torno de x_0 é garantida pelo crescimento ou decrescimento de $f''(x_0)$, ou seja, para $f'''(x_0) \neq 0$.

1° exemplo: Já analisamos o crescimento e o decrescimento da função $f(x) = -2x^2 + 4x - 1$ anteriormente. Vamos verificar a concavidade e os pontos de inflexão.

Solução: $f'(x) = -4x + 4 \Rightarrow \boxed{f''(x) = -4}$.

A função tem concavidade para baixo para qualquer valor de x.

Quanto ao ponto de inflexão: $f'''(x) = 0$. Nada podemos afirmar pelo teste do ponto de inflexão. Porém, já sabemos que não há mudança de concavidade na função, e portanto, não existem pontos de inflexão.

O gráfico dessa função está na figura 20.2.6.

2° exemplo: Já analisamos o crescimento e o decrescimento da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ anteriormente. Vamos verificar a concavidade e os pontos de inflexão.

Solução: $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \boxed{f''(x) = 6x - 4}$.

A concavidade para cima, para: $6x - 4 > 0 \Rightarrow 6x > 4 \Rightarrow x > \frac{4}{6} \Rightarrow \boxed{x > \frac{2}{3}}$.

E a concavidade é para baixo quando: $\boxed{x < \frac{2}{3}}$.

É óbvio que $x = \frac{2}{3}$ é um ponto de inflexão, pois a concavidade muda de sinal em seu entorno. Mesmo assim, utilizando o teorema 20.2.2 (teste do ponto de inflexão), temos que $f'''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \neq 0$. Assim, o ponto de abscissa $x = \frac{2}{3}$ é realmente um ponto de inflexão.

Veja o gráfico dessa função na figura 20.2.7.

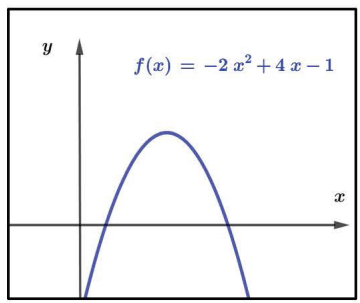


Figura 20.2.6

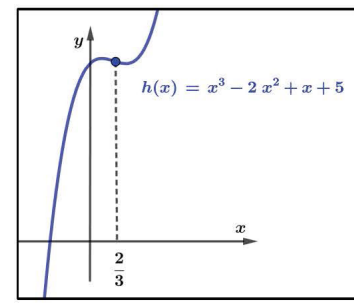


Figura 20.2.7

3° exemplo: Também já analisamos o crescimento e o decrescimento da função $f(x)=\frac{x^2}{e^x}$ anteriormente. Agora, vamos abordar a concavidade e os pontos de inflexão.

Solução: $f'(x)=\frac{(2x-x^2)}{e^x} \Rightarrow f''(x)=\frac{(2-2x).e^x-e^x.(2x-x^2)}{(e^x)^2} \Rightarrow$

$$\frac{e^x(2-2x-2x+x^2)}{e^x.e^x} \Rightarrow \boxed{f''(x)=\frac{2-4x+x^2}{e^x}}.$$

Como e^x é sempre positivo, analisemos somente $2-4x+x^2$.

$$2-4x+x^2 \Rightarrow (a=1; b=-4\ e\ c=2).$$

$$\Delta = b^2-4.a.c = (-4)^2-4.1.2 = 16-8 \Rightarrow \boxed{\Delta = 8}.$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{8}}{2.1}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=\begin{cases}x'=2-\sqrt{2}\\ x''=2+\sqrt{2}\end{cases}.$$

Uma vez que $a=1>0$, então a função terá concavidade para baixo no intervalo: $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$. E concavidade para cima nos intervalos: $x<2-\sqrt{2}\ e\ x>2+\sqrt{2}$.

Os possíveis pontos de inflexão são: $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$. Calculando a terceira derivada:

$$f''(x)=\frac{2-4x+x^2}{e^x} \Rightarrow f'''(x)=\frac{(-4+2x).e^x-e^x.(2-4x+x^2)}{e^x}=\boxed{\frac{(-6+6x-x^2)}{e^x}}.$$

Substituindo os pontos, encontramos:

$$f'''(2-\sqrt{2})=\frac{12-2\sqrt{2}}{e^{2-\sqrt{2}}}\ e\ f'''(2+\sqrt{2})=\frac{12+2\sqrt{2}}{e^{2+\sqrt{2}}}.$$

Como $f'''(2-\sqrt{2})\neq 0$ e $f'''(2+\sqrt{2})\neq 0$, os pontos de abscissa $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$ são pontos de inflexão. Observe no gráfico da função na figura 20.2.8.

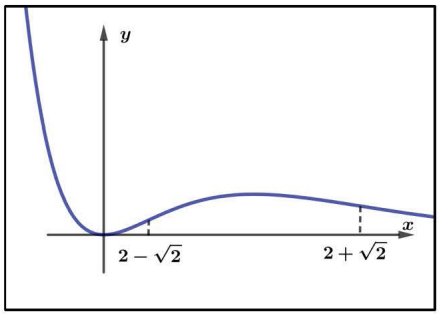


Figura 20.2.8

4° exemplo: Dada a função $f:[0,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x+cos2x$, calcule os intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade e pontos de inflexão.

Solução: $f'(x)=1-sen2x\,.2 \Rightarrow \boxed{f'(x)=1-2.sen2x}$.

Calculando o crescimento:

$$1 - 2.sen2x > 0 \Rightarrow -2.sen2x > -1 \quad (\times -1) \Rightarrow$$

$$2.sen2x < 1 \Rightarrow sen2x < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1º\ intervalo \Rightarrow 0 + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2º\ intervalo \Rightarrow \frac{5\pi}{6} + 2k\pi < 2x > 2\pi + 2k\pi \end{cases}.$$

Como o domínio da função é $[0,2\pi]$, o arco $2x$ do cosseno da função varia até 4π (duas voltas). Sendo assim a função é crescente nos intervalos:

$$Para\ k = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1º\ intervalo \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{12} \\ 2º\ intervalo \Rightarrow \frac{5\pi}{12} < x < \pi \end{cases}.$$

$$Para\ k = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3º\ intervalo \Rightarrow 0 + 2\pi < 2x < \frac{\pi}{6} + 2\pi \Rightarrow \pi < x < \frac{13\pi}{12} \\ 4º\ intervalo \Rightarrow \frac{5\pi}{6} + 2\pi < 2x > 2\pi + 2\pi \Rightarrow \frac{17\pi}{12} < x < 2\pi \end{cases}.$$

Calculando o decrescimento:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow sen2x > \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}.$$

$$Para \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow 1º\ intervalo \Rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \\ k = 1 \Rightarrow 2º\ intervalo \Rightarrow \frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12} \end{cases}.$$

Calculando a concavidade para cima:

$$f'(x) = 1 - 2.sen2x \Rightarrow \boxed{f''(x) = -4.cos2x}.$$

$$-4.cos2x > 0 \quad (\times -1) \Rightarrow cos2x < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi}.$$

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}} \\ k = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + 2k\pi < 2x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{5\pi}{2} < 2x < \frac{7\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}} \end{cases}.$$

Calculando a concavidade para baixo:

$$-4.cos2x < 0 \quad (\times -1) \Rightarrow cos2x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 + 2k\pi < 2x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi < 2x < 2\pi + 2k\pi \end{cases}.$$

$$Para\ k = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1º\ intervalo \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 2º\ intervalo \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < x < \pi \end{cases}.$$

$$Para\ k = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3º\ intervalo \Rightarrow \pi < x < \frac{5\pi}{4} \\ 4º\ intervalo \Rightarrow \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi \end{cases}.$$

Os possíveis pontos de inflexão são: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$. **Calculando a terceira derivada:**

$$f''(x) = -4.cos2x \Rightarrow \boxed{f'''(x) = 8.sen2x}.$$

Como $f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) \neq 0, f'''\left(\frac{3\pi}{4}\right) \neq 0, f'''\left(\frac{5\pi}{4}\right) \neq 0$ e $f'''\left(\frac{7\pi}{4}\right) \neq 0$. Esses são, de fato, pontos de inflexão.

Todas essas informações podem ser constatadas no gráfico dessa função na figura 20.2.9.

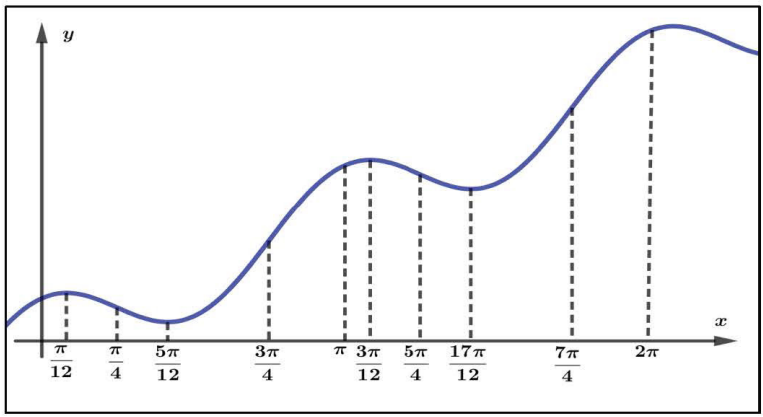


Figura 20.2.9

O teorema 20.2.2 (teste do ponto de inflexão) apenas nos garante que, se em um ponto x_0 tem-se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é um ponto de inflexão. Porém, nada se pode afirmar quando $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, sendo preciso, portanto, uma inspeção sobre a mudança de concavidade da função em torno de x_0. A seguir está um exemplo.

5° exemplo: Dada a função $f(x) = -x^6 + \frac{3}{2}x^5$, calcule os intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade e pontos de inflexão.

Solução:

$\boxed{f'(x) = -6x^5 + \frac{15}{2}x^4}$ e $\boxed{f''(x) = -30x^4 + 30x^3}$.

Calculando o crescimento:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -6x^5 + \frac{15}{2}x^4 > 0 \Rightarrow x^4\left(-6x + \frac{15}{2}\right) > 0.$$

Como x^4 é sempre positivo, basta fazer $-6x + \frac{15}{2} > 0$. Logo: $\boxed{x < \frac{5}{4}} \Leftarrow crescente.$

$-6x + \frac{15}{2} < 0 \Rightarrow \boxed{x > \frac{5}{4}} \Leftarrow decrescente.$ E $\boxed{x = \frac{5}{4}}$ e $\boxed{x = 0} \Leftarrow constante.$

Calculando a concavidade:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow -30x^4 + 30x^3 > 0 \Rightarrow 30x^3(-x+1) > 0.$$

Nesse caso, há duas hipóteses: $30x^3 > 0$ *e* $(-x+1) > 0$ ou $30x^3 < 0$ *e* $(-x+1) < 0$.

A segunda hipótese é impossível, restando: $\boxed{0 < x < 1} \Leftarrow$ *conc. para cima.*

$$f''(x) < 0 \Rightarrow -30x^4 + 30x^3 < 0 \Rightarrow 30x^3(-x+1) < 0.$$

Também há duas hipóteses: $\boxed{x < 0 \text{ ou } x > 1} \Leftarrow$ *conc. para baixo.*

Possíveis pontos de inflexão:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -30x^4 + 30x^3 = 0 \Rightarrow 30x^3(-x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Teste dos candidatos a pontos de inflexão: $f'''(x) = -120x^3 + 90x^2$

Para $x = 1 \Rightarrow f'''(x) = -30 \neq 0 \Rightarrow$ É um ponto de inflexão.

Para $x = 0 \Rightarrow f'''(x) = 0 \Rightarrow$ É inconclusivo. Vamos inspecionar uma possível mudança de concavidade da função em torno do ponto de abscissa $x = 0$:

Para $x < 0$ *(próximo de zero)* $\Rightarrow f'''^{(x)} = -30x^4 + 30x^3 = 30x^3(-x+1) < 0$;

Para $x > 0$ *(próximo de zero)* $\Rightarrow f''(x) = -30x^4 + 30x^3 = 30x^3(-x+1) > 0$.

Como há mudança de concavidade, o ponto de abscissa $x = 0$ é um ponto de inflexão.

O gráfico dessa função na figura 20.2.10 ratifica essas informações.

O último exemplo a seguir mostra que $f'''(x_0) = 0$ e x_0 não é um ponto de inflexão.

6° exemplo: Calcule os pontos de inflexão da função $f(x) = (x-1)^4$.

Solução:

$\boxed{f'(x) = 4(x-1)^3}$, $\boxed{f''(x) = 12(x-1)^2}$ *e* $\boxed{f'''(x) = 24(x-1)}$

Possíveis pontos de inflexão: $f''(x) = 12(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

Teste do ponto de inflexão: $f'''(x) = 24(x-1) \Rightarrow f'''(1) = 24(1-1) = 0$

O teste é inconclusivo, porém a função é côncava para cima para qualquer $x \neq 1$. Não havendo, portanto, mudança de concavidade. Veja o gráfico dessa função na figura 20.2.11.

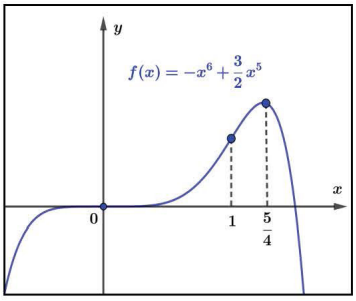


Figura 20.2.10

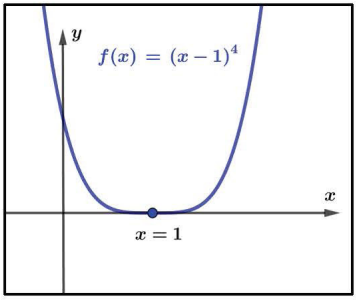


Figura 20.2.11

EXERCÍCIOS 20.1

1) Calcule os intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade e possíveis pontos de inflexão das seguintes funções.

a) $f(x) = 2x + 1$

b) $f(x) = -3x + 8$

c) $f(x) = x^2 - 5x$

d) $f(x) = x^2 - 9$

e) $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

f) $f(x) = x^3$

g) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

h) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$

i) $f(x) = x^4 + 32x$

j) $f(x) = x^5 + \frac{5}{2}x^4$

k) $f(x) = x^6 - \frac{12}{5}x^5$

l) $f(x) = \frac{1}{x}$

m) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

n) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

o) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

p) $f(x) = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$

q) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 8}$

r) $f(x) = (2x - 4)^{\frac{1}{3}}$

s) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & se\ x < 1 \\ -x^2 & se\ x \geq 1 \end{cases}$

t) $f(x) = e^{x^2}$

u) $f(x) = e^x - x$

v) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

w) $f(x) = x.e^x$

2) Calcule os intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade e possíveis pontos de inflexão das seguintes funções.

a) $f(x) = senx - cosx \Rightarrow D: [0, 2\pi]$

b) $f(x) = sen^2(2x) \Rightarrow D: [0, \pi]$

c) $f(x) = 1 - cos(2x) \Rightarrow D: [0, \pi]$

d) $f(x) = ln\,(cos(2x)) \Rightarrow D: [0, \pi]$

e) $f(x) = x + 2cosx \Rightarrow D: [0, \pi]$

f) $f(x) = ln\,(x^2)$

g) $f(x) = ln\,(\sqrt{x^2 - 4})$

h) $f(x) = arcsen(x^2)$

3) Sobre a função $f(x) = x^4$, cujo gráfico está a seguir, é incorreto afirmar.

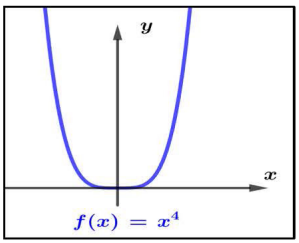
a) É crescente para $x > 0$;

b) É côncava para cima $\forall x \in \mathbb{R} | \ x \neq 0$;

c) Não possui ponto de inflexão;

d) É constante para $x = 0$;

e) Possui um ponto de inflexão em $x = 0$.



4) Usando o software geogebra, verifique se o ponto de abscissa $x = 2$ da função $f(x) = \sqrt[3]{2x - 4}$ é um ponto de inflexão. Explique porque o teorema 20.2.2 (teste do ponto de inflexão) não se aplica.

20.3. Extremos (máximos e mínimos)

Definição 20.3.1: Seja um intervalo (a,b) pertencente ao domínio[5] D de uma função f.

• Denominamos de **máximo absoluto** ou **máximo global** de f, o maior valor de $f(x_0)$ para $x_0 \in (a,b)$, ou seja, para qualquer valor de $x \in (a,b)$, tem-se $f(x_0) \geq f(x)$.

• Denominamos de **mínimo absoluto** ou **mínimo global** de f, o menor valor de $f(x_0)$ para $x_0 \in (a,b)$, isto é, para qualquer valor de $x \in (a,b)$, tem-se $f(x_0) \leq f(x)$.

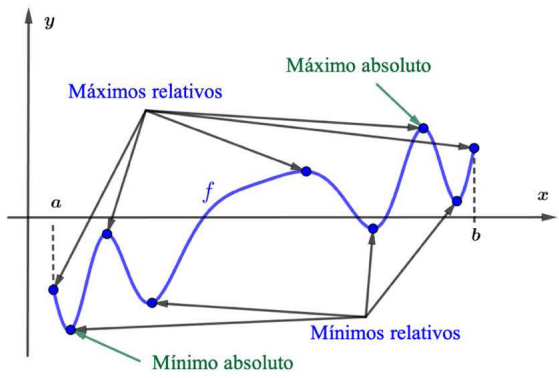
Definição 20.3.2: Seja um intervalo $(c,d) \subset (a,b)$ pertencente ao domínio D de uma função f.

• Denominamos de **máximo relativo** ou **máximo local** de f, o maior valor de $f(x_0)$ para $x_0 \in (c,d)$, ou seja, para qualquer valor de $x \in (c,d)$, tem-se $f(x_0) \geq f(x)$.

• Denominamos de **mínimo relativo** ou **mínimo local** de f, o menor valor de $f(x_0)$ para $x_0 \in (c,d)$, isto é, para qualquer valor de $x \in (c,d)$, tem-se $f(x_0) \leq f(x)$.

A definição 20.3.2 nos diz que o máximo e o mínimo relativo, são pontos mais altos e mais baixos de uma função em um intervalo (c,d) vizinho próximo de x_0, e não necessariamente o ponto mais alto e o ponto mais baixo da função em todo o intervalo (a,b). No entanto, se, por acaso forem os pontos mais altos e mais baixos da função em todo o intervalo (a,b), denominamo-los, respectivamente, de máximo absoluto e mínimo absoluto, conforme a definição 20.3.1. Em outros termos, o máximo absoluto é o maior dos máximos relativos, e o mínimo absoluto é o menor dos mínimos relativos em um intervalo (a,b).

Ilustração:



[5] Alguns autores definem um ponto máximo ou ponto mínimo absoluto de uma função, como o maior ou o menor dos pontos dentre todos os pontos do domínio da função e não de um intervalo (a,b) desse domínio. Questão de preferência apenas.

Os máximos e mínimos relativos ou absolutos de uma função, são denominados por generalidade, apenas de **extremos**.

Nem todas as funções possuem extremos. Porém, se a função for contínua em um intervalo fechado, a garantia da existência de extremos é assegurada pelo teorema a seguir.

Teorema 20.3.1 (Teorema do valor extremo ou teorema de Weierstrass[6]): Se f for contínua em um intervalo $[a,b]$, então f possui um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto nesse intervalo.

A demonstração desse teorema é complexa e está além dos objetivos desta obra, no entanto, é importante destacar algumas considerações sobre sua validade:

– É crucial que o intervalo seja fechado, pois, por exemplo, quem seria o valor máximo ou mínimo de $f(x) = x$ para o intervalo $]0,1[$?

– É indispensável que a função seja contínua no intervalo, pois, por exemplo, qual seria o valor máximo de $f(x) = 1/x$, para o intervalo $[0,1]$?

Agora, para convencer ainda mais o leitor da validade desse teorema, tente traçar o gráfico de qualquer função contínua no intervalo $[0,1]$ sem que haja um ponto máximo e um ponto mínimo. Não consegue? Pois bem! Diante da certeza da existência dos extremos em uma função, como podemos calculá-los?

A seguir estão teoremas bastante úteis nesse sentido, porém precisamos ainda da definição de ponto crítico.

Definição 20.3.3: Denominamos de **ponto crítico** de uma função f, o ponto x_0 do domínio em que $f'(x_0) = 0$ ou f não é derivável.

Teorema 20.3.2: Seja uma função f definida em um intervalo aberto[7] contendo o ponto x_0. Se f tiver um extremo em x_0, então x_0 é um **ponto crítico**.

Demonstração: Se x_0 é um ponto de mínimo relativo e a função é derivável em x_0, então os valores à esquerda de x_0 da função estão decrescendo $f'(x_0) < 0$ e os valores à direita de x_0 estão crescendo $f'(x_0) > 0$, implicando em $f'(x_0) = 0$ (função constante) no ponto x_0, uma vez que a função também é contínua. Matematicamente:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0 \ (\text{já que } x < x_0 \text{ e } f(x_0) \leq f(x)\ ) \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \ (\text{já que } x > x_0 \text{ e } f(x_0) \leq f(x)) \end{cases} \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

Se x_0 é um ponto de mínimo relativo e a função não é derivável em x_0, então devemos analisar os três casos possíveis de não derivabilidade vistos na seção 19.3.

---

[6] Karl Weierstrass (1815-1897)

[7] O intervalo foi anunciado aberto, apenas para excluir a verificação de extremos nos limites do intervalo. Existem exemplos mais adiante para intervalos fechados.

1) x_0 é um bico e mínimo relativo: as retas tangentes à função à esquerda e à direita de x_0 são, respectivamente, decrescentes e crescentes, portanto, as derivadas da função à esquerda e à direita são diferentes, ocasionando em não derivabilidade em x_0 (ver 1º caso da seção 19.3).

2) Em x_0 a reta tangente é vertical: não se aplica em um extremo;

3) x_0 é descontínuo e mínimo relativo: só existe a reta tangente à esquerda de x_0, portanto, a função não é derivável em x_0 (ver 3º caso da seção 19.3).

A demonstração para um ponto de máximo relativo e não derivabilidade em x_0 é análoga.

Uma condição particular desse teorema é anunciado como o teorema de Fermat[8] para funções deriváveis.

Teorema 20.3.3 (Teorema de Fermat): Seja uma função $f: D \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 \in D$, se x_0 é um extremo, então $f'(x_0) = 0$.

Exemplo: Veja no gráfico da figura 20.3.1, os extremos da função $f(x) = |x^2 - 3|x$ no intervalo $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, observando os pontos em que $f'(x_0) = 0$ (reta tangente paralela ao eixo x) e os pontos não deriváveis.

2º exemplo: O gráfico da função $f(x) = |x - 3|$ que está na figura 20.3.2, mostra um extremo (mínimo) em um ponto não derivável.

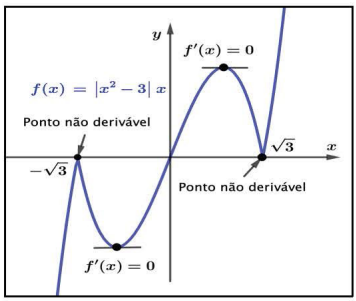


Figura 20.3.1

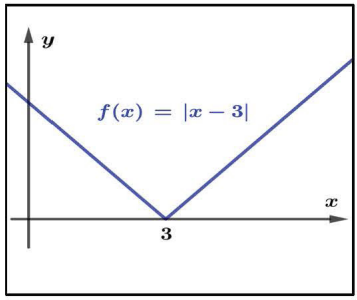


Figura 20.3.2

A recíproca desses dois teoremas é falsa. Um ponto crítico não significa um ponto extremo. Existem funções deriváveis em $x_0 \in D$ em que $f'(x_0) = 0$ ou não deriváveis em x_0, e mesmo assim, x_0 não é um extremo.

Exemplo: Analisemos os extremos da função $f(x) = (x-2)^3$.

$$f'(x) = 3(x-2)^2 \Rightarrow \boxed{f'(2) = 0}.$$

Veja no gráfico dessa função, na figura 20.3.3, que $x_0 = 2$ é um ponto crítico, mas não é um ponto extremo.

[8] Pierre de Fermat (1607-1665)

2º exemplo: Analisemos os extremos da função $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & se\ x<1 \\ 2{,}5 & se\ x=1 \\ x+2 & se\ x>1 \end{cases}$.

A função não é derivável em $x_0 = 1$, pois o $\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \neq \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, isto é, $x_0 = 1$ é um ponto crítico. Porém, não é um extremo. Ver o gráfico dessa função na figura 20.3.4.

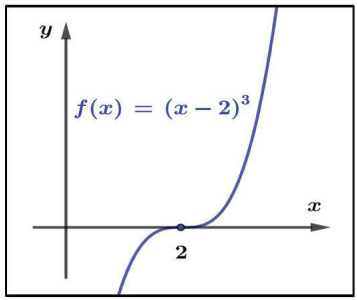


Figura 20.3.3

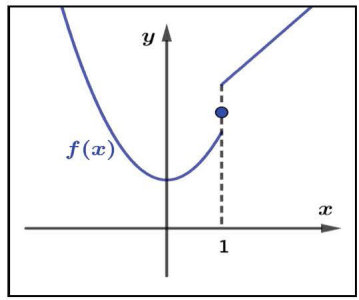


Figura 20.3.4

Diante desse contexto, como saber se um ponto crítico é um ponto extremo ou não, sem a visualização do gráfico? O teorema a seguir nos permite testá-lo.

Teorema 20.3.4 (Teste da derivada): Seja uma função f contínua em um **ponto crítico** x_0.

I) Se $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um máximo relativo em x_0.

II) Se $f'(x) < 0$ em um intervalo aberto imediatamente à esquerda de x_0 e $f'(x) > 0$ em um intervalo aberto imediatamente à direita de x_0, então f tem um mínimo relativo em x_0.

III) Se $f'(x)$ tiver o mesmo sinal em um intervalo aberto imediatamente à esquerda e à direita de x_0, então f não tem um extremo relativo em x_0.

Demonstração:

I)Para x imediatamente à esquerda de x_0, temos

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\ crescente\ \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Para x imediatamente à direita de x_0, encontramos

$$x > x_0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\ decrescente\ \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Então, x_0 é máximo relativo.

Nesse caso, os coeficientes angulares das retas tangentes à função passam de positivo (à esquerda de x_0) para negativo (à direita de x_0). Ver figura 20.3.5.

II) Para x imediatamente à direita de x_0, temos

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\ decrescente \ \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Para x imediatamente à direita de x_0, dispomos de

$$x > x_0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\ crescente \ \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Então, x_0 é mínimo relativo.

Para esse caso, os coeficientes angulares das retas tangentes à função passam de negativo (à esquerda de x_0) para positivo (à direita de x_0). Ver figura 20.3.6.

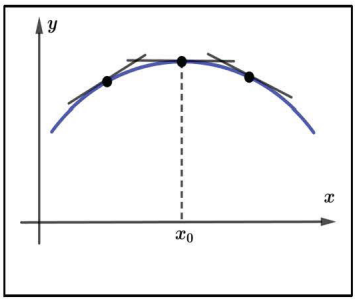


Figura 20.3.5

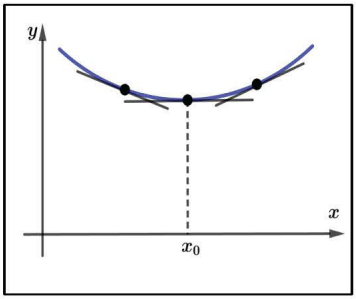


Figura 20.3.6

III) Para x imediatamente à direita e à esquerda de x_0 com o mesmo sinal, temos

$$x < x_0 \ \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\ crescente \ \Rightarrow \ f(x) \geq f(x_0).$$
$$x > x_0 \ \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\ crescente \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(x_0).$$

Nesse caso, x_0 não é mínimo e nem máximo relativo, ver figura 20.3.7. A figura 20.3.8 mostra o outro caso ($f(x)$ decrescente) cuja demonstração é análoga.

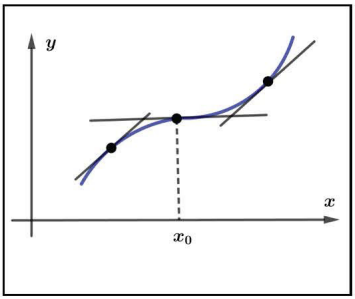


Figura 20.3.7

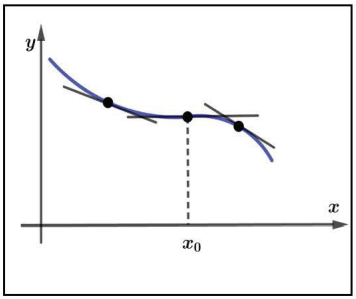


Figura 20.3.8

Exemplo: Vamos verificar os extremos da função $f(x) = x^4 - 8x^3$.

Solução: Como não foi especificado o intervalo, subentende-se verificar os extremos em todo o domínio da função. Calculemos então os pontos críticos.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 \ \Rightarrow \ f'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 4x^3 - 24x^2 = 0 \ \Rightarrow$$

$x^2\,(4x - 24) = 0 \Rightarrow$ as abscissas dos pontos críticos são : $\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 6 \end{cases}$.

Analisando os sinais de $f'(x)$ no ponto $x' = 0$:

x *imediatamente à esquerda* $(x < 0) \Rightarrow x^2\,(4x - 24) = f'(x) < 0.$

x *imediatamente à direita* $(x > 0) \Rightarrow x^2\,(4x - 24) = f'(x) < 0.$

Logo, $x' = 0$ não é um extremo.

Analisando os sinais $f'(x)$ no ponto de abscissa $x'' = 6$:

x *imediatamente à esquerda* $(x < 6) \Rightarrow x^2\,(4x - 24) = f'(x) < 0.$

x *imediatamente à direita* $(x > 6) \Rightarrow x^2\,(4x - 24) = f'(x) > 0.$

Logo, $x'' = 6$ é mínimo relativo.

Como o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, isso garante que $x'' = 6$ é também mínimo absoluto da função em todo seu domínio.

Ver gráfico dessa função na figura 20.3.9.

2º exemplo: Vamos verificar os extremos da função $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$.

Solução: $f'(x) = \frac{3x^2.e^x - e^x.x^3}{(e^x)^2} = \frac{x^2(3-x)}{e^x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^x} = 0$

$\frac{x^2(3-x)}{e^x} = 0 \Rightarrow$ as abscissas do pontos críticos são: $\begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 3 \end{cases}$.

Analisando os sinais de $f'(x)$ em $x' = 0$:

$$x \text{ imediatamente à esquerda } (x < 0) \Rightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^x} = f'(x) > 0.$$

$$x \text{ imediatamente à direita } (x > 0) \Rightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^x} = f'(x) > 0.$$

Logo, $x' = 0$ não é extremo relativo.

Analisando os sinais de $f'(x)$ em $x'' = 3$:

$$x < 3 \Rightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^x} = f'(x) > 0.$$

$$x > 3 \Rightarrow \frac{x^2(3-x)}{e^x} = f'(x) < 0.$$

Logo, $x'' = 3$ é máximo relativo.

Como o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, isso garante que $x'' = 3$ é também máximo absoluto da função em todo o seu domínio. Ver figura 20.3.10.

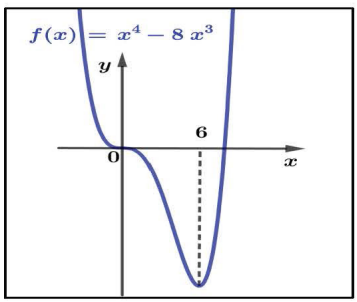


Figura 20.3.9

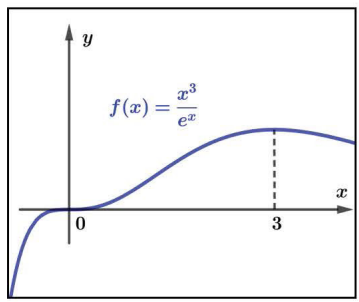


Figura 20.3.10

Algumas vezes a verificação de sinal à esquerda e à direita de x_0, principalmente quando se tem muitos pontos críticos a serem analisados, pode ser exaustiva. O teorema a seguir fornece um teste útil de verificação de extremos.

Teorema 20.3.5 (Teste da segunda derivada): Seja uma função f duas vezes derivável em um x_0.

I) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em x_0.

II) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em x_0.

III) Se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, então o teste é inconclusivo, ou seja, f pode ter máximo ou mínimo relativo em x_0 ou nenhum dos dois.

Demonstração: Suponha que $f''(x) > 0$. Neste caso, $f'(x)$ é estritamente crescente em um intervalo $]x_0 - p, x_0 + p[$ próximo de x_0 (com $p > 0$). Como $f'(x_0) = 0$, temos que $f'(x_0) < 0$ em $]x_0 - p, x_0[$ e $f'(x_0) > 0$ em $]x_0, x_0 + p[$. Pelo teorema 20.3.4 (teste da derivada), o ponto x_0 é um mínimo relativo.

O caso de $f''(x) < 0$ é análogo.

O leitor já deve ter percebido que esse teorema relaciona o extremo com o teste da concavidade de uma função. É tácito que se uma função é côncava para cima, então existe um mínimo relativo e se for côncava para baixo, há um máximo relativo, e pelo teorema 20.3.3 (teorema de Fermat) esse ponto extremo ocorre em $f'(x_0) = 0$. Além disso, é imediato também que a incerteza da concavidade torna o teste inconclusivo, sendo preciso, portanto, analisar os sinais da primeira derivada como anteriormente.

3º exemplo: Vamos verificar os extremos da função $f(x) = 6x^5 - 10x^3$ no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$.

Solução:

$$f'(x) = 30x^4 - 30x^2 \Rightarrow f'(x) = 30x^2(x^2 - 1) \Rightarrow \text{pontos críticos: } \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

É preciso analisar todos os pontos críticos, uma vez que todos estão dentro do intervalo $\left[-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$ proposto.

Analisando a segunda derivada:

$$f''(x) = 120x^3 - 60x^2 \Rightarrow \begin{cases} para\ x = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow inconclusivo \\ para\ x = 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow mínimo\ relativo \\ para\ x = -1 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow máximo\ relativo \end{cases}.$$

Como $x = 0$ é inconclusivo, vamos analisar os sinais à esquerda e à direita de 0:

x *imediatamente à esquerda* $(x < 0) \Rightarrow 30x^2(x^2 - 1) = f'(x) < 0.$

x *imediatamente à direita* $(x > 0) \Rightarrow 30x^2(x^2 - 1) = f'(x) < 0.$

Portanto,

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \text{não é máximo nem mínimo relativo} \\ x = 1 \text{ é mínimo relativo} \\ x = -1 \text{ é máximo relativo} \end{cases}.$$

Como o intervalo é fechado, ao verificar se $x = 1$ e $x = -1$ são extremos absolutos ou não, devemos analisar o valor numérico da função $f(x) = 6x^5 - 10x^3$ não só nesses pontos, como também nos limites do intervalo proposto $\left[-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$. Assim,

$f(1) = 6.1^5 - 10.1^3 = -4$

$f(-1) = 6.(-1)^5 - 10.(-1)^3 = 4$

$f\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}\right) = 6.(-\frac{\sqrt{15}}{3})^5 - 10.(-\frac{\sqrt{15}}{3})^3 = 0$

$f\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right) = 6.(\frac{\sqrt{15}}{3})^5 - 10.(\frac{\sqrt{15}}{3})^3 = 0$

Com base nesse resultados, $x = 1$ é mínimo absoluto e $x = -1$ é máximo absoluto da função no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}}{3}\right]$. Enquanto, os pontos $x = -\frac{\sqrt{15}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{15}}{3}$ são, respectivamente, mínimo e máximo relativo. Ver gráfico na figura 20.3.11.

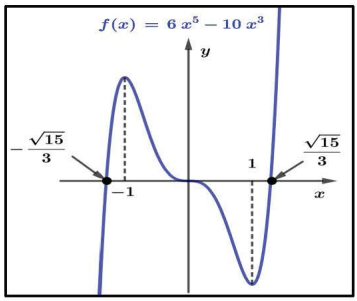


Figura 20.3.11

4º exemplo: Vamos verificar os extremos da função $f(x) = x - sen(2x)$ no intervalo $[0,2\pi]$.

Solução: $f'(x) = 1 - 2cos(2x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2cos(2x) = 0 \Rightarrow$

$$-2cos(2x) = -1 \Rightarrow \boxed{cos(2x) = \frac{1}{2}}.$$

Como o intervalo proposto é $[0,2\pi]$, o arco $2x$ do cosseno da função varia até 4π (duas voltas). Desse modo, os pontos críticos são:

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6} \text{ e } x = \frac{11\pi}{6}.$$

Testando a segunda derivada:

$f''(x) = 4\, sen(2x) \Rightarrow$

$$\begin{cases} para\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow mínimo\ relativo \\ para\ x = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow máximo\ relativo \\ para\ x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow mínimo\ relativo \\ para\ x = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow máximo\ relativo \end{cases}$$

O gráfico dessa função está na figura 20.3.12.

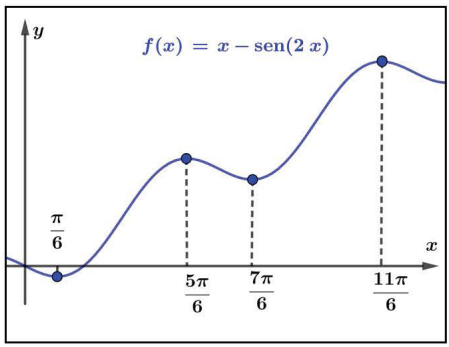


Figura 20.3.12

Até o presente momento, as informações de crescimento, decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e extremos foram confirmadas pelos gráficos das funções apresentados nos exemplos. A partir de agora, iremos utilizar essas e

outras informações (já conhecidas), que empregadas conjuntamente, tornam-se excelentes ferramentas auxiliares na construção de gráficos. Para esse fim, sugerimos o roteiro a seguir.

Roteiro para construção de gráficos de uma função:

1º) Calcular os intervalos de crescimento e decrescimento;

2º) Calcular os extremos observando o comportamento da função para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$;

3º) Calcular a concavidade e os pontos de inflexão;

4º) Verificar o domínio da função e a existência de assíntotas verticais e horizontais;

5º) Calcular as interseções da função com os eixos;

6º) Colher informações complementares como: se existe simetria (função par ou função ímpar) e se há periodicidade (função periódica);

7º) Esboçar o gráfico a partir dessas informações.

Exemplo: Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2}$.

Solução: Seguindo o roteiro.

1º) Calcular os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$f'(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2} = \frac{(2x+1).(1+x^2) - 2x.(x^2+x+1)}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{2x+2x^3+1+x^2-2x^3-2x^2-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}}.$$

$f'(x)$ é nulo quando $-x^2+1=0$, ou seja para $x=1$ ou $x=-1$.

Essas são as abscissas dos pontos onde a função é constante.

$f'(x) > 0$ para $-x^2+1>0 \Rightarrow \boxed{-1<x<1} \Rightarrow$ função crescente.

$f'(x) < 0$ para $-x^2+1<0 \Rightarrow \boxed{x<-1 \text{ ou } x>1} \Rightarrow$ função decrescente.

2º) Calcular os extremos.

Analisando os intervalos de crescimento e decrescimento anteriormente, juntamente com o teste da derivada, é imediato que os pontos críticos de abscissa $x=1$ e $x=-1$ são mínimo relativo e máximo relativo, respectivamente. Calculando as ordenadas desses pontos, encontramos

$$f(-1) = \frac{(-1)^2-1+1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(1) = \frac{1^2+1+1}{1+1^2} = \frac{3}{2}.$$

Assim, o ponto $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ é um mínimo relativo e o ponto $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ é máximo relativo.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, o ponto $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ é máximo absoluto e o ponto $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ é um máximo absoluto, em todo o domínio da função.

3º) Calcular a concavidade.

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2).(2x).(-x^2+1)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2.(2x).(-x^2+1)}{(1+x^2)^3} \Rightarrow \boxed{f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(1+x^2)^3}}.$$

$f''(x) = 2x^3 - 6x = 2x(x^2-3) > 0$. Há duas hipóteses possíveis:

Primeira hipótese: ambos os termos positivos: $\begin{cases} x^2-3>0 \Rightarrow x>\sqrt{3} \text{ ou } x<-\sqrt{3} \\ 2x>0 \Rightarrow x>0 \end{cases}$.

A condição $x>\sqrt{3}$ ou $x<-\sqrt{3}$ satisfaz as duas inequações.

Segunda hipótese: ambos os termos negativos: $\begin{cases} x^2-3<0 \Rightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \\ 2x<0 \Rightarrow x<0 \end{cases}$.

A condição $-\sqrt{3}<x<0$ satisfaz as duas inequações.

Desse modo, a concavidade será para cima nos intervalos: $x>\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}<x<0$.

De forma análoga, há duas hipóteses possíveis para a concavidade ser para baixo.

Primeira hipótese: $2x(x^2-3)<0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3>0 \Rightarrow x>\sqrt{3} \text{ ou } x<-\sqrt{3} \\ 2x<0 \Rightarrow x<0 \end{cases}$.

A condição $x<-\sqrt{3}$ satisfaz as duas inequações.

Segunda hipótese: $2x(x^2-3)<0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3<0 \Rightarrow -\sqrt{3}<x<\sqrt{3} \\ 2x>0 \Rightarrow x>0 \end{cases}$.

A condição $0<x<\sqrt{3}$ satisfaz as duas inequações.

Dessa maneira, a concavidade será para baixo nos intervalos: $x<-\sqrt{3}$ e $0<x<\sqrt{3}$.

Claramente, os pontos de abscissa $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ e $x=\sqrt{3}$ são pontos onde há mudança de concavidade. Substituindo-os na função, encontramos os pontos de inflexão: $(-\sqrt{3}, 1-\frac{\sqrt{3}}{4})$ e $\left(\sqrt{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

4º) Verificar o domínio da função e a existência de assíntotas verticais e horizontais;

Como o domínio é $\mathbb{R}$ não existem assíntotas verticais. Por outro lado, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$, a reta $y=1$ é uma assíntota horizontal.

5º) Calcular as interseções da função com os eixos.

Com o eixo x:

$f(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ Não há interseção com o eixo x.

Com o eixo y:

$f(x) = \frac{x^2+x+1}{1+x^2} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+0+1}{1+0^2} \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow$ Interseção com o eixo y.

6º) Colher informações complementares como: se existe simetria (função par ou função ímpar) e se há periodicidade (função periódica);

A função não é par, não é ímpar e nem periódica.

7º) Esboçar o gráfico a partir dessas informações.

Essas informações ajudaram a construir o gráfico que está na figura 20.3.13.

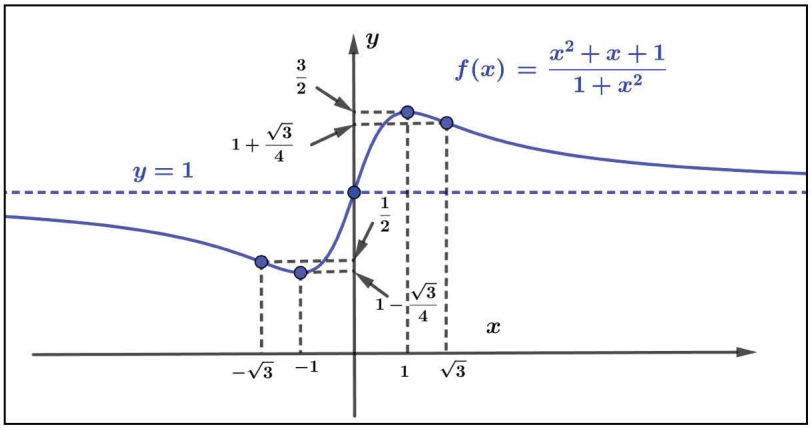


Figura 20.3.13

2º exemplo: Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = x(x^2-4)(x^2-1)$.

Solução: Seguindo o roteiro.

1º) Calcular os intervalos de crescimento e decrescimento.

$$f'(x) = (x^2-4)(x^2-1) + x.2x(x^2-1) + x.(x^2-4).2x \Rightarrow$$

$$f'(x) = x^4 - x^2 - 4x^2 + 4 + 2x^4 - 2x^2 + 2x^4 - 8x^2 \Rightarrow \boxed{f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4}.$$

Para $f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4 = 0$, podemos fazer: $\boxed{y = x^2}$:

$5y^2 - 15y + 4 = 0 (a = 5; b = -15 \; e \; c = 4)$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-15)^2 - 4.5.4 = 225 - 80 \Rightarrow \boxed{\Delta = 145}.$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{145}}{2.5} = \frac{15 \pm 12{,}04}{10} = \begin{cases} y' = 2{,}704 \\ y'' = 0{,}2958 \end{cases}.$$

$$y' = 2{,}704 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2{,}704} \cong \pm 1{,}64.$$

$$y'' = 0{,}2958 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0{,}2958} \cong \pm 0{,}54.$$

Esses são os pontos onde a função é constante e também são os pontos críticos:

$$x \cong +1{,}64, x \cong -1{,}64, x \cong +0{,}54 \; e \; x \cong -0{,}54.$$

A função é crescente para $5y^2 - 15y + 4 > 0$, o que resulta em:

- $y > 2{,}704 \Rightarrow x^2 > 2{,}704 \Rightarrow \begin{cases} x < -1{,}64 \\ x > +1{,}64 \end{cases}$.
- $y < 0{,}2958 \Rightarrow x^2 < 0{,}2958 \Rightarrow -0{,}54 < x < +0{,}54$

A função é decrescente se $5y^2 - 15y + 4 < 0$, o que resulta em:

$$0{,}2958 < y < 2{,}704 \Rightarrow 0{,}2958 < x^2 < 2{,}704 \Rightarrow \begin{cases} -1{,}64 < x < -0{,}54 \\ 0{,}54 < x < 1{,}64 \end{cases}$$

2º) Calcular os extremos.

Analisando o sinal de $f''(x) = 20x^3 - 30x = x(20x^2 - 30)$.

$x \cong +1{,}64 \Rightarrow f''(x) = + \Rightarrow$ *mínimo relativo*

$x \cong -1{,}64 \Rightarrow f''(x) = - \Rightarrow$ *máximo relativo*

$x \cong +0{,}54 \Rightarrow f''(x) = - \Rightarrow$ *máximo relativo*

$x \cong -0{,}54 \Rightarrow f''(x) = + \Rightarrow$ *mínimo relativo*

Use calculadora!

Como temos mais de um máximo e mais de um mínimo relativo, precisamos testar na função original $f(x) = x(x^2-4)(x^2-1)$ para saber qual o maior e o menor deles.

$f(1{,}64) = 1{,}64(1{,}64^2 - 4)(1{,}64^2 - 1) \cong -3{,}63$

$f(-0{,}54) \cong -1{,}42$

$f(-1{,}64) = 1{,}64(1{,}64^2 - 4)(1{,}64^2 - 1) \cong 3{,}63$

$f(0{,}54) \cong 1{,}42$

Assim, $x \cong +1{,}64$ é o menor dos mínimos relativos e $x \cong -1{,}64$ é o maior dos máximos relativos. Porém, não são absolutos. Uma vez que o $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, ou seja, existem outros pontos da função maiores e menores que esses.

3º) Calcular a concavidade.

$\sqrt{3/2} \cong 1{,}23$

$$f''(x) = x(20x^2 - 30) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \ e \ x^2 - \frac{3}{2} > 0 \ \Rightarrow x > 1{,}23 \\ x < 0 \ e \ x^2 - \frac{3}{2} < 0 \ \Rightarrow -1{,}23 < x < 0 \end{cases}.$$

$$f''(x) = x(20x^2 - 30) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \ e \ x^2 - \frac{3}{2} < 0 \ \Rightarrow 0 < x < 1{,}23 \\ x < 0 \ e \ x^2 - \frac{3}{2} > 0 \ \Rightarrow x < -1{,}23 \end{cases}.$$

4º) Verificar o domínio da função e a existência de assíntotas verticais e horizontais;

Não existem assíntotas e o domínio é $\mathbb{R}$ (função contínua).

5º) Calcular as interseções da função com os eixos.

Com o eixo x:

$f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \ \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2, x = 1 \ e \ x = -1.$

Com o eixo y:

$f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0 \ \Rightarrow f(0) = 0.(0^2 - 4)(0^2 - 1) \Rightarrow f(0) = 4.$

6º) Colher informações complementares como: se existe simetria (função par ou função ímpar) e se há periodicidade (função periódica);

A função é ímpar. Assim ao girar o gráfico nos quadrantes II e III, em torno da origem, encontramos simetria entre os quadrantes I e IV. A função não é periódica.

7º) Esboçar o gráfico a partir dessas informações.

Ver figura 20.3.14.

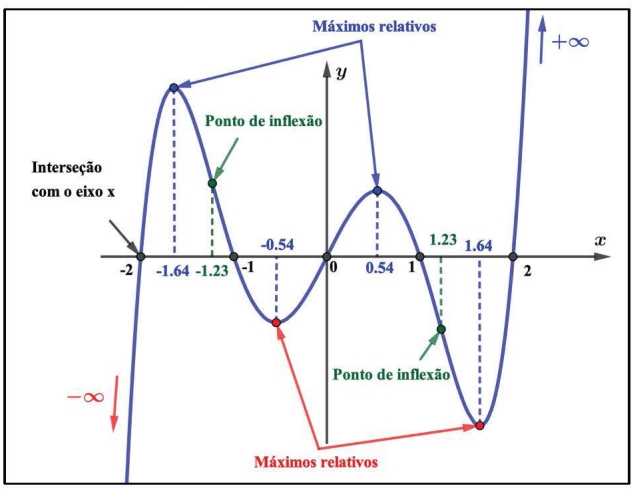


Figura 20.3.14

20.4. Pontos notáveis de uma função no geogebra

Considera-se pontos notáveis de uma função: os extremos, os pontos de inflexão e os zeros da função. Como demonstração, utilizaremos a função do exemplo anterior.

1º) No campo de entrada do software geogebra digite a seguinte função:

$$f(x) = x(x^2 - 4)(x^2 - 1).$$

2º) Para calcular os extremos, vá ao menu, clique na segunda ferramenta e na opção "otimização" conforme a figura 20.4.1. Em seguida, clique sobre o gráfico da função e o software mostrará os extremos da função. Opcionalmente, pode-se utilizar também o comando "extremo()" no campo de entrada.

3º) Na mesma opção do menu, clique agora em "Raízes" conforme a figura 20.4.2 e em seguida clique sobre a função. O software mostrará os zeros da função.

4º) Para a visualização dos pontos de inflexão, digite no campo de entrada digite: "Pontodeinflexão(f)". Onde "f" é a letra que representa a função.

As informações completas estão na figura 20.4.3. Compare-as com as informações calculadas no exemplo da seção anterior.

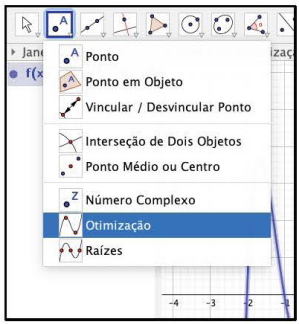


Figura 20.4.1

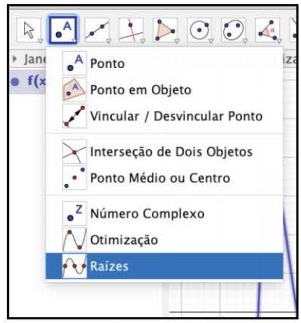


Figura 20.4.2

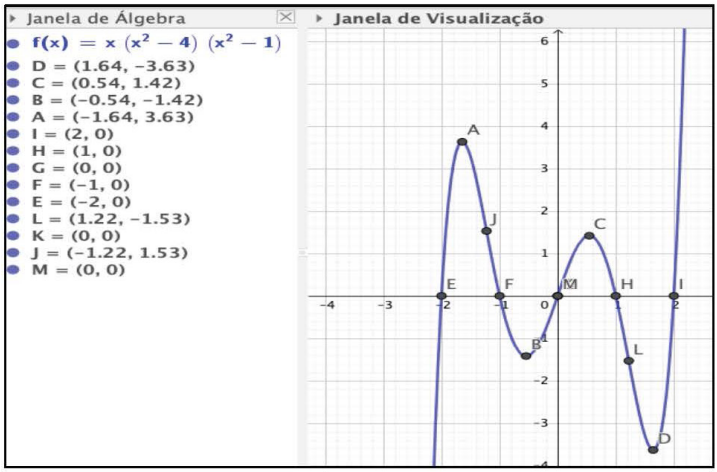


Figura 20.4.1

EXERCÍCIOS 20.2

1) Calcule os pontos críticos e verifique quais deles são extremos das seguintes funções.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = x^3 + 21x + 1$
c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$
d) $f(x) = |3x - 6|$
e) $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2$
f) $f(x) = x(x-2)^3$
g) $f(x) = 3x^{2/3} - 4x$
h) $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$
i) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
j) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-25}$
k) $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
l) $f(x) = ln\,(1+x^2)$
m) $f(x) = ln\left(\frac{1}{4+x^2}\right)$
n) $f(x) = xe^{x-1}$
o) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$
p) $f(x) = (x-1)e^{2x}$
q) $f(x) = x^2e^x$
r) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2) Calcule os extremos das seguintes funções nos intervalos dados.

a) $f(x) = sen2x \quad [0,\pi]$
b) $f(x) = cos^2x \quad [0,2\pi]$
c) $f(x) = senx - cosx \quad [0,2\pi]$
d) $f(x) = x + cosx \quad [0,2\pi]$
e) $f(x) = 2x - sen4x \quad [0,\pi]$
f) $f(x) = \frac{senx}{2-cosx} \quad [0,2\pi]$
g) $f(x) = ln\,(cos(2x) \quad [0,\pi]$
h) $f(x) = 2x - tg2x \quad [0,\pi]$

3) Calcule os intervalos de crescimento, decrescimento, concavidade, pontos de inflexão e extremos das seguintes funções.

a) $f(x) = -x^6 - 6x$
b) $f(x) = x^{4/3} - x^{5/3}$
c) $f(x) = lnx - x$
d) $f(x) = x.ln^2x$
e) $f(x) = e^x\,x^3$
f) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
g) $f(x) = ln(x^2+1)$
h) $f(x) = arcsen(x^2)$
i) $f(x) = \frac{-2arctgx+1}{4}$
j) $f(x) = x - arctg(1+2x)$

4) A função $f(x) = (x-3)^3$:

a) ( ) Não possui ponto de inflexão;
b) ( ) Possui somente concavidade para cima;
c) ( ) É crescente para $x > 3$, decrescente para $x < 3$ e constante para $x = 3$;
d) ( ) Possui ponto de inflexão em $x = 3$;
e) ( ) Possui ponto máximo relativo para $x = 3$.

5) Marque a única alternativa correta:

a) ( ) Se uma função f é definida no intervalo $]a,b[$, então existe um extremo nesse intervalo;

b) ( ) Se uma função f é definida no intervalo $[a,b]$, então existe um extremo nesse intervalo;

c) ( ) Se uma função f é contínua no intervalo $]a,b[$, então existe um extremo nesse intervalo;

d) ( ) Se uma função f é descontínua no intervalo $[a,b]$, então existe um extremo nesse intervalo;

e) ( ) Se uma função f é contínua no intervalo $[a,b]$, então existe um extremo nesse intervalo.

6) Marque a única alternativa correta:

a) ( ) Seja uma função $f: D \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $x_0 \in D$, se x_0 é um extremo relativo, então $f'(x_0) = 0$;

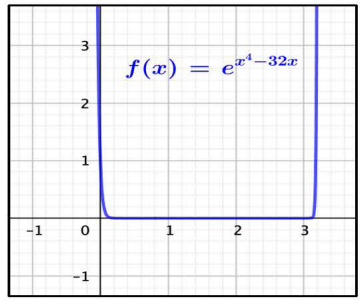
b) ( ) Seja uma função $f: D \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $x_0 \in D$, se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é um extremo relativo;

c) ( ) Seja uma função $f: D \to \mathbb{R}$ não derivável no ponto $x_0 \in D$, então x_0 é um extremo relativo;

d) ( ) Seja uma função $f: D \to \mathbb{R}$, se x_0 é um extremo relativo, então a função não é derivável no ponto $x_0 \in D$;

e) ( ) Seja uma função f duas vezes derivável em x_0, se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, então f tem um máximo relativo em x_0.

7) Calcule o ponto de mínimo da função $f(x) = e^{x^4 - 32x}$ cujo gráfico está a seguir. Em seguida, use a ferramenta "otimização" do geogebra para confirmar.



8) Use o roteiro do último exemplo e esboce os gráficos das seguintes funções. Use o software geogebra para visualizar e comparar esses gráficos.

a) $f(x) = x^5 - 5x$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

d) $f(x) = x + sen x;\ 0 < x < 2\pi$

e) $f(x) = cos^3 x\ ;\ 0 < x < 2\pi$

f) $f(x) = xe^x$

g) $f(x) = x(x+1)^2(x-1)^2$

20.5. Aplicações de derivada

Nesta seção, iremos estudar as aplicações de derivada em problemas de otimização, taxas de variação de uma função e em solução de limites com indeterminação.

20.5.1. Problemas de otimização

Neste tópico, aplicaremos os métodos estudados na seção 20.3 sobre máximo e mínimos de funções. Porém, essa metodologia será aplicada em problemas contextualizados que visam otimizações, como: maximizar lucros, áreas, volumes ou minimizar custos, distâncias, etc.

Esse processo consiste inicialmente em encontrar um modelo matemático que representa a grandeza pela qual se deseja otimizar, e a partir desse modelo (ou função), aplicar os conhecimentos sobre pontos extremos já conhecidos.

Exemplo: Uma empresa produz embalagens (caixas) em forma de paralelepípedo a partir de um retângulo de papelão que mede 20cm por 30cm (conforme a figura 1). Para montar as caixas é preciso cortar quadrados iguais em cada canto (conforme figura 20.5.1.1 e 20.5.1.2). Qual deve ser o valor de x para que a embalagem tenha volume máximo (caiba maior número de produtos) e qual é esse volume máximo?

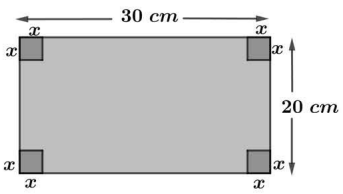


Figura 20.5.1.1

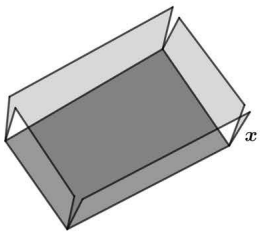


Figura 20.5.1.2

Solução: A base é um retângulo de medidas $30-2x$ e $20-2x$. Logo, sua área é $(30-2x).(20-2x)$. Como a altura é x, o volume é dado por

$$V=(30-2x).(20-2x).x=(600-60x-40x+4x^2).x=\boxed{4x^3-100x^2+600x}.$$

Cálculo da derivada:

$$V'(x)=12x^2-200x+600(a=12,b=-200\ e\ c=600).$$

$$\Delta=b^2-4.a.c=(-200)^2-4.12.600=40000-28800=11200.$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=\frac{-(200)\pm\sqrt{11200}}{2.12}=\frac{200\pm 105{,}83}{24}=\begin{cases}x'=\dfrac{200+105{,}83}{24}=12{,}74\\ x''=\dfrac{200-105{,}83}{24}=3{,}92\end{cases}.$$

Cálculo da 2ª derivada para verificar concavidade (máximo ou mínimo):

$$V''(x) = 24x - 200.$$

Substituindo os valores de x' e x'':

$$V''(12{,}74) = 24.(12{,}74) - 200 = \boxed{105{,}76}.$$

$$V''(3{,}92) = 24.(3{,}92) - 200 = \boxed{-105{,}92}.$$

Como o valor para x' é positivo, a concavidade está para cima e o volume é mínimo. E como o valor para x'' é negativo, a concavidade está para baixo e o volume é máximo.

Assim, o valor do volume máximo é encontrado para $x'' = 3{,}92$. Que nesse caso é:

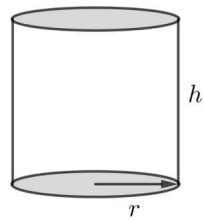
$$V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x \Rightarrow V(3{,}92) = 4.(3{,}92)^3 - 100.(3{,}92)^2 + 600.(3{,}92) \Rightarrow$$

$$V(3{,}92) = 1056{,}31\ cm^3.$$

Respostas: $x = 3{,}92\ cm$ e $V = 1056{,}31\ cm^3$.

Observação: O valor $x'' = 3{,}92$ encontrado não é um máximo absoluto, pois o $\lim_{x\to+\infty} V(x) = +\infty$, ou seja, existem outros valores para x que tornam o volume maior. Porém, analisando a figura 20.5.1.1, o valor de x precisa ser menor que 10. Pelo mesmo motivo, a análise para $x' = 12{,}74$ poderia ter sido descartada previamente.

2º exemplo: Uma fábrica deseja comercializar seu produto líquido em latas cilíndricas de 1 litro. Qual deve ser a dimensões dessa lata para que o material gasto para a sua confecção seja mínimo?



Solução: O material gasto corresponde a área total do cilindro, isto é, área das bases mais a área lateral, que neste caso é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

O volume de um cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ e 1 litro corresponde a 1000cm^3, assim

$$1000 = \pi r^2 h \Rightarrow \boxed{h = \frac{1000}{\pi r^2}}.$$

Substituindo na área total, temos

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \Rightarrow\ A = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} \Rightarrow \boxed{A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}}.$$

Derivando, encontramos

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} \Rightarrow \boxed{A'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}}.$$

O ponto crítico é

$$4\pi r^3 - 2000 = 0 \Rightarrow \pi r^3 - 500 = 0 \Rightarrow \pi r^3 = 500 \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}}.$$

Calculando a segunda derivada

$$A''(r) = \frac{12\pi r^2.r^2 - (2r).(4\pi r^3 - 2000)}{(r^2)^2} \Rightarrow \boxed{A''(r) = \frac{4\pi r^3 + 4000}{r^3}}.$$

Substituindo o ponto crítico $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, encontramos

$$A''(r) = \frac{4\pi r^3 + 4000}{r^3} = \frac{2000 + 4000}{\frac{500}{\pi}} = 12\pi.$$

Como $A''(r) = 12\pi > 0$, o ponto crítico é mínimo e o material gasto será mínimo se $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ cm. O interessante é que a altura deve ser

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} = \frac{1000}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)^2} = 2.\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2.r.$$

E dessa maneira, o cilindro deve ser equilátero (altura igual ao diâmetro).

EXERCÍCIOS 20.3

1) Como escolher dois números reais, a e b cuja soma é S, de forma que a soma dos seus quadrados seja o mínimo possível?

2) Encontre o ponto da parábola $f(x) = x^2$ que está mais próximo de (3,0).

3) De que forma podemos inscrever um retângulo em uma semicircunferência de raio r de modo que sua área seja máxima?

4) Encontre as dimensões de um retângulo de perímetro p de modo que sua área seja máxima possível. Qual seria o perímetro mínimo possível desse retângulo se a área fosse A?

5) Uma caixa de base quadrada e sem tampa possui volume de 108.000 cm³. Que dimensões deve ter a caixa de modo que o material gasto seja o mínimo possível?

6) Uma caixa sem tampa possui como base, um quadrado de lado x, altura h e volume fixo V. Calcule as dimensões que deve ter a caixa de modo que o material gasto seja o mínimo possível?

7) Uma caixa sem tampa de base quadrada precisa ser construída a partir de 2700 cm² de material. Que dimensões deve ter esse caixa de forma que o seu volume seja o máximo possível?

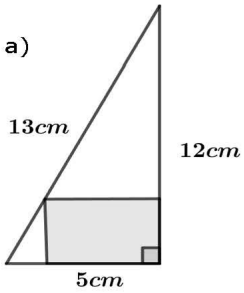
8) Um cilindro circular reto será inscrito em uma esfera de raio r. Qual o maior volume possível para esse cilindro?

9) Encontre o raio e altura de um cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito em um cone circular reto de raio 12 cm e altura 20cm.

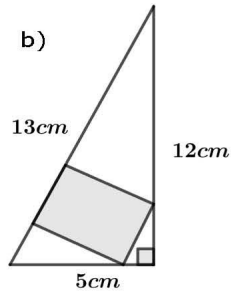
10) Apenas três lados de uma área retangular deverá ser cercada com 200 metros de cerca. Que dimensões deverá ter essa área retangular de forma que a área seja máxima?

11) Um retângulo deve ser inscrito em um triângulo retângulo com lados 13cm, 12cm e 5cm. Calcule as dimensões desse retângulo, posicionado em cada caso, de forma que sua área seja máxima.

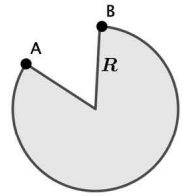
a)



b)



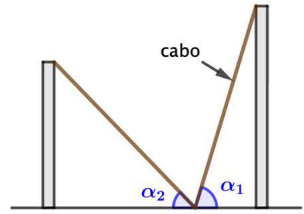
12) Uma empresa pretende fabricar embalagens, a partir de um pedaço circular de um papelão de raio R, de forma que ao unir os pontos A e B, forme um cone, conforme a figura. Encontre a capacidade máxima dessa embalagem.



13) Um cone de 32 cm³ de volume precisa ser construído a partir de uma folha de papel. Calcule a altura e o raio desse cone, de forma que o papel utilizado seja o mínimo possível.

14)Quais os pontos de abscissa em que a curva $f(x) = \frac{-x^5}{5} + 6x^3 + 1$ possui reta tangente de maior inclinação?

15)Dois postes verticais serão fixados por um cabo de aço que vai do topo de cada poste até o chão, conforme a figura. Mostre que o menor comprimento para esse cabo ocorre quando $\alpha_1 = \alpha_2$.



20.5.2. A derivada como taxa de variação de uma função

Vimos na definição 6.5.1 (do volume 1) que a taxa de variação média ou simplesmente taxa de variação de uma função é dado por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Essa taxa de variação coincide com o coeficiente angular da reta secante à função que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) da figura 20.5.2.1.

Vimos também que a derivada da função no ponto x_0 é dado por

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

E representa o coeficiente angular da reta tangente à função no ponto x_0, consoante a mesma figura 20.5.2.1.

Desse modo, a derivada de uma função é o limite da taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ da função quando $\Delta x \to 0$. E nessas circunstâncias é denominada de **taxa de variação instantânea** da função em relação a x.

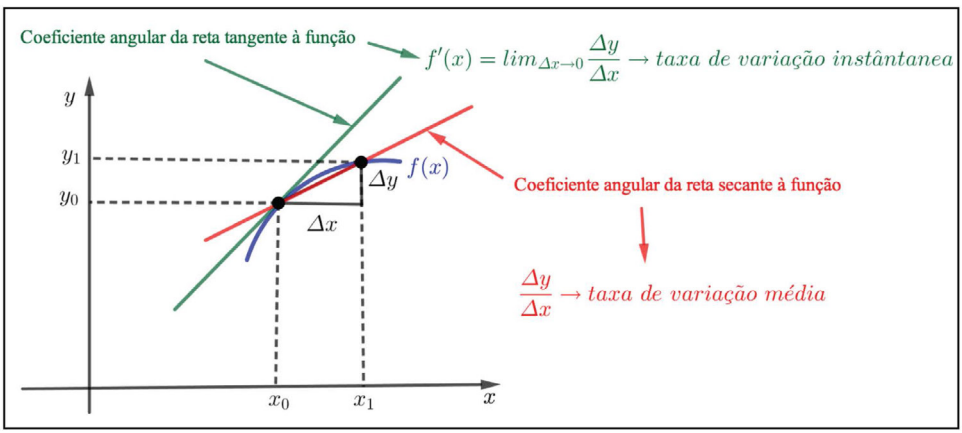


Figura 20.5.2.1

Diante dessa definição, opcionalmente, podemos calcular derivadas de funções adicionando os acréscimos Δy e Δx aos termos y e x, respectivamente, e em seguida, aplicar o limite $\Delta x \to 0$.

Exemplo: $y = x^2 + 2x$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) \Rightarrow y + \Delta y = x^2 + 2.x.\Delta x + \Delta x^2 + 2x + 2\Delta x$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{2x} + \Delta y = \cancel{x^2} + 2.x.\Delta x + \Delta x^2 + \cancel{2x} + 2\Delta x$$

$$\Delta y = (2x + \Delta x + 2)\Delta x \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 2 + \Delta x}.$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 2}.$$

2º exemplo: $y = e^x$

$$y + \Delta y = e^{x+\Delta x} \Rightarrow e^x + \Delta y = e^{x+\Delta x} \Rightarrow \Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x \Rightarrow$$

$$\Delta y = e^x e^{\Delta x} - e^x \Rightarrow \Delta y = e^x(e^{\Delta x} - 1) \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \left(\underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}}_{1} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x}.$$

A seguir estão alguns teoremas importantes que relacionam de forma direta ou indireta a derivada de uma função (a taxa de variação instantânea) e a taxa de variação média.

Teorema 20.5.2.1 (Teorema de Rolle[9]): Seja uma função f contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$.

Esse teorema é uma consequência concomitante do teorema 20.3.3 (teorema de Fermat) e do teorema 20.3.1 (teorema do valor extremo), anteriores.

Teorema 20.5.2.2 (Teorema do valor médio de Cauchy[10]): Suponha que f e g sejam contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), sendo $g'(x) \neq 0$ para todo x em (a,b). Então, existe um número c em (a,b) tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Demonstração:

Consideremos a função $h(x) = [f(b) - f(a)].g(x) - [g(b) - g(a)].f(x)$ contínua e derivável no intervalo (a,b). Como $h(a) = h(b)$ pelo teorema de Rolle (20.4.2.1) existe ao menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que $h'(c) = 0$. Dessa forma:

$h'(x) = [f(b) - f(a)].g'(x) - [g(b) - g(a)].f'(x)$

Como $h'(c) = 0$, substituindo temos:

$h'(c) = [f(b) - f(a)].g'(c) - [g(b) - g(a)].f'(c)$

$0 = [f(b) - f(a)].g'(c) - [g(b) - g(a)].f'(c) \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

[9] Michel Rolle (1652-1719)
[10] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Teorema 20.5.2.3 (Teorema de Lagrange[11] ou teorema do valor médio-TVM): Seja uma função f contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe ao menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

Demonstração:

1º caso: $f(b) = f(a)$.

Neste caso $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ e pelo teorema de Rolle existe ao menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$.

2º caso: $f(b) \neq f(a)$.

Consideremos a função

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$$

contínua e derivável no intervalo (a,b). Sua derivada é

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

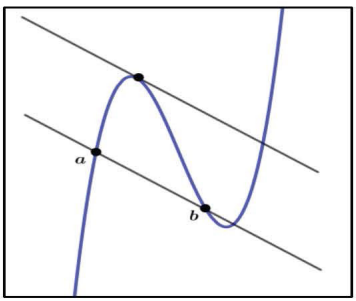


Figura 20.5.2.2

Uma vez que $g(a) = g(b) = 0$, o teorema de Rolle nos garante que existe ao menos um ponto $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x) = 0$, isto é

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)}.$$

Completando a prova. A interpretação geométrica está na figura 20.5.2.2.

Um excelente exemplo da aplicação do teorema de Lagrange, encontramos na cinemática (em física). Na cinemática, denomina-se de velocidade média de um percurso, a taxa de variação média $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ e de velocidade instantânea ou simplesmente de velocidade v, a derivada do deslocamento em relação ao tempo $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Isso significa, segundo o teorema de Lagrange, que um objeto em movimento partindo de um ponto $t = a$ à um ponto $t = b$, terá em algum instante $t = c$, uma velocidade instantânea v igual à velocidade média v_m. Ver figura 20.5.2.3.

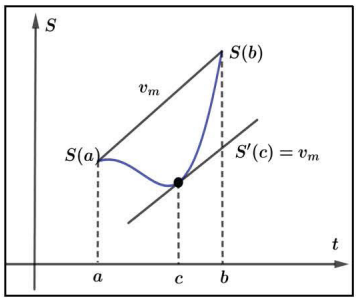


Figura 20.5.2.3

Além disso, como a velocidade instantânea v é dada em qualquer instante t ao longo do percurso, para obtê-la basta derivar a função de deslocamento S ou a equação horária dada.

[11] Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

Exemplo: A fórmula do deslocamento de um objeto em movimento uniformemente variado (MUV) na cinemática é dado por

$$S = S_0 + V_0.t + \frac{a.t^2}{2}.$$

Sua derivada em relação ao tempo equivale a velocidade v do objeto é

$$S' = \boxed{v = v_0 + a.t}.$$

Essa é a fórmula da velocidade bastante conhecida do ensino médio, presente nesse tipo de movimento. Vale ressaltar que a derivada da velocidade (ou a segunda derivada do deslocamento) corresponde a aceleração a. E a derivada da aceleração em relação ao tempo é nula, pois nesse tipo movimento a aceleração é constante.

20.5.3. A derivada e as taxas de variação de uma função polinomial

Nesta subseção, estabeleceremos uma conexão entre as derivadas sucessivas e as taxas de variação média de funções polinomiais.

- **Função afim $y = ax + b$ (ou função polinomial do 1º grau):**

$$y = ax + b \Rightarrow y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b \Rightarrow \underbrace{y}_{ax+b} + \Delta y = ax + a\Delta x + b \Rightarrow$$

$$ax + b + \Delta y = ax + a\Delta x + b \Rightarrow \Delta y = a\Delta x \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = a}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = a}.$$

A taxa de variação média da função afim e a sua derivada são equivalentes.

Detalhes sobre o cálculo da taxa de variação média dessa função pode ser encontrada na seção 6.5 na unidade sobre função afim (volume 1).

- **Função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ (ou função polinomial do 2º grau):**

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c \Rightarrow$$
$$ax^2 + bx + c + \Delta y = a(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + bx + b\Delta x + c \Rightarrow$$
$$ax^2 + bx + c + \Delta y = ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c \Rightarrow$$
$$\Delta y = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x \Rightarrow \Delta y = (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = (2ax + b) + a\Delta x} \ (1).$$

Perceba que $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \boxed{\frac{dy}{dx} = 2ax + b}$ e $\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2a}$.

Calculando a segunda taxa de variação $\left(\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}\right)$ a partir de (1):

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y'}{\Delta x'}}{\Delta x'} = \frac{2ax + b + a\Delta x - (2ax' + b + a\Delta x')}{\Delta x'} =$$

$$\frac{2a\overbrace{(x - x')}^{\Delta x'} + a(\Delta x - \Delta x')}{\Delta x'} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{a(\Delta x + \Delta x')}{\Delta x'}}.$$

A segunda taxa de variação média depende das variações de Δx e $\Delta x'$, porém se as abscissas estivem em progressão aritmética (ver seção 7.6), temos $\Delta x = \Delta x'$ e assim

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = 2a.$$

O que corresponde a segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a.$

A segunda taxa de variação média de uma função quadrática (para abscissas em P.A) e sua segunda derivada são equivalentes.

Detalhes sobre o cálculo das taxas de variação dessa função, inclusive sobre como calcular a segunda taxa de variação, pode ser encontrada na seção 7.6 na unidade sobre função quadrática (volume 1).

• **Função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (ou função polinomial do 3º grau):**

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow y + \Delta y = a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x)^2 + c(x + \Delta x) + d \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (3ax^2 + 2bx + c) + (3a + b)\Delta x + \Delta x^2.$$

Calculando a segunda taxa de variação $\left(\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}\right)$ e considerando $\Delta x = \Delta x'$ (abcissas em P.A), encontramos

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y'}{\Delta x'}}{\Delta x'} = \frac{(6ax + 2b)\Delta x'}{\Delta x'} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = 6ax + 2b}.$$

Calculando a terceira taxa de variação: $\boxed{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3} = 6a}$.

O que corresponde a terceira derivada da função cúbica: $\frac{d^3y}{dx^3} = 6a.$

Assim concluímos:

A terceira taxa de variação de uma função polinomial do 3º grau (para abcissas em P.A) e sua terceira derivada são equivalentes.

Diante desse contexto, se as abcissas de um conjunto de dados (ou tabela) estiverem em P.A e a terceira taxa de variação for constante, significa que a função que melhor se ajusta aos dados, é uma função polinomial do 3º grau (a recíproca dessa afirmação é também verdadeira, porém não apresentaremos a prova). Considerando uma função na forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, temos

$$\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3} = \frac{d^3 y}{dx^3} = 6a.$$

Exemplo: Os dados a seguir foram coletados de um trabalho de modelagem matemática envolvendo duas grandezas.

(x)	0	2	4	6	8	10
(y)	1	3	25	115	321	691

Qual a função que se ajusta aos dados?

Solução: Vamos calcular as taxas de variação e verificar qual modelo matemático que se ajusta aos dados.

x	0	2	4	6	8	10
y	1	3	25	115	321	691
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	–	$\frac{3-1}{2-0} = 1$	$\frac{25-3}{4-2} = 11$	$\frac{115-25}{6-4} = 45$	$\frac{321-115}{8-6} = 103$	$\frac{691-321}{10-8} = 185$
$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2}$	–	–	$\frac{11-1}{4-2} = 5$	$\frac{45-11}{6-4} = 17$	$\frac{103-45}{8-6} = 29$	$\frac{185-103}{10-8} = 41$
$\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}$	–	–	–	$\frac{17-5}{6-4} = 6$	$\frac{29-17}{8-6} = 6$	$\frac{41-29}{10-8} = 6$

Como a terceira taxa de variação é constante, temos que a função que se ajusta aos dados é uma função polinomial do 3º grau, que na forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem-se $a = \frac{\frac{\Delta^3 y}{(\Delta x)^3}}{6} = \frac{6}{6} = 1$.

Para calcular b, c e d, vamos substituir na função $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$, três pontos (de livre escolha).

Para $x = 0$ e $y = 1$, temos em $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ que 1 = d $\Rightarrow \boxed{d = 1}$;

Para $x = 2$ e $y = 3$, obtemos

$3 = 2^3 + b.2^2 + c.2 + 1 \Rightarrow 4b + 2c = -6 \Rightarrow \boxed{2b + c = -3}$.

Para $x = 4$ e $y = 25$, obtemos

$25 = 4^3 + b.4^2 + c.4 + 1 \Rightarrow 16b + 4c = -40 \Rightarrow \boxed{4b + c = -10}$.

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2b + c = -3 \\ 4b + c = -10 \end{cases}$. Encontramos

$$\begin{cases} 2b + c = -3 \\ 4b + c = -10 \end{cases} \quad (x-1) \sim \begin{cases} -2b - c = +3 \\ 4b + c = -10 \end{cases}$$

$2b = -7 \Rightarrow \boxed{b = -3{,}5}$ e $c = -3 + 7 \Rightarrow \boxed{c = 4}$.

Assim, $\boxed{f(x) = x^3 - 3{,}5x^2 + 4x + 1}$.

Faça os testes e verifique que a função representa os dados.

- **Função polinomial de grau n:**

De uma forma geral, a n-ésima taxa de variação média de uma função polinomial de grau n, para abcissas em P.A, equivale a sua n-ésima derivação sucessiva.

Demonstração: Vamos demonstrar inicialmente que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} + (expressão).\Delta x.$$

Seja uma função polinomial na forma

$$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

$$\boxed{y + \Delta y = a_n(x+\Delta x)^n + a_{n-1}(x+\Delta x)^{n-1} + \ldots + a_2(x+\Delta x)^2 + a_1(x+\Delta x) + a_0} \quad (1).$$

Utilizando o binômio de Newton (ver seção 15.2), dispomos de

$$(x+\Delta x)^n = \binom{n}{0}x^n\Delta x^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^0\Delta x^n$$

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \ldots + \Delta x^n$$

$$(x+\Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \left(\binom{n}{2}x^{n-2} + \binom{n}{3}x^{n-3}\Delta x^1 + \ldots + \Delta x^{n-2}\right).\Delta x^2.$$

Aplicando de forma análoga aos demais termos, encontramos

$$(x+\Delta x)^{n-1} = x^{n-1} + (n-1)x^{n-2}\Delta x + \left(\binom{n-1}{2}x^{n-3} + \binom{n-1}{3}x^{n-4}\Delta x^1 + \ldots + \Delta x^{n-3}\right).\Delta x^2$$

$$\vdots$$

$$(x+\Delta x)^1 = (x+\Delta x).$$

Substituindo em (1), obtemos

$$y + \Delta y = \overbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}^{y} + na_n x^{n-1}\Delta x + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}\Delta x + \ldots + a_1\Delta x + (expressão).\Delta x^2.$$

Dividindo tudo por Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1}_{\frac{dy}{dx}} + (expressão).\Delta x.$$

Como as abcissas estão em P.A, $\Delta x = \Delta x'$ e a segunda taxa de variação é

$$\frac{\Delta^2 y}{(\Delta x)^2} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y'}{\Delta x'}}{\Delta x'} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}}{\Delta x'} = \frac{d^2y}{dx^2} + (expressão).\Delta x'.$$

Aplicando esse processo n reiteradas vezes, concluímos que

$$\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n} = \frac{d^n y}{dx^n} + (expressão).\Delta x^{(n-1)'}$$

$$\boxed{\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n} = \lim_{\Delta x^{(n-1)'}\to 0}\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n} = \frac{d^n y}{dx^n}}.$$

20.5.4. Taxa relacionadas

O objetivo deste tópico é encontrar a relação entre as taxas de variação instantâneas de grandezas que estão associadas por meio de uma expressão matemática. Essa relação é denominada de **taxas relacionadas**.

Exemplo: Um tanque está sendo enchido com água por uma torneira que possui vazão de 1/2 litro por segundo. Qual a taxa de crescimento do volume de água?

Solução: É imediato que a taxa de crescimento é a própria vazão de $\frac{1}{2}$ $litros/s$. Em termos de função, o volume do tanque pode ser dado por $V(t) = \frac{1}{2}t$ e essa taxa de variação corresponde à sua derivada. Como 1 litro $= 1000\text{cm}^3$, temos $\boxed{\frac{dV}{dt} = 500cm^3/s}$.

2º exemplo: Supondo que o tanque do exemplo anterior seja cilíndrico de raio $r = 1$ metro e altura h. Qual a taxa de variação da altura h da água?

Solução: O volume de um cilindro é dado $V = \pi r^2.h$. Derivando ambos os membros da equação em relação ao tempo t e observando que o raio r é constante, temos

$$V = \pi r^2.h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi.(100cm)^2.\frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{500cm^3}{s} = \pi.(10000cm^2).\frac{dh}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{1}{20\pi}cm/s}.$$

Perceba que a taxa de variação da altura é a velocidade pelo qual o líquido sobe no tanque. E de uma forma específica, algumas taxas de variação aplicada em uma grandeza pode resultar em outra grandeza (física) já definida, como: velocidade, aceleração, vazão, etc.

3º exemplo: E se o tanque anterior for um cone invertido de raio $r = 1$ metro e altura h = 5 metros? Qual a taxa de variação da altura h da água quando essa medir 3 metros?

Solução:

Utilizando a semelhança de triângulo na figura 20.5.4.1, encontramos

$$\frac{r}{1} = \frac{h}{5} \Rightarrow \boxed{r = \frac{h}{5}}.$$

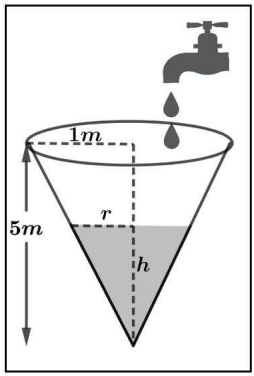


Figura 20.5.4.1

Substituindo na fórmula do volume do cone, dispomos de

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2.h \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{5}\right)^2.h \Rightarrow V = \frac{1}{75}\pi h^3.$$

Derivando em relação ao tempo t, temos

$$V = \frac{1}{75}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{25}\pi h^2.\frac{dh}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2}.\frac{dV}{dt}}.$$

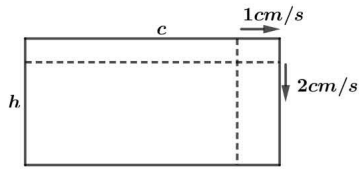
Como $\frac{dV}{dt} = 500cm^3/s$ e $h = 3m = 300cm$, finalizamos com

$$\frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2}.\frac{dV}{dt} = \frac{25}{\pi.300^2}.500 = \frac{12500}{90000\pi} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{5}{36\pi} cm/s}.$$

Observação: Ao contrário do exemplo anterior, nesse caso, o raio não é constante, e desse modo, a velocidade (ou a taxa de variação) pelo qual o líquido sobe, diminui na medida em que a altura aumenta. Analise a taxa: $\frac{dh}{dt} = \frac{25}{\pi h^2}.\frac{dV}{dt}$.

4º exemplo: O comprimento c de um retângulo aumenta a uma taxa de 1cm/s, enquanto a sua altura h diminui a uma taxa de 2cm/s. Quando o comprimento mede 4cm e altura mede 5cm, quanto está variando?

a)A área desse retângulo



Solução: A taxa de variação de c em função do tempo t é $\frac{dc}{dt} = 1\text{cm/s}$. A taxa de variação de h em função do tempo t é $\frac{dh}{dt} = -2\text{cm/s}$.

Calculando a taxa da área $\frac{dA}{dt}$ a partir da fórmula da área, encontramos

$$A = c.h \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{dc}{dt}.h + \frac{dh}{dt}.c \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 1.5 - 2.4 = 5 - 8 \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = -3\ m^2/s}.$$

b)O perímetro desse retângulo

Solução: Calculando a taxa de variação do perímetro $\frac{dP}{dt}$.

$$P = 2c + 2h \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2.\frac{dc}{dt} + 2.\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2.1 - 2.2 = 2 - 4 \Rightarrow \boxed{\frac{dP}{dt} = -2\ m/s}.$$

5º exemplo: A proliferação de uma praga em uma plantação cresce exponencialmente de acordo com os dias (t) e segundo a função $Q(t) = 200e^{0,2t}$. Qual a taxa de crescimento das pragas no 20º dia?

Solução:

$$Q(t) = 200e^{0,2t} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 200.0,2.e^{0,2t} \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = 40.e^{0,2t}}.$$

Para $t = 20$, temos

$$\frac{dQ}{dt} = 40.e^{0,2.(20)} = 40.e^4 \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} \cong 2184\ pragas\ por\ dia}.$$

Suponha que a proliferação dessa praga se dê de forma circular e o raio esteja crescendo a uma taxa de 3 metros por dia. Qual a velocidade do crescimento da área quando esse raio for de 50 metros?

Solução:

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r.\frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2.3,14.\overbrace{50}^{r}.\overbrace{3}^{dr/dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 942\ m^2/dia}.$$

EXERCÍCIOS 20.4

1)Calcule a derivada das seguintes funções utilizando o limite da taxa de variação $\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$. Dica: Siga os passos dos exemplos da subseção 20.5.2.

a) $y = x^3 - 3x + 2$

b) $y = senx$

c) $y = a^x$

d) $y = lnx$

2)Encontre a função cúbica que se ajusta aos dados das tabelas a seguir.

a)

x	-4	-2	0	2	4	6
y	64	8	0	-8	-64	-216

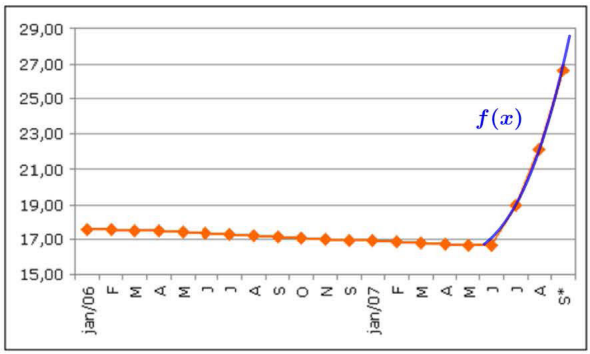
b)

x	1	4	7	10	13	16
y	-6	75	534	1695	3882	7419

3)Ao buscar uma função de ajuste aos dados de uma tabela, cujas abscissas estão em P.A, foi encontrada a seguinte função polinomial $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + 10$. Qual o valor da 5ª taxa de variação dessa tabela?

4)Um móvel descreve uma trajetória conforme a função horária: espaço (m) x tempo(s), dada por $S(t) = 5t^3 - 2t + 10$. Qual a velocidade desse móvel no instante $t = 2s$?

5)O gráfico a seguir mostra a evolução dos preços da saca de 60 quilos do milho em reais, comercializada em Campinas (SP), em valores nominais. Utilizando os preços da tabela a seguir, encontre uma função que se ajusta ao dados e em seguida, estime um valor para o preço da saca de milho em Setembro?



Fonte: Cepea – Esalq/USP
Elaboração: Equipe AgriPoint

Fonte adaptada: (BEEFPOINT, 2007)

x (mês)	4	5	6	7	8	9
y (R$)	16,75	17,00	17,25	19	23,75	?

6) Um tanque está sendo enchido com água por uma torneira que possui vazão de $\frac{1}{10}$ litro por segundo.

a) Se o tanque for cilíndrico de raio r = 2 metros, qual a taxa de variação da altura h da água?

b) Se o tanque for um cone circular invertido de raio 1 m e altura de 4 m, qual a taxa de variação da altura h da água quando essa medir 2 m?

c) Se o tanque for um paralelepípedo de base medindo 2 m x 5 m, qual a taxa de variação da altura h da água?

7) Se o comprimento de um retângulo está crescendo a uma taxa de $2cm/s$ e sua largura a uma taxa de $3cm/s$.

a) Quão rápido sua área estará aumentando quando o seu comprimento for de 10 cm e sua largura 15 cm?

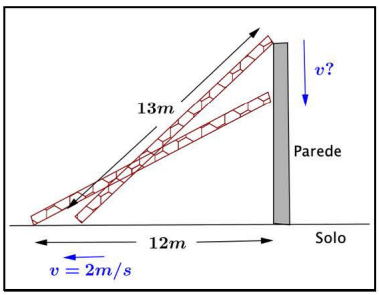
b) Quão rápido seu perímetro aumenta?

c) Qual a taxa de crescimento da diagonal quando o seu comprimento for de 12 cm e sua largura 5 cm.

8) A área de um triângulo está aumentando a uma taxa de 2cm²/min enquanto a sua base está diminuindo 1cm²/min. A que taxa a sua altura estará variando quando a área for de 20cm² e a base for 4cm?

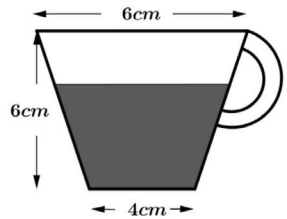
9) Um balão esférico está sendo inflado a uma taxa de 4cm³/s. Qual a taxa de crescimento da área da superfície quando o raio desse balão mede 8cm?

10) Uma escada com 13 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical e um solo plano. Se a escada desliza, afastando-se da parede a uma taxa de 2m/s, a que velocidade v o topo da escada está escorregando para baixo, quando a base da escada está a uma distância de 12m da parede?



11)O preço de um produto é ajustado, segundo a uma taxa de inflação anual i, por $P(t) = P_0(1+i)^t$, em que P_0 é o preço inicial e t é o tempo em anos. Supondo uma taxa de inflação anual sempre constante, calcule a razão entre o preço atualizado e sua taxa de crescimento em qualquer tempo t.

12)Café está sendo derramado a 5ml/s em uma xícara em forma de tronco de cone com diâmetro superior de 6cm, diâmetro inferior de 4cm e altura igual a 6cm. Calcule com que rapidez está subindo o nível do café, quando este estiver a 1cm da borda da xícara. Use $\pi = 3{,}14$.



20.5.5. Regra de L'Hôspital

Encerramos aqui as aplicações de derivada com uma fascinante ferramenta denominada de regra de L'Hôspital[12]. Essa regra resolve limites de funções com indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞ de uma forma muito prática, utilizando a derivada. Vamos à regra.

Regra de L'Hôspital: Suponha que f e g sejam deriváveis e $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto I que contém a (exceto possivelmente em a) e, suponha ainda que,

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ou que } \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty.$$

Havendo uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração: Se f e g são contínuas, e $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g(a) = 0$.

Pelo teorema do valor médio de Cauchy, existe um número y $(a < y < x)$ tal que $\frac{f'(y)}{g'(y)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$, como $f(a) = g(a) = 0$, concluímos que $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$.

Se a é infinito, podemos considerar $y = 1/x$ o que equivale a $x = 1/y$, ou seja, $y \to 0^+$ quando $x \to \infty$. Substituindo em $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y).(-1/y^2)}{g'(1/y).(-1/y^2)} \Rightarrow \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[12] Guillaume François Antoine – Marquês de L'Hôspital (1661-1704)

Exemplo: Calcule os limites aplicando a regra de L'Hôspital.

a) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

Solução: Como há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, podemos aplicar a regra de L'Hôspital derivando a função do numerador e do denominador.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{2x}{1}=6.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}$

Solução: Como há uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, aplicaremos a regra de L'Hôspital derivando a função do numerador e do denominador.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{3x^2}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}=+\infty}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xcosx-senx}{x^3}$

Solução: Há indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ aplicando a regra de L'Hôspital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{xcosx-senx}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-senx.x-cosx}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-senx.x}{3x^2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-senx}{3x}=-\frac{1}{3}\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}}^{1}\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{xcosx-senx}{x^3}=-\frac{1}{3}}.$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}\ (n>0)$

Solução: Há indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a regra de L'Hôspital, temos:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}$. A indeterminação persiste.

Aplicando mais uma vez a regra:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}$. Aplicando n vezes, temos: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n!.1}{e^x}=0\Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0}$.

Utilize o método tradicional para resolver os limites dos itens a) e b) e compare os resultados. Perceba ainda a dificuldade em resolver, sem a regra de L'Hôspital, os demais itens.

Embora a regra de L'Hôspital se aplique somente a indeterminações do tipo 0/0 ou ∞/∞, podemos utilizar alguns recursos algébricos de forma a tornar outros tipos de indeterminação em um tipo em que a regra se aplique.

2º exemplo: Calcule os limites aplicando a regra de L'Hôspital.

a) $\lim_{x\to 1^+}(x-1).ln\,(x-1)$

Solução: Observe que é um tipo de indeterminação na forma $0\times\infty$ e, desse modo, não podemos aplicar a regra imediatamente. Entretanto,

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1).ln\,(x-1) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}\right),$$

o que nos dá indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a regra de L'Hôpital, encontramos:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)^2}{-(x-1)}\right) = \lim_{x\to 1^+} -(x-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 1^+}(x-1).ln\,(x-1) = 0}.$$

Para as indeterminações em forma de potência $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, como 0^0, ∞^0 e 1^∞, utilizamos uma variável dependente y e, em seguida, "logaritmamos" ambos os membros da equação usando o logaritmo natural. Da seguinte forma:

$$y = f(x)^{g(x)} \Rightarrow lny = ln\left(f(x)^{g(x)}\right) \Rightarrow \boxed{lny = g(x).ln\,(f(x))}.$$

b) $\lim_{x\to 0^+} x^{senx}$

Solução: Observe que é uma forma indeterminada 0^0, e não podemos aplicar a regra diretamente. Vamos utilizar o recurso algébrico proposto, fazendo $y = x^{senx}$.

$$lny = ln(x^{senx}) \Rightarrow \boxed{lny = senx.lnx}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^{senx} = \boxed{\lim_{x\to 0^+} lny = \lim_{x\to 0^+} senx.lnx}\ (1).$$

É uma Indeterminação do tipo $0.\infty$ e não podemos aplicar a regra de L'Hôspital. Fazendo:

$$\lim_{x\to 0^+} senx.lnx = \lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{senx}}.$$

Dispomos de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Agora sim, aplicando a regra, obtemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{senx}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{\frac{-1.cosx}{senx^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-sen^2x}{x.cosx}.$$

A indeterminação persiste. Aplicando a regra novamente:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-sen^2x}{x.cosx} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2.senx.cosx}{cosx - x.senx} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2.sen2x}{cosx - x.senx} = 0.$$

Substituindo em (1), temos

$$\lim_{x\to 0^+} lny = \lim_{x\to 0^+} senx.lnx = 0 \text{ . Logo, } \lim_{x\to 0^+} lny = 0.$$

Se $x \to 0^+$, então $y \to 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{senx} = 1}$.

c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

Solução: É uma indeterminação do tipo 1^{∞}. Fazendo $y = (1+x)^{1/x}$, temos

$$lny = ln(1+x)^{1/x} \Rightarrow \boxed{lny = \frac{ln(1+x)}{x}}(1).$$

$\lim_{x\to 0} lny = \lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} \Rightarrow$ Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Em (1), se $x \to 0$ então $lny = 1 \Rightarrow y \to e$. Isso nos dá $\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e}$.

EXERCÍCIOS 20.5

1) Calcule os limites aplicando a regra de L'Hôspital.

a) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$

b) $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\left(\frac{4x^2-1}{2x-1}\right)$

c) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{-3x^2-11x+14}{x^2-2x+1}\right)$

d) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^4-9x+2}{2x^2-x^3}\right)$

e) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^n-1}{x^m-1}\right)$

f) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{senx}\right)$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{senax}{senbx}\right)$

h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$

i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\left(\frac{tgx}{tg3x}\right)$

j) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{sen(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$

k) $\lim_{x\to \pi}\left(\frac{tg(x-\pi)}{x-\pi}\right)$

l) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{x}\right)$

m) $\lim_{x\to 0^+} x.lnx$

n) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{e^x}{x^3}\right)$

o) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3}{e^x}\right)$

p) $\lim_{x\to 1^+} lnx.ln\,(x-1)$

q) $\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$

r) $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{-2/x}$

s) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$

t) $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$

u) $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{lnx})^x$

v) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{tgx}$

w) $\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{2}{1+lnx}\right)}$

x) $\lim_{x\to 0}(1+senx)^{1/x}$

2) Calcule os limites aplicando a regra de L'Hôspital.

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lnx}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{cosx}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{2x}-1)^x$

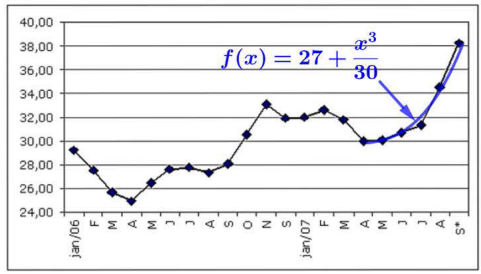
f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{lna}{1+lnx}\right)}$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 20.6

1) O gráfico a seguir mostra a evolução dos preços da saca de 60 quilos da soja em reais, comercializada no Paraná, em valores nominais. Utilizando a modelagem matemática encontrou-se no período de maio a agosto de 2007 ($x = 5$ à $x = 8$), uma função de ajuste $f(x) = 27 + \frac{x^3}{30}$.

a) Qual o valor do preço que se pode projetar para o mês de setembro de 2007, a partir dessa função?

b) De acordo com essa função, os preços a partir de setembro de 2007 serão sempre crescentes?



Fonte: Cepea – Esalq/USP
Elaboração: Equipe AgriPoint

Fonte: (BEEFPOINT, 2007)

2) A função $D = 25x^3 - 16x^2 + 3x + 1$ relaciona para um dado tipo de manejo, a densidade volumétrica D do solo (mg /m³) com diferentes alturas x (m) do perfil do solo. Diante das informações, utilize $\sqrt{31} \cong 5{,}57$ e calcule:

a) O valor máximo de D e a altura x em que isso acontece;

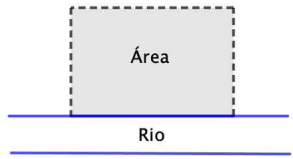
b) O valor mínimo de D e a altura x em que isso acontece;

c) O intervalo de decrescimento da função D;

d) O ponto de inflexão.

3) Uma empresa agroquímica pretende confeccionar tanques cilíndricos de 100 litros para a venda de pesticidas. Qual deve ser as medidas dessa tanque (raio e altura) se o material gasto para confeccioná-lo deve ser o mínimo possível?

4) Um fazendeiro pretende cercar com 800 metros de cerca, uma área retangular às margens de um rio reto. Se ele não pretende cercar o lado às margens do rio, qual deve ser as medidas dessa área para que ela seja máxima?



5) Manejo de pastagem é um conjunto de ações que visa obter do rebanho a maior quantidade de carne e leite que o animal pode produzir por área, sem afetar o desenvolvimento da forrageira e a qualidade do solo. Um dos modelos utilizado é o sistema de pastagem rotacionado, em que consiste em uma pastagem subdividida em áreas menores que são utilizados um em seguida do outro, determinando períodos de ocupação e descanso da pastagem.

Fonte: (EMBRAPA, 2019)

a) Um pecuarista deseja adotar esse sistema de pastagem. Para isso, pretende cercar um campo retangular de 1 ha (10.000 m²) e em seguida dividi-lo ao meio por uma cerca paralela a um dos lados. Como fazer isso de modo que os custos da cerca seja o mínimo possível?

b) Outro pecuarista pretende cercar um mesmo campo retangular de 1 ha (10.000 m²), porém, irá dividi-lo em quatro partes iguais utilizando duas cercas, com cada uma paralela a cada lado da cerca. Como fazer isso de modo que os custos da cerca seja o mínimo possível?

c) Mostre que se um campo retangular de 10.000 m², for dividido em n partes iguais e n for um quadrado perfeito, então o campo precisa ser um quadrado de lado 100m, para que os custos da cerca seja mínimo.

6) Um suinocultor dispõe apenas de R$ 2400,00 para cercar um lote para criação de porcos.

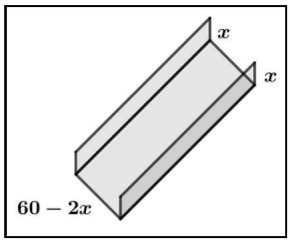
a) Se o metro linear da cerca custa R$ 15,00, quais as dimensões desse lote, supondo-o retangular, para que sua área seja máxima?

b) Para o mesmo custo de metro linear, é mais vantajoso para o suinocultor optar pelo formato retangular ou circular do lote?

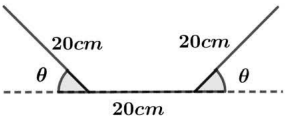
7) O peso médio de 20 novilhos de uma fazenda é de 300kg. Estudos indicam que o peso médio fica reduzido em 7,5 kg por cada novilho acrescentado. Quantos novilhos devem ser acrescentado para que o peso médio seja máximo?

8) Uma calha deve ser projetada para uma máquina transportadora de grãos. Sua confecção é feita a partir de uma lâmina retangular de 60 cm de largura. Se a lâmina deve ser dobrada à uma distância x de ambas as bordas da largura, calcule:

a) O valor de x ideal, na figura ao lado, para que a calha transporte o maior volume de grãos?



b) O valor do ângulo θ para que a calha trapezoidal da figura a seguir, transporte o maior volume de grãos?



9)Os dados a seguir foram coletados de um trabalho de modelagem matemática aplicada em um cultivo de alface, fazendo um comparativo entre os valores da massa média das mudas do experimento de acordo com o tempo (idade).

Tempo (dias)	16	36	56	76	96
Massa média das mudas	3,072	6,592	42,912	88,032	117,952

Fonte adaptada: (HERRMANN, KINETZ e ELSNER, 2019)

a)Qual a função cúbica de ajuste para esse experimento?

b) Explique por que a 3ª derivada equivale a 3ª taxa de variação da função de ajuste desse experimento?

10)A implantação da cultura do feijão no sistema de plantio direto vem crescendo em todo território nacional, entretanto, o plantio direto exige uma adubação nitrogenada diferenciada, tornando-se necessário buscar mais informações a esse respeito. Com o objetivo de verificar o efeito da aplicação de diferentes níveis de nitrogênio (0, 30, 60, 90, 120, 150) com uma cobertura vegetal de milho + mucuna-preta, obteve-se as seguintes relações com o número médio de grãos por planta:

Niveis de adubação $(kg\ ha^{-1})$	0	30	60	90	120	150
Média do número de grãos	50	61,1	57,08	47,66	42,56	51,5

Fonte adaptada: (SILVA, 2002)

a)Qual a função que se ajusta aos dados?

b)Qual o valor máximo da média do número de grãos e em que nível de nitrogênio isso ocorre?

11) Avaliando o efeito de doses de potássio (k) nas plantas de uma cultivar feijoeiro, somente a quantidade de Mg foi influenciada significativamente pelas doses de potássio, ajustando-se à função cúbica $Mg = 0{,}0001k^3 - 0{,}0388k^2 + 4{,}0678k - 109{,}14$. Calcule o valor máximo de Mg e para qual valor de k isso acontece?

Fonte: (THEODORO e MARINGONI, 2006)

12) Em um trabalho de pesquisa objetivou-se modelar a absorção de nutrientes na mandioca submetida a doses de nitrogênio ao longo do ciclo produtivo. O teor de nitrogênio coletados na folha da mandioca em função de épocas de avaliação (DAE) estão a seguir:

épocas de avaliação (DAE)	120	150	180	210	240	270
Teor de N ($g\ kg^{-1}$)	29,856	25,875	28,464	33,897	38,448	38,391

Fonte adaptada: (SANTOS, 2013)

a) Qual a função que se ajusta aos dados?

b) Qual o valor máximo de teor de N e em que época de avaliação isso acontece?

13) Grãos de soja caem de uma calha de escoamento diretamente em um silo cilíndrico de raio 5 metros. Se os grãos caem a uma taxa de 5m³/min, qual a taxa de crescimento da altura dos grãos no silo?

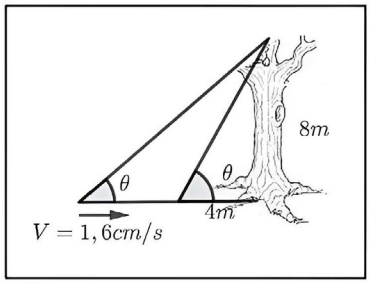
Pixabay.com

14) O crescimento de uma planta é dada $h(t) = \frac{10t}{t+2}$, onde $h(t)$ é a altura em metros e t é o tempo (em meses). Calcule:

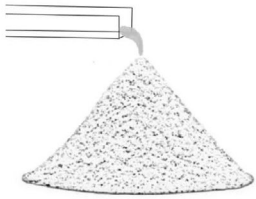
a) A taxa de crescimento da altura em 2 meses.

b) O limite de altura atingida pela planta.

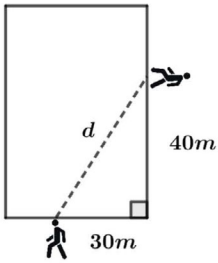
15) Um tronco de uma árvore de 8 metros de altura projeta uma sombra que move-se com velocidade constante de 1,6 cm/s, conforme a figura. Qual a velocidade com que o ângulo θ aumenta quando a sombra está a 4m do pé da árvore?



16)Grãos de milho caem de uma calha de escoamento no chão formando uma pilha cônica equilátera (diâmetro igual a altura). Se na altura de 2 metros a pilha cresce a uma taxa de 0,5m/min, nesse momento, qual a taxa de escoamento desses grãos?



17) Dois agricultores estão pintando a cerca de um terreno retangular. Ambos os agricultores partem pintando do canto do terreno, com velocidades de 3m/min e 4m/min, respectivamente. Qual a taxa de variação da distância d no momento em que ambos estão a 40m e 30m, respectivamente, do ponto inicial?



18)Em um trabalho realizado para modelar a área foliar de feijão de porco determinada por fotos digitais, encontrou-se a função potência: $A(x) = 3{,}7x^{1{,}9}$, onde $A(x)$ é a área foliar e x é o produto do comprimento com a largura do limbo do folíolo central da folha. Qual a taxa de crescimento da área foliar para $x = 10$?

Fonte adaptada: (TOEBE, FILHO, *et al.*, 2012)

19)A taxa de inflação anual é de 4% ao ano e o preço de qualquer produto é dado por $P(t) = P_0(1{,}04)^t$, onde t é o tempo em anos e P_0 é o preço inicial. Supondo a taxa de inflação sempre igual a 4% todos os anos, qual será a taxa de crescimento do preço de um produto que custa hoje R$ 120,00 daqui a 10 anos?

20)A proliferação de um fungo em um cultivo cresce exponencialmente, triplicando sua quantidade a cada dia. Sendo o valor inicial P_0, qual a taxa de crescimento desse fungo no 10º dia?

21)As curvas de crescimento tem diversas aplicações na área das ciências agrárias. Em estudos relacionados à adubação mineral de plantas, por exemplo, é comum efetuar-se a regressão pela lei de Mitscherlich: $y = A\left[1 - 10^{-c(x+b}\right]$. Onde y é a produção e x é a quantidade de fertilizante aplicada. Em uma adubação em cana de açúcar obteve-se a seguinte equação de regressão: $y = 67{,}856\left[1 - 10^{-0{,}006(x+66{,}829)}\right]$.

Fonte adaptada: (MOREIRA e MIASAKI, 2016)

a)Qual a taxa de crescimento da produção para uma quantidade de fertilizante $x = 40$?

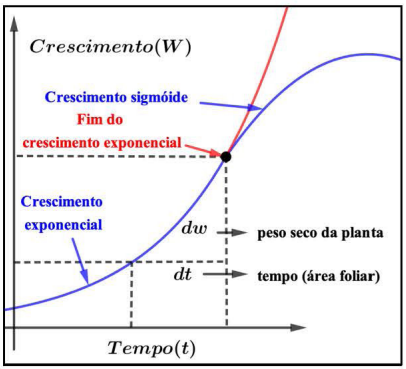
b)Mostre que essa função é sempre crescente mas não cresce indefinidamente.

22)A dinâmica do crescimento vegetal pode ser acompanhada por meio de fórmulas matemáticas. Interações mútuas entre indivíduos impõem limitações ao crescimento e a curva de crescimento sofre uma inflexão, tomando uma conformação sigmoide (ver figura).

Supondo que o crescimento do peso de matéria seca, nestas condições, segue a seguinte equação: $W(t) = \frac{1}{1+e^{-5t+5}}$. Calcule:

a)O ponto de inflexão.

b)A taxa de crescimento no instante $t = 1$.



Fonte adaptada: (PEIXOTO, ALMEIDA, *et al.*, 2020)

CAPÍTULO

21

INTEGRAL

INTEGRAL

21. INTEGRAL

21.1. Conceito de integral

O conceito de integral surgiu historicamente a partir da necessidade dos matemáticos em calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são retas. O primeiro a calcular áreas desses tipos de figuras (como arcos de círculos, parábolas, etc.), foi o matemático grego Arquimedes (287-212 a.c). O método adotado por Arquimedes, denominado de método da exaustão, consiste em dividir a figura em várias outras figuras menores (normalmente polígonos), em quantidades suficientemente grandes. A soma das áreas dessas figuras menores é aproximadamente a área da figura plana pretendida.

Esse método foi utilizado no volume 2 dessa coleção para demonstrar a fórmula da área de um círculo, do volume de uma esfera, do volume de um cone e de um cilindro. Para fins didáticos, relembraremos a seguir a demonstração da fórmula da área de um círculo.

Inicialmente, vamos subdividir um círculo em 10 triângulos congruentes, conforme a figura 21.1.1. A soma das áreas de todos os triângulos que subdividem o círculo é próximo da área do círculo. Aumentando agora para 50 triângulos essa subdivisão, veja a figura 21.1.2, a soma das áreas de todos os triângulos que subdividem o círculo é mais próximo ainda da área do círculo. Inclusive, já é impossível a olho nu, notar qualquer diferença.

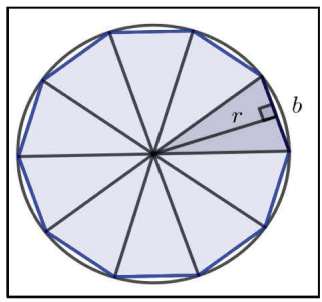


Figura 21.1.1

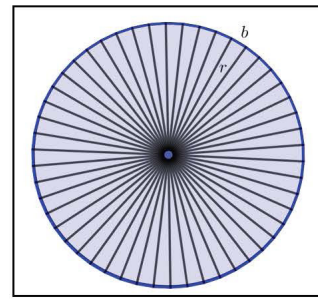


Figura 21.1.2

Desse modo, podemos inferir que para uma quantidade n suficientemente grande de triângulos, tão grande quando desejemos, haverá para $n \to \infty$ uma equivalência entre as áreas. E como consequência disso, segundo a figura 21.1.1:

– A base b desses triângulos será um arco da circunferência. Assim, $n.b$ será o próprio comprimento da circunferência: $n.b = 2\pi r$;

– A altura r de cada triângulo coincidirá com o raio do círculo. E assim, a área de um triângulo será $\frac{b.r}{2}$ e dos n triângulos: $n.\frac{b.r}{2}$.

Como a soma da área dos triângulos será igual a área do círculo, temos:

$$A = n.\frac{b.r}{2} = \frac{2.\pi.r.r}{2} \Rightarrow \boxed{A = \pi r^2}.$$

A famosa fórmula da área de um círculo.

O objetivo na introdução desse método não é aplicá-lo no cálculo de áreas de figuras planas conhecidas, mas sim, em áreas entre uma função e o eixo x, dentro de um intervalo determinado. Embora para esse caso, existam outros métodos de subdivisões como: o método do trapézio, método do ponto médio, etc. (conforme veremos na seção 21.9) aplicaremos a seguir uma subdivisão da área em retângulos denominado **método dos retângulos**.

Partindo de um exemplo mais simples, vamos calcular a área aproximada entre essa função $f(x) = x^2$ e o eixo x no intervalo $[1, 4]$, conforme a figura 21.1.3.

Particionando essa área em retângulos de bases iguais a 0,5 como na figura 21.1.4, temos que a altura de cada retângulo é a imagem da função em cada abscissa da base, conforme a seguir:

$f(1) = 1^2 = 1$; $f(1{,}5) = 1{,}5^2 = 2{,}25$; $f(2) = 2^2 = 4$; $f(2{,}5) = 2{,}5^2 = 6{,}25$;
$f(3) = 3^2 = 9$; $f(3{,}5) = 3{,}5^2 = 12{,}25$.

A soma S das áreas de todos os retângulos é:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

$$S = 0{,}5.(1 + 2{,}25 + 4 + 6{,}25 + 9 + 12{,}25 = 34{,}75) = \boxed{17{,}375}.$$

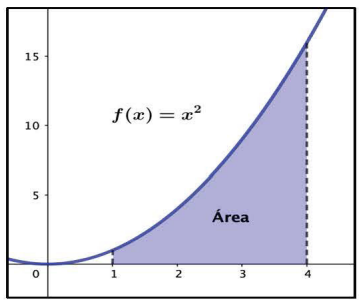


Figura 21.1.3

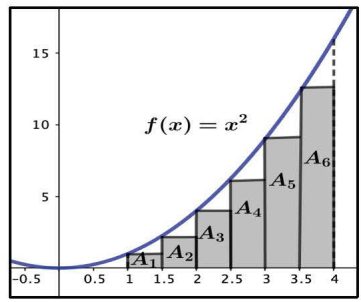


Figura 21.1.4

O valor da área calculado ($S = 17{,}375\ u.a$) pode até não ser tão próximo do valor exato $A = 21\ u.a$, conforme provaremos adiante, mas podemos aproximá-lo ainda mais aumentando a quantidade de retângulos que particionam a área.

Na figura 21.1.5, a área foi novamente particionada, dessa vez, em 30 retângulos de base 0,1. Com a auxilio de uma calculadora, encontramos

$$f(0{,}1) = 0{,}1^2 = 0{,}01;$$
$$f(0{,}2) = 0{,}2^2 = 0{,}04; \ldots;$$
$$f(3{,}9) = 3{,}9^2 = 15{,}21;$$
$$0{,}01 + 0{,}04 + \ldots 15{,}21 = 205{,}4.$$

Uma vez que a base é 0,1, obtemos a soma

$$S = 20{,}54.$$

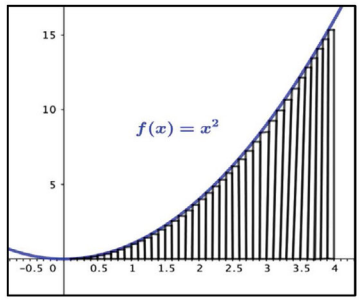


Figura 21.1.5

Observe que S é bem mais próximo do valor exato $A = 21\ u.a$. E claramente, a medida em que aumentamos ainda mais o número n de retângulos particionados, obteremos a soma da área dos retângulos cada vez mais próximo da área real pretendida. Isso nos motiva a aplicar, mais uma vez, o limite da soma dos n retângulos, com n tendendo ao infinito, conforme a seguir.

Definição 21.1.1 (Soma de Riemann): Seja área entre uma função $f(x)$ e o eixo x subdividida em n retângulos. Considerando a base de cada retângulo como $x_{i+1} - x_i = \Delta x$ e a altura como $f(x_i^*)$, podemos escrever a soma das áreas desses retângulos como:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x.$$

Essa soma é denominada de **soma de Riemann**, em homenagem ao matemático Bernhard Riemann (1826 - 1866).

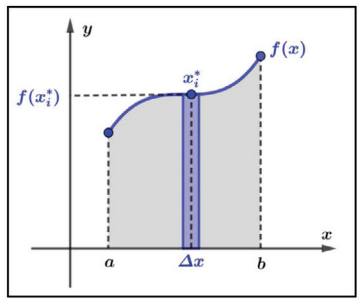


Figura 21.1.6

Conforme já exposto, o limite dessa soma com n tendendo ao infinito, equivale a área entre a função $f(x)$ e o eixo x.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x.$$

E é denominada de **integral definida**.

21.2. Integral definida

Definição 21.2.1 (Integral definida): Seja uma função f contínua em um intervalo $[a,b]$ subdividido em n subintervalos iguais a $\Delta x = x_{i-1} - x_i = \frac{b-a}{n}$. Então, a integral definida de f de a a b, conforme a figura 21.1.6), temos

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x.$$

Onde: x_i^* são pontos amostrais arbitrários de Δx, $x_i = a + i\Delta x$ e **quando esse limite existe dizemos que f é integrável em $[a,b]$.**

Observações sobre a notação e simbologia de $\int_a^b f(x)dx$:

- O símbolo $\int$ (um "s" de soma alongado), foi introduzido pelo matemático Leibniz e é denominado de sinal de integração.
- $f(x)$ é chamado de integrando.
- a e b são os limites (ou o intervalo) de integração, a é o **limite inferior** e b é o **limite superior**.
- O símbolo dx não tem valor, apenas indica que a variável dependente é o x.

Vamos resolver novamente o 1º exemplo (da figura 21.1.3) aplicando agora essa definição.

Solução: $a = 1, b = 4$, $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x \Rightarrow x_i = 1 + i.\frac{3}{n}$

$$f(x_i) = f\left(1 + i.\frac{3}{n}\right) = \left(1 + i.\frac{3}{n}\right)^2 = 1 + 2.i.\frac{3}{n} + i^2.\frac{9}{n^2} = \boxed{1 + \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}}.$$

Substituindo na definição, temos

$$A = \int_1^4 (x^2)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right).\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{9i^2}{n^2}\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[n + \frac{6}{n}\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right) + \frac{9}{n^2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right)\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[n + 3n + 3 + 3n + \frac{9}{2} + \frac{3}{2n}\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left[7n + \frac{15}{2} + \frac{3}{2n}\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left[21 + \frac{45}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right] = \boxed{21\ u.a} \Rightarrow A = \boxed{\int_1^4 (x^2)dx = 21\ u.a}.$$

2º exemplo: Vamos calcular $\int_0^2 (2x+1)dx$ usando a definição.

Solução: $a = 0, b = 2, \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x \Rightarrow x_i = 0 + i.\frac{2}{n} = i.\frac{2}{n}$.

$$f(x_i) = f\left(i.\frac{2}{n}\right) = \boxed{i.\frac{4}{n} + 1}.$$

Substituindo na definição, encontramos

$$A = \int_0^2 (2x+1)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(i.\frac{4}{n} + 1\right).\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(i.\frac{4}{n} + 1\right) \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i.\frac{4}{n} + \sum_{i=1}^{n} 1\right] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[\frac{4}{n}\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right) + n\right] \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}[2n + 2 + n] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}[3n + 2] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left[6 + \frac{4}{n}\right] = \boxed{6} \Rightarrow \boxed{\int_0^2 (2x+1)dx = 6}.$$

Para mostrar que de fato a integral representa a área entre a função e o eixo x no intervalo, basta ver que a figura geométrica nesse intervalo é um trapézio de base maior: 5, base menor: 1 e altura: 2 (figura 21.2.1), o que acarreta em área igual a

$$A = \frac{2.(1+5)}{2} = 6\ u.a.$$

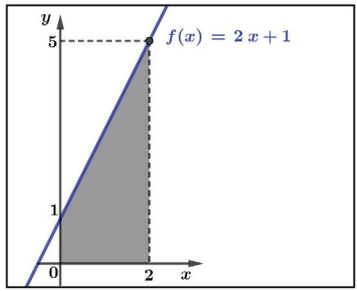


Figura 21.2.1

O cálculo de integrais definidas usando a definição 21.2.1, além de requerer conhecimentos sobre séries (não presentes nesta coleção), é normalmente longo e trabalhoso. O teorema fundamental do cálculo a seguir servirá como ferramenta facilitadora para essas contas. Para utilizá-lo, precisamos da definição de função primitiva.

Definição 21.2.2 (função primitiva ou antiderivada): Seja uma função f definida em $[a,b]$. Denominamos de F uma função primitiva (ou antiderivada) de f, uma função tal que: $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Em outras palavras, a primitiva de uma função f é outra função F cuja derivada é f.

Exemplo: Uma primitiva da função $f(x) = 3x$ é a função $F(x) = \frac{3}{2}x^2$, pois

$$F'(x) = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}.2.x^{2-1} = 3x.$$

Como a derivada da constante é zero, podemos encontrar um conjunto de funções primitivas acrescentando uma constante c, ou seja, todas as funções na forma $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + c$ são primitivas de $f(x) = 3x$.

2º exemplo: A primitiva da função $f(x) = sec^2x$ é a função $F(x) = tgx + c$, pois:

$$F(x) = tgx + c \Rightarrow F'(x) = sec^2x.$$

Teorema 21.2.1 (Teorema fundamental do cálculo): Sejam as funções f e F ambas contínuas em $[a,b]$, se $F(x)$ é derivável em (a,b) e também primitiva de $f(x)$, então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Demonstração: O teorema 20.5.2.3 (teorema do valor médio-TVM) nos diz que, se uma função F é contínua em $[c,d]$ e derivável em (c,d), então existe um ponto $x_i^* \in (c,d)$ tal que $\frac{F(d)-F(c)}{d-c} = F'(x_i^*)$. Isto é, o coeficiente angular da reta secante equivale à derivada da função em um x_i^* do intervalo (c,d). Isso é o mesmo que

$$F'(x_i^*).(d-c) = F(d) - F(c).$$

Estendendo esse entendimento à todas das retas secantes à função $F(x)$, conforme a figura 21.2.2, obtemos

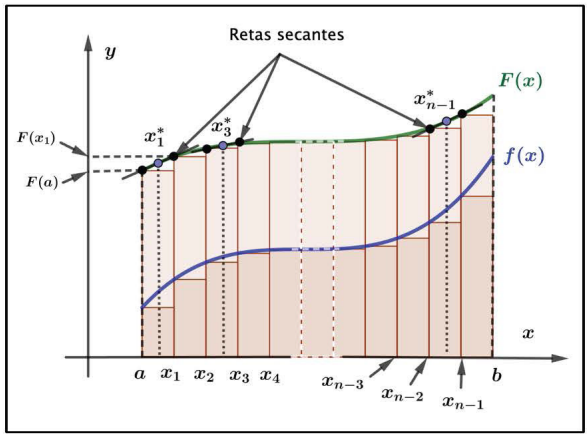
$$\begin{aligned}
F'(x_1^*).(x_1 - a) &= F(x_1) - F(a)\\
F'(x_2^*).(x_2 - x_1) &= F(x_2) - F(x_1)\\
F'(x_3^*).(x_3 - x_2) &= F(x_3) - F(x_2)\\
&\vdots\\
F'(x_{n-1}^*).(x_{n-1} - x_{n-2}) &= F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\\
F'(x_n^*).(b - x_{n-1}) &= F(b) - F(x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Considerando uma mesma variação Δx para as abscissas e somando ambos os membros das equações acima, encontramos

$$\sum_{i=1}^{n} F'(x_i^*).\Delta x = F(b) - F(a).$$

Como $F'(x_i^*) = f(x_i^*)$ e esse equivale a altura dos retângulos (tomando x_i^* como as abcissas dos pontos arbitrários), concluímos a partir da soma de Riemann que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$



Representativamente, as funções $F(x)$ e $f(x)$ foram postas em um mesmo plano cartesiano para melhor visualização dos retângulos e aplicação da soma de Riemann.

Figura 21.2.2

O teorema fundamental do cálculo afirma que, se conhecermos uma primitiva de $F(x)$, ou seja, uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, então podemos calcular a integral $\int_a^b f(x)dx$, subtraindo os valores de $F(x)$ nas extremidades do intervalo. Isto é, basta calcular: $F(b) - F(a)$. Essencialmente, essa é a praticidade desse teorema na solução de integrais.

Vale destacar também, que essa conexão (ou relação inversa) entre a derivada e a integral, estabelecida pelo teorema fundamental do cálculo, além de prática, é fulcral para o desenvolvimento de toda a teoria sobre o cálculo diferencial e integral que se sucede.

Observação 1: Para efeito de cálculo do valor numérico de integrais, a constante c do conjunto das funções primitivas $F(x) + c$ pode ser ignorada. Veja:

$$\int_a^b f(x)dx = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a).$$

Exemplo: Vamos recalcular $\int_1^4 (x^2)dx$, dessa vez utilizando o teorema fundamental do cálculo.

Solução: Uma função $F(x)$ cuja derivada é x^2 é a função $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Dessa forma

$$\int_1^4 (x^2)dx = \frac{x^3}{3}\Big]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = \frac{63}{3} = 21 \ (como\ previ\acute{a}mos).$$

Observação 2: Usamos a notação $F(x)\Big]_a^b$ para representar a substituição ainda a ser feita dos intervalos, isto é, o cálculo de $F(b) - F(a)$.

2º exemplo: Vamos recalcular $\int_0^2 (2x + 1)dx$, dessa vez utilizando o teorema fundamental do cálculo.

Solução: Uma função $F(x)$ cuja derivada é $2x + 1$ é a função $F(x) = x^2 + x$. Assim,

$$\int_0^2 (2x + 1)dx = x^2 + x \Big]_0^2 = 2^2 + 2 - (0^2 + 0) = 6 (como\ previ\acute{a}mos).$$

Vimos pela definição 21.2.1, que a integral $\int_a^b f(x)dx$ é equivalente ao limite da soma de Riemann: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x$. Sendo assim, como $f(x_i^*)$ representa a altura dos retângulos particionados (ver figura 21.1.6), os valores de $f(x_i^*).\Delta x$ da soma de Riemann podem ser não só positivos ou zero, se $f(x) \geq 0$, mas também negativos, se $f(x) < 0$. Isso irá ocasionar, caso a função apresente valores positivos e negativos no intervalo $[a, b]$, uma contabilização na soma, e consequentemente, uma contabilização de áreas ao se calcular a integral $\int_a^b f(x)dx$. Diante desse fato, é prudente observar que:

– Se a função estiver totalmente acima do eixo x $(f(x) \geq 0)$ em todo o intervalo $[a, b]$, conforme figura 21.2.3, então o resultado da integral será positiva e representará a área entre a função e o eixo x no intervalo.

– Se a função estiver totalmente abaixo do eixo x $(f(x) < 0)$ em todo o intervalo $[a, b]$, conforme a figura 21.2.4, então o resultado da integral será negativa e o seu módulo representará a área entre a função e o eixo x no intervalo.

– Caso no intervalo $[a, b]$, a função possuir partes acima e também abaixo do eixo x (ver figura 21.2.5), então, o resultado da integral **não** representará a área entre a função e o eixo x e sim, uma contabilização das áreas que estão acima (positivas) menos as áreas que estão abaixo (negativas) do eixo x.

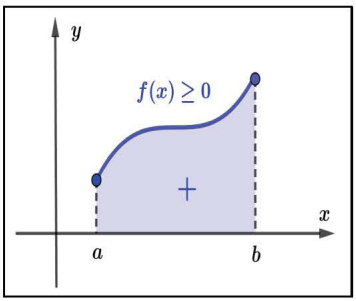


Figura 21.2.3

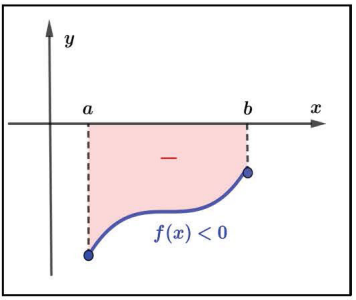


Figura 21.2.4

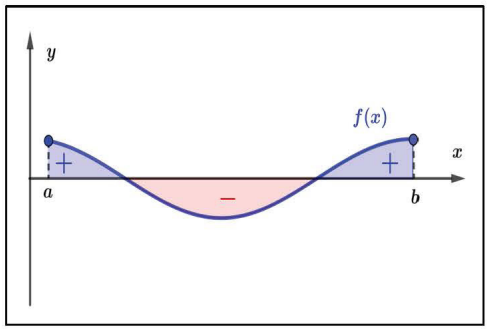


Figura 21.2.5

Para uma melhor compreensão, faremos o cálculo de novos exemplos de integrais, acompanhados da interpretação geométrica do seu valor numérico.

3º exemplo: $\int_1^3 e^x dx$.

Solução: Uma função $F(x)$ cuja derivada é e^x é a função $F(x) = e^x$, logo

$$\int_1^3 e^x dx = e^x\Big]_1^3 = \boxed{e^3 - e^1} \cong 17{,}2.$$

Como a função é sempre positiva no intervalo [1,3], esse valor corresponde a área entre a função e^x e o eixo x nesse intervalo. Ver figura 21.2.6.

4º exemplo: $\int_{-2}^0 x^3 + 2x\, dx$.

Solução: Uma função $F(x)$ cuja derivada é $x^3 + 2x$ é a função $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^2$. Então

$$\int_{-2}^0 x^3 + 2x\, dx = \frac{x^4}{4} + x^2\Big]_{-2}^0 = \frac{0^4}{4} + 0^2 - \left(\frac{(-2)^4}{4} + (-2)^2\right) = \boxed{-8}.$$

Esse valor numérico em módulo (ou seja, sem o sinal) representa a área entre a função e o eixo x. O valor negativo deve-se ao fato da função está totalmente abaixo do eixo x, conforme o gráfico da função na figura 21.2.7.

5º exemplo: Calcular a integral definida $\int_0^{2\pi} cosx dx$.

Solução:

$$\int_0^{2\pi} cosx dx = senx\Big]_0^{2\pi} = sen2\pi - sen0 = 0.$$

Isso significa que não existe área entre a função $f(x) = cosx$ e o eixo x nesse intervalo?

Nesse caso, não. Veja no gráfico dessa função na figura 21.2.8, que a função assume valores positivos e negativos no intervalo $[0,2\pi]$. Assim, o valor numérico da integral representa a contabilização das "áreas positivas" com as "áreas negativas", isto é: $A_1 - A_2 + A_3$, e evidentemente, o valor nulo nos acusa que, nesse caso: $A_1 + A_3 = A_2$.

Como demonstração dessa contabilidade, vamos calcular as áreas em subintervalos separados, utilizando integrais.

Observe o sinal negativo (a área está abaixo do eixo x).

$$A_1 = \int_0^{\pi/2} cosxdx = senx\Big]_0^{\pi/2} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen0 = \boxed{1}.$$

$$A_2 = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} cosxdx = senx\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{-2}.$$

$$A_3 = \int_{3\pi/2}^{2\pi} cosxdx = senx\Big]_{3\pi/2}^{2\pi} = sen(2\pi) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \boxed{1}.$$

Perceba que, de fato: $1 - 2 + 1 = 0$.

Se o cálculo pretendido fosse a área entre a função $f(x) = cosx$ e o eixo x nesse intervalo, a resposta, obviamente, seria $A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ u.a.

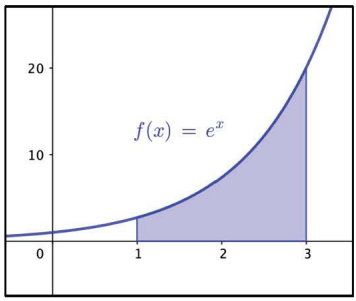


Figura 21.2.6

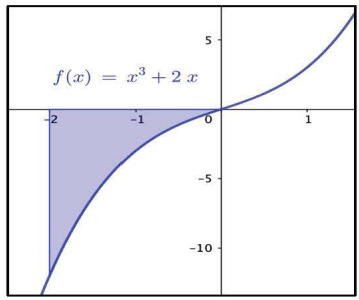


Figura 21.2.7

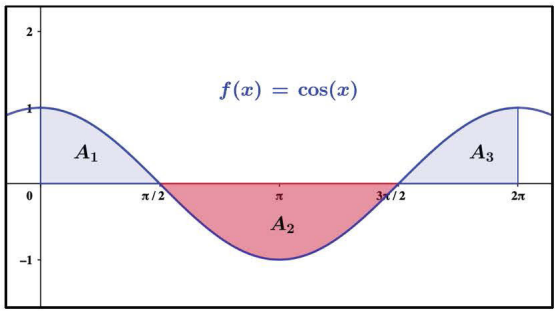


Figura 21.2.8

A seguir estão algumas propriedades que podem ser úteis no cálculo de funções primitivas de funções não elementares.

21.2.1. Propriedades de integral definida

Se f e g forem integráveis em $[a,b]$ e se c for uma constante, então cf, $f+g$ e $f-g$ serão integráveis em $[a,b]$ como a seguir:

Propriedade 1:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Invertendo a ordem do intervalo de integração, a integral muda de sinal.

Demonstração:

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\big(F(b) - F(a)\big) = -\int_a^b f(x)dx.$$

Propriedade 2:

$$\int_a^b c.f(x)dx = c.\int_a^b f(x)dx \Leftarrow \forall c \text{ real.}$$

A integral do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pela integral da função.

Demonstração:

$$\int_b^a cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c.f(x_i).\Delta x = c\overbrace{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x}^{\int_b^a cf(x)dx}.$$

Propriedade 3:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

A integral da soma é igual a soma das integrais.

Demonstração:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)+g(x_i)].\Delta x \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Propriedade 4:

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

A integral da diferença é igual a diferença das integrais.

Demonstração:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)].\Delta x \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).\Delta x - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i).\Delta x = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx.$$

Propriedade 5:

$$\boxed{\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ (com\ n \neq -1)}.$$

Para calcular a primitiva de x^n devemos somar mais 1 ao expoente e utilizar esse mesmo resultado como denominador.

Demonstração: A derivada de $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ é x^n.

Todas as propriedades são claramente e concomitantemente aplicáveis à duas ou mais integrais.

1º exemplo: Calcular a integral definida $\int_{-1}^{3} (x^2 - 3x + 2)dx$.

Solução: Aplicando as propriedades, temos

$$\int_{-1}^{3} (x^2 - 3x + 2)dx = \int_{-1}^{3} x^2 dx - \int_{-1}^{3} -3x dx + \int_{-1}^{3} 2dx =$$

$$\frac{x^3}{3} - 3.\frac{x^2}{2} + 2x\Big]_{-1}^{3} = \left(\frac{3^3}{3} - 3.\frac{3^2}{2} + 2.3\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 3.\frac{(-1)^2}{2} + 2.(-1)\right) =$$

$$\left(9 - \frac{27}{2} + 6\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{3}{2} - 2\right) = \left(\frac{18 - 27 + 12}{2}\right) - \left(\frac{-2 - 9 - 12}{6}\right) =$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{-23}{6}\right) = \frac{9 + 23}{6} = \frac{32}{6} = \boxed{\frac{16}{3}} \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{3} (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{16}{3}}.$$

2º exemplo: Calcular a integral definida $\int_0^{\pi/4} (sec^2 x - 5x^4 + 2cosx)dx$.

Solução: Aplicando as propriedades, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (sec^2 x - 5x^4 + 2cosx)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (sec^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 5x^4 dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2cosx dx$$

$$tgx - 5.\frac{x^5}{5} + 2.senx\Big]_0^{\pi/4} = \left(1 - \frac{\pi^5}{1024} + 2.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(tg0 - 5.\frac{0^5}{5} + 2.sen0\right)$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} (sec^2 x - 5x^4 + 2cosx)dx = 1 - \frac{\pi^5}{1024} + \sqrt{2}}.$$

EXERCÍCIOS 21.1

1) Calcule as integrais definidas:

a) $\int_0^3 5\,dx$

b) $\int_{-2}^{2} x\,dx$

c) $\int_1^4 (-3x+1)dx$

d) $\int_{-3}^{3} (1-x)dx$

e) $\int_0^2 (x^2-4x+4)dx$

f) $\int_0^1 (x-1)^2 dx$

g) $\int_{-1}^{1} x^3\,dx$

h) $\int_1^{-1} x^3\,dx$

i) $\int_1^{-1} (x^3+x^2-x+4)dx$

j) $\int_2^4 \sqrt{x}\,dx$

k) $\int_0^{\pi} cosx\,dx$

l) $\int_0^{2\pi} senx\,dx$

m) $\int_0^{\pi/4} sec^2 x\,dx$

n) $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

o) $\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}+x\,dx$

p) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

q) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

r) $\int_{2\pi}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

s) $\int_0^{\pi} \left(e^x+3x^2-senx\right)dx$

t) $\int_0^1 \left(e^{-x}+x^2-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

u) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)dx$

2) Calcule a área entre a função e o eixo x no intervalo indicado:

a) $f(x)=2x$ no intervalo $[-1,1]$.

b) $f(x)=12x-3x^2$ no intervalo $[0,4]$.

c) $f(x)=12x-3x^2$ no intervalo $[0,5]$.

d) $f(x)=1+cosx$ no intervalo $[0,\pi]$.

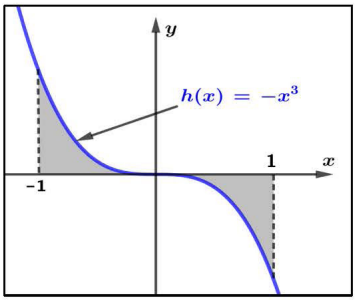
e) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ no intervalo $[0,1]$.

f) $f(x)=2^x$ no intervalo $[0,1]$.

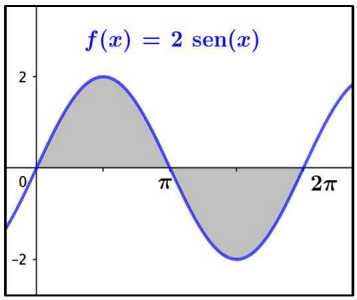
g) $f(x)=x^3-2x^2+x$ *no intervalo* $[-1,1]$.

3) Calcule a área destacada em cada gráfico:

a)



b)



4)Um aluno resolveu as integrais conforme exposto a seguir

$$I - \int_0^{\pi} sec^2 x dx = tgx\Big]_0^{\pi} = tg\pi - tg0 = 0 - 0 = 0.$$

$$II - \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx = -\frac{1}{x}\Big]_{-1}^{1} = -\frac{1}{1} - 1 = -2.$$

Sobre essas resoluções podemos afirmar que:

a) ( ) Ambas estão corretas.

b) ( ) Apenas a resolução I está correta.

c) ( ) Apenas a resolução II está correta.

d) ( ) Ambas as resoluções estão incorretas, porque a área entre as funções respectivas e o eixo x, não pode ser nula e nem negativa.

e) ( ) Ambas as resoluções estão incorretas, porque as funções envolvidas não são contínuas no intervalo.

21.2.2. Área entre funções

Iremos aplicar o conceito de integral como sendo a área sob uma função e o eixo x, para calcularmos a área limitada por duas funções.

Sejam duas funções $f(x)$ e $g(x)$, com $f(x) \geq g(x)$, conforme a figura 21.2.2.1. Sabemos que a área entre a função $f(x)$ e o eixo x é dado por $\int_a^b f(x)dx$, e que a área entre a função $g(x)$ e o eixo x é dado por $\int_a^b g(x)dx$. Como a área entre as duas funções é a diferença entre essas áreas, temos:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Aplicando a propriedade 4 das integrais, podemos escrever essa área A como:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Caso $g(x) \geq f(x)$, devemos usar $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.

Exemplo: Calcular a área limitada pelas funções $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ e $g(x) = 2x + 1$.

Solução: Vamos inicialmente encontrar os pontos de interseção entre as funções.

$$-x^2 + 4x + 1 = 2x + 1 \Rightarrow -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

O intervalo será $[0, 2]$ e como $f(x) \geq g(x)$ para qualquer ponto desse intervalo (ver o gráfico na figura 21.2.2.2), temos

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [-x^2 + 4x + 1 - (2x + 1)]dx$$

$$A = \int_0^2 [-x^2 + 2x]dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^2 = -\frac{2^3}{3} + 2^2 - \left(-\frac{0^3}{3} + 0^2\right)\Big]_0^2$$

$$A = -\frac{8}{3} + 4 - 0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{4}{3}\ u.a}.$$

A representação da área entre essas funções está na figura 21.2.2.2.

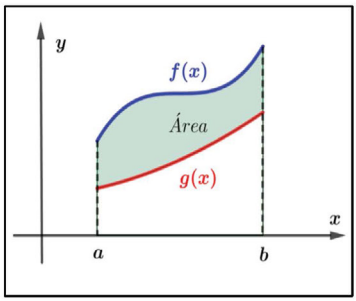


Figura 21.2.2.1

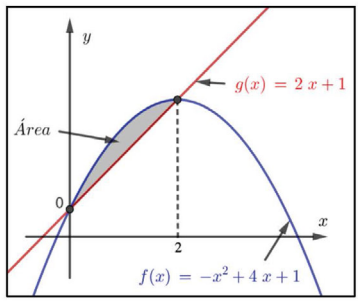


Figura 21.2.2.2

É preciso estar atento ao caso em que as funções trocam de posição dentro do intervalo de integração, conforme a figura 21.2.2.3. Nesse caso, ao calcular a integral em todo o intervalo, isto é, $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$, o resultado será a diferença entre as áreas (A_1 e A_2) e não a soma $A_1 + A_2$, pois, $f(x) \geq g(x)$ no intervalo $[b, c]$. Diante dessa fato, devemos calcular as áreas em intervalos separados e somar os resultados, da seguinte maneira:

$$A_1 = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \quad \text{e} \quad A_2 = \int_b^c [f(x) - g(x)]dx \Rightarrow A = A_1 + A_2.$$

Exemplo: Calcular a área limitada pelas funções $g(x) = x^3$ e $f(x) = 3x^2 - 2x$.

Solução: Vamos inicialmente calcular o intervalo a ser aplicado à integral.

$$x^3 = 3x^2 - 2x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}.$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (a = 1, b = -3 \; e \; c = 2).$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4.1.2 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \boxed{\Delta = 1}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} x' = \dfrac{3+1}{2} = 2 \\ x'' = \dfrac{3-1}{2} = 1 \end{cases}.$$

Temos assim, três pontos de interseção: $x = 0, x = 1 \; e \; x = 2$. Ver figura 21.2.2.4.

Para o primeiro intervalo [0,1] tem-se $g(x) \geq f(x)$, assim

$$A_1 = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \Big]_0^1$$

$$A_1 = \frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2 - \left(\frac{0^4}{4} - 0^3 + 0^2\right) \Rightarrow \boxed{A_1 = \frac{1}{4}\, u.a}.$$

Para a área A_2, temos o intervalo: $[1, 2]$ e $f(x) \geq g(x)$. Desse modo,

$$A_2 = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_1^2 [3x^2 - 2x - x^3]dx$$

$$A_2 = \left(x^3 - x^2 - \frac{x^4}{4}\Big]_1^2\right) = 2^3 - 2^2 - \frac{2^4}{4} - \left(1^3 - 1^2 - \frac{1^4}{4}\right) \Rightarrow \boxed{A_2 = \frac{1}{4}\, u.a}.$$

Assim, a área entre as duas funções é

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}\, u.a}.$$

Observação: Para o caso de área entre funções, não precisamos nos preocupar com a contabilização de áreas quando as funções ou partes delas, estiverem abaixo do eixo x. Isto é, a fórmula: $\int_a^b [g(x) - f(x)]dx$ continua válida mesmo nessas situações.

Como demonstração desse fato, basta pensar no eixo x como outra função $h(x) = 0$. Se por acaso, uma parte da área estiver abaixo do eixo x (ver área A_1 da figura 21.2.2.4 como exemplo), teremos

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^c [0 - f(x)]dx + \int_c^b [g(x) - 0]dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Caso a área entre as funções esteja totalmente abaixo do eixo x, teremos

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b [0 - f(x)]dx - \int_a^b [0 - g(x)]dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

Dessa maneira, a fórmula continua válida para todos os casos.

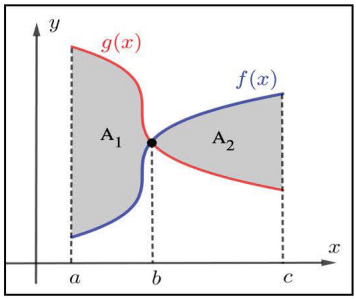


Figura 21.2.2.3

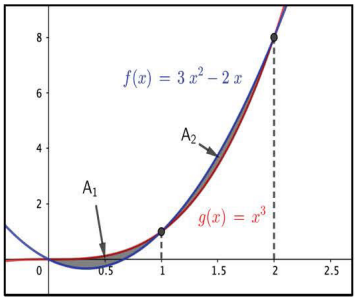


Figura 21.2.2.4

EXERCÍCIOS 21.2

1) Calcule a área entre as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2$.

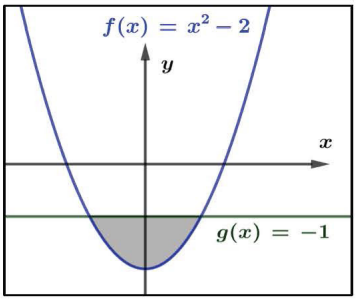
2) Calcule a área entre as funções $f(x) = 2x^2$ e $g(x) = x^4$.

3) Calcule a área entre as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

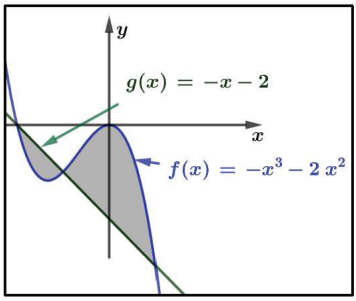
4) Calcule a área entre as funções $f(x) = x^3$ e $g(x) = -x^2 + 2x$.

5) Calcule a área destacada a seguir

a)



b)



6) De acordo com o gráfico das funções ilustradas na figura a seguir, podemos afirmar que

a) ( ) A área total destacada de cinza é:

$$A_1 - A_2$$

b) ( ) A área total destacada é igual a:

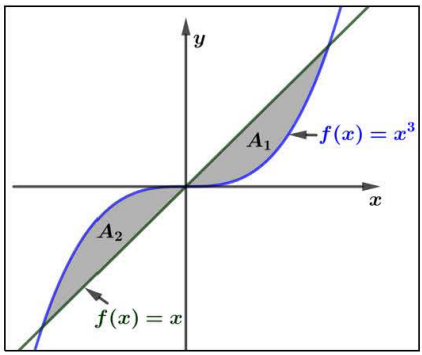
$$\int_1^{-1}(x - x^3)dx$$

c) ( ) A área total destacada é igual a:

$$\int_1^{-1}(x^3 - x)dx$$

d) ( ) A área total destacada é igual a: $\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_0^1(x - x^3)dx$;

e) ( ) A área total destacada é igual a: $\int_{-1}^{0}(x - x^3)dx + \int_0^1(x - x^3)dx$.



7) De acordo com os conhecimentos sobre integrais definidas e a área A entre a função $f(x)$ e o eixo x, marque a opção **incorreta**.

a) ( ) A área A entre uma função contínua $f(x)$ e o eixo x, no intervalo $[a, b]$, pode ser dado por: $A = \int_a^b |f(x)|dx$.

b) ( ) A integral definida de uma função par $f(x)$, contínua no intervalo $[-a, a]$, pode ser dado por: $A = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2.\int_0^a f(x)dx$.

c) ( ) A integral definida de uma função ímpar $f(x)$, contínua no intervalo $[-a, a]$ é igual a: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

d) ( ) A área A entre uma função $f(x)$ e o eixo x, no intervalo $[a, b]$, é dada por: $A = \int_a^b f(x)dx$.

e) ( ) A área A entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ contínuas no intervalo $[a, b]$, pode ser dado por: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

21.3. Integral indefinida

Vimos anteriormente que a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ tem como resultado um valor numérico que pode representar a área ou uma contabilização de áreas, entre a função e o eixo x. Nesta seção, trataremos essa integral sem o intervalo de integração $[a,b]$, ou seja, na forma $\int f(x)dx$.

Essa última integral, pela qual denominamos de **integral indefinida**, possui como resultado uma função (ou se preferir, um conjunto de funções) na forma $F(x)+c$, e não mais um valor numérico. Obviamente, todas as técnicas e propriedades de integração aplicadas às integrais definidas, aplicam-se também à integrais indefinidas.

Exemplo: $\int (-\frac{x^2}{4} + x + 1)dx$

Solução:

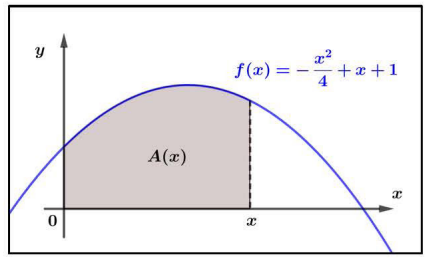
$$\int (-\frac{x^2}{4}+x+1)dx = \boxed{-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x+c}.$$

Para o caso de funções contínuas e positivas no intervalo, a integral indefinida pode ser entendida como outra função A(x) que representa a área entre a função original e o eixo x, no intervalo [0, x].

Exemplo:

$$A(x) = \int_0^x (-\frac{x^2}{4}+x+1)dx = -\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+x.$$

A função $A(x)$ nos dá a área entre a função e o eixo x para qualquer x no intervalo [0, x]. Veja a figura ao lado.



2º exemplo: $\int (-2.7^x + 5.cossec^2x)dx$

Solução:

$$\int -2.7^x\,dx + \int 5.cossec^2x\,dx = -2\int 7^x\,dx + 5\int cossec^2x\,dx$$

$$-2\int 7^x\,dx + 5\int cossec^2x dx =$$

$$-2.\left(\frac{7^x}{ln7}\right) + 5.(-cotgx) = \boxed{-2\left(\frac{7^x}{ln7}\right) - 5cotgx + c}.$$

A seguir estão reunidas em uma tabela as integrais de algumas funções (básicas) e suas respectivas funções primitivas. Cada integral pode ser verificada derivando a função primitiva e comparando com o integrando.

21.3.1. Tabela de integrais básicas

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (com $n \neq -1$)	$\int \frac{1}{x} dx = ln\|x\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
$\int senx\, dx = -cosx + C$	$\int cosx\, dx = senx + C$
$\int sec^2 x\, dx = tgx + C$	$\int cossec^2 x\, dx = -cotgx + C$
$\int secx.tgx\, dx = secx + C$	$\int cossecx.cotgx\, dx = -cossecx + C$
$\int tgx\, dx = ln\|secx\| + C$	$\int cotgx\, dx = ln\|senx\| + C$
$\int secx\, dx = ln\|secx + tgx\| + C$	$\int cosecx\, dx = ln\|cossecx - cotgx\| + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + C$

Essas integrais básicas serão imprescindíveis na resolução de outras integrais mais elaboradas, portanto, merece um carinho especial quanto a sua memorização.

21.4. Técnicas de integração

As propriedades já vistas e a tabela 21.3.1 anterior de integrais básicas, podem não ser suficientes para o cálculo de primitivas de funções mais sofisticadas. Para ajudar nesse ponto, nas próximas subseções, abordaremos algumas técnicas de integração.

21.4.1. Integração por substituição

Essa técnica consiste em substituir a variável da função do integrando por uma nova variável de forma conveniente e com o intuito de tornar a integral mais simples e fácil de calcular. Esse processo está relacionado à regra da cadeia que usamos na derivação.

Exemplo: $\int 2x\sqrt{1+3x^2}dx$

Solução: Vamos substituir x por u, fazendo $u = 1+3x^2$.

Se $u = 1+3x^2$, então $\frac{du}{dx} = 6x \Rightarrow 2x.dx = \frac{du}{3}$. Substituindo na integral, temos

$$\int 2x \underbrace{\sqrt{1+3x^2}}_{\sqrt{u}} dx = \int \sqrt{u}.\frac{du}{3} = \int \frac{\sqrt{u}}{3}du = \boxed{\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du}$$

Perceba que a integral está agora mais simples. Resolvendo-a, encontramos

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right] + c = \frac{1}{3}.\left[\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right] + c = \boxed{\frac{2\sqrt{u^3}}{9}}.$$

Como $u = 1+3x^2$, segue que

$$\int 2x \underbrace{\sqrt{1+3x^2}}_{\sqrt{u}} dx = \frac{2\sqrt{u^3}}{9} + c \Rightarrow \boxed{\int 2x \underbrace{\sqrt{1+3x^2}}_{\sqrt{u}} dx = \frac{2}{9}\sqrt{(1+3x^2)^3} + c}.$$

Vamos derivar essa função primitiva e confirmar o resultado.

$$\frac{2}{9}.\frac{3}{2}(1+3x^2)^{\frac{3}{2}-1}.6x = \boxed{2x\sqrt{1+3x^2}} \Leftarrow OK!$$

Observação: Ao optar substituir x por u de outra forma, como por exemplo: $u = \sqrt{1+3x^2}$ ou $u = x$ ou ainda $u = x^2$, a integral não ficaria tão simples (faça os testes!) .

2º exemplo: $\int tgxdx$

Solução: Embora essa integral esteja na lista de integrais básicas da tabela 21.3.1,

vamos calculá-la como exemplo de aplicação da técnica de integração por substituição.

$$\int tgxdx = \int \frac{senx}{cosx} dx.$$

Fazendo $u = cosx$, temos $\frac{du}{dx} = -senx$. O que implica em $senxdx = -du$. Substituindo na integral, dispomos de

$$\int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -ln|u|.$$

Consulte a tabela 21.3.1 e confirme!

Substituindo a variável x de volta, encontramos

$$\int tgxdx = -ln|cosx| + c = ln|(cosx)^{-1}| + c = \boxed{ln|secx| + c}.$$

3º exemplo: $\int x^3 cos(1 - x^4)\, dx$

Solução: Fazendo $u = 1 - x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -4x^3 \Rightarrow x^3 dx = \frac{-du}{4}$.

Substituindo na integral, obtemos

$$\int x^3 \overbrace{cos(1-x^4)}^{cosu} dx = \int \frac{-cosu}{4} du = \frac{-1}{4}\int cosu\, du = \boxed{\frac{-1}{4} senu}.$$

$\frac{-du}{4}$

Derive e verifique se a solução está correta.

Substituindo a variável x de volta, segue que

$$\int x^3 cos(1-x^4)dx = \frac{-1}{4} senu = \boxed{\frac{-1}{4}.sen(1-x^4) + c}.$$

4º exemplo: $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$

Solução: Esse exemplo é muito próximo da integral $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + c$. Precisamos de algumas manipulações algébricas antes da substituição.

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(x/a)^2} dx.$$

Fazendo $u = x/a$, então $du = dx/a \Rightarrow dx = du.a$. Substituindo, segue que

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{du.a}{1+(u)^2} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+(u)^2} du = \boxed{\frac{1}{a}\, arctgu + c}.$$

Como $u = x/a$, concluímos que

$$\boxed{\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\, arctg\frac{x}{a} + c}.$$

EXERCÍCIOS 21.3

1) Calcule as integrais indefinidas, utilizando o método da substituição.

a) $\int (5+x)^3 dx$

b) $\int x(1-x^2)^5 dx$

c) $\int x\sqrt{1+2x^2} dx$

d) $\int \sqrt{1+3x} dx$

e) $\int x^2\sqrt{1+x^3} dx$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})^3 dx$

h) $\int cos\,(7x) dx$

i) $\int sen\,(5x+1) dx$

j) $\int x^2.\, sen\,(x^3-3) dx$

k) $\int cosx.\, senx\, dx$

l) $\int cos^3x.\, senx\, dx$

m) $\int cos^3x dx$

n) $\int sen^3x dx$

o) $\int cos^2x.\, senx\, dx$

p) $\int tgx.\, sec^2x\, dx$

q) $\int cotgx.\, cossec^2x\, dx$

r) $\int \frac{sen4x}{1+cos4x} dx$

s) $\int \frac{1}{4+x^2} dx$

t) $\int \frac{\sqrt{2}}{2+x^2} dx$

u) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$

v) $\int \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$

w) $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x^2}} dx$

x) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$

y) $\int e^{5x-3} dx$

z) $\int x.\, e^{x^2-1} dx$

2) Calcule as integrais indefinidas, utilizando o método da substituição.

a) $\int x^5\sqrt{1+x^2} dx$

b) $\int \frac{lnx}{x} dx$

c) $\int \frac{ln^2x}{x} dx$

d) $\int \frac{1+x}{1+x^2} dx$

e) $\int \frac{sec^2x}{tgx} dx$

f) $\int cos^4x.\, senx\, dx$

g) $\int sec^2(cosx).\, senx\, dx$

h) $\int \frac{cosx.e^{-senx}-senx.e^{cosx}}{e^{cosx}-e^{-senx}} dx$

i) $\int senx.\, e^{cosx} dx$

j) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$

21.4.2. Integração por partes

Existem algumas integrais em que o método da substituição não é suficiente para encontrar a primitiva. Nesses casos, a técnica de integração por partes pode ser uma alternativa útil.

Enquanto o método de substituição é oriundo da regra da cadeia da derivação, o processo que envolve a integração por partes é proveniente da regra do produto da derivação. Veja:

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x).$$

Integrando ambos os membros, temos

$$\int [f(x).g(x)]'\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)dx.}$$

Esse processo consiste em encontrar a integral equivalente dividindo-a em duas partes: um produto de duas funções e uma nova integral. Para que a nova integral seja mais simples do que a original, é recomendável escolher uma função conveniente, por tentativa ou análise, de forma a tornar o procedimento eficiente. Em alguns casos, pode ser necessário aplicar o processo mais de uma vez.

1º exemplo: $\int xcosxdx$

Solução: Inicialmente podemos definir $f'(x) = x$ e $g(x) = cosx$. Como no segundo membro do processo precisamos de $g'(x)$ e $f(x)$ devemos calculá-los primeiro.

$$g(x) = cosx \Rightarrow g'(x) = -senx.$$

$$f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Substituindo na fórmula:

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int xcosxdx = \frac{x^2}{2}.senx - \int \frac{x^2}{2}.(-senx)dx\,.$$

Precisamos encontrar agora a integral $\int \frac{x^2}{2}.(-senx)\,dx$. No entanto, essa integral ficou mais complicada que a original. Isso se deve a escolha inapropriada para a função $g(x)$.

Façamos então, $g(x) = x$ e $f'(x) = cosx$ e, desse modo,

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1.$$

$$f'(x) = cosx \Rightarrow f(x) = senx.$$

Substituindo, encontramos

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int xcosxdx = senx.x - \int senx.1\,dx \Rightarrow \boxed{\int xcosxdx = senx.x + cosx + c}.$$

Vamos derivar para saber se o resultado está correto.

$[senx.x + cosx + c]' = cosx.x + 1.senx - senx + 0 = \boxed{cosx.x}$ *ok!*

Para evitar de repetir o processo por uma eventual escolha inapropriada, recomenda-se selecionar a função que será derivada com base em seu tipo, seguindo a ordem de prioridade da lista: 1-Logartímos; 2-Inversas trigonométricas; 4-Algébrica; 5-Trigonométrica; 6-Exponencial. A abreviação "LIATE" pode ser usada para lembrar essa ordem de prioridade. Então, se por exemplo, o integrando for composto por uma função inversa trigonométrica e uma exponencial, devemos escolher a função inversa trigonométrica como sendo a função pela qual devemos derivar, pois ela vem primeiro na ordem de prioridade.

Analise o exemplo anterior e veja que a escolha acertada, na segunda tentativa, segue a ordem de prioridade dessa lista.

2º exemplo: $\int x^2 e^x dx$

Solução: Observe que ao escolher $g(x) = e^x$ e $f'(x) = x^2$, obteremos

$$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x.$$
$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f(x) = x^3/3.$$

E ao substituir na fórmula, encontraremos

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int x^2 e^x dx = \frac{x^3}{3}.e^x - \int \frac{x^3}{3}.e^x\,dx\,.$$

O que torna a última integral mais complexa do que a original. Assim, vamos seguir o critério de prioridade da lista LIATE. De acordo com essa lista, devemos escolher a função algébrica x^2 para derivar (para $g(x)$), em vez de e^x, pois ela vem primeiro na ordem de prioridade.

$$g(x) = x^2 \; e \; f'(x) = e^x \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \\ f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \end{cases}.$$

Substituindo na fórmula de integração por partes:

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x.x^2 - \int e^x.2x\,dx \Rightarrow \boxed{\int x^2 e^x dx = e^x.x^2 - 2\int e^x.x\,dx}. \qquad (1)$$

Observe que de fato, com essa a escolha, a integral que resta calcular é mais simples que a original. Porém, o seu cálculo não é imediato, precisamos aplicar a técnica de integração por partes mais uma vez.

$$\int e^x.x\,dx \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \\ f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \end{cases}$$

Seguindo o critério da lista LIATE.

Substituindo na fórmula de integração por partes, segue que

$$\int e^x.x\,dx = e^x.x - \int e^x.1\,dx = \boxed{e^x(x-1)}.$$

Substituindo esse resultado em (1), obtemos

$$\int x^2 e^x dx = e^x.x^2 - 2\overbrace{\int e^x.x\,dx}^{e^x(x-1)}$$

$$\int x^2 e^x dx = e^x.x^2 - 2.e^x(x-1) \Rightarrow \boxed{\int x^2 e^x dx = e^x(x^2-2x+2)+c}.$$

Derivando para confirmar que o resultado está correto:

$$[e^x(x^2-2x+2)+c]' = e^x.(x^2-2x+2) + (2x-2).e^x = \boxed{x^2e^x}.\ Ok!$$

Solução alternativa (Método tabular): Esse método consiste em construir uma tabela com as derivadas e as integrais sucessivas das funções $g(x)$ e $f(x)$. Esse método nada mais é que a integração por partes aplicada reiteradas vezes. Acompanhe o roteiro.

1º passo: Construir uma tabela com as derivadas sucessivas de $g(x)$ e integrais sucessivas de $f(x)$. A escolha para $g(x)$ deve obedecer a ordem de prioridade da lista LIATE.

Derivada $g(x)$	Integral $f(x)$
x^2	e^x

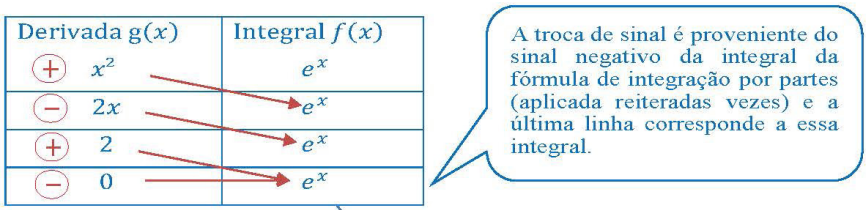
2º passo: Os produtos das derivadas sucessivas de $g(x)$ com as integrais sucessivas de $f(x)$, a cada linha, devem ficar mais simples. Caso isso não ocorra, isto é, se o produto das funções for igual ou mais complicado na próxima linha, encerram-se os cálculos.

Derivada $g(x)$	Integral $f(x)$
x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

Observe que a cada linha de cálculo, o produto das funções resultaram em funções mais simples. Uma nova linha resultaria em um produto de funções igual a anterior, indicando o fim dos cálculos.

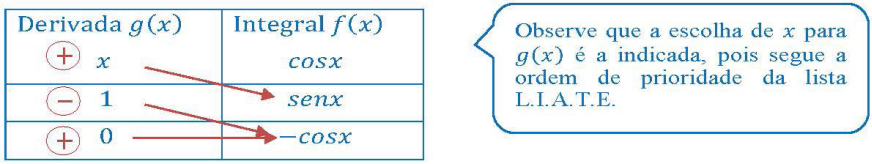
3º passo: Multiplicar as diagonais alternando os sinais, começando sempre com o sinal positivo, sendo que a última multiplicação deve ser em linha e não em diagonal. Essa última multiplicação em linha corresponde ao integrando da integral,

segundo a fórmula de integração por partes, enquanto que as demais são funções.



$$\int x^2 e^x dx = x^2.e^x - 2x.e^x + 2.e^x - \int 0.e^x dx \Rightarrow \boxed{\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + c}.$$

Resolvendo novamente o 1º exemplo: $\int xcosxdx$, utilizando esse método.



$$\int xcosxdx = senx.x + cosx + \int 0.(-cosx)dx \Rightarrow \boxed{\int xcosxdx = senx.x + cosx + c}.$$

3º exemplo: $\int e^x senxdx$

Solução: De acordo com a lista de prioridade LIATE, devemos fazer $g(x) = senx$ e $f'(x) = e^x$. Dessa maneira

$$g(x) = senx \Rightarrow g'(x) = cosx.$$
$$f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x.$$

Aplicando na fórmula, obtemos

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int e^x senxdx = e^x.senx - \int e^x.cosx\,dx}.(1)$$

Precisamos encontrar agora $\int e^x.cosxdx$. Aparentemente não houve avanços, mas vamos aplicar a integração por partes mais uma vez.

$$\int e^x.cosx\,dx \Rightarrow \begin{cases} g(x) = cosx \Rightarrow g'(x) = -senx \\ f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x \end{cases}$$

Substituindo, temos

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\boxed{\int e^x.cosx\,dx = e^x.cosx + \int e^x.senx\,dx}\ (2).$$

Substituindo (2) em (1), dispomos de

$$\int e^x senx dx = e^x.senx - \overbrace{\int e^x.cosx\,dx}^{e^x.cosx+\int e^x.senx\,dx}$$

$$\int e^x senx dx = e^x.senx - \left[e^x.cosx + \int e^x.senx\,dx\right]$$

$$\int e^x senx dx = e^x.senx - e^x.cosx - \int e^x.senx\,dx$$

Passando $-\int e^x.senx\,dx$ para o 1º membro, segue que

$$\int e^x senx dx + \int e^x.senx\,dx = e^x.senx - e^x.cosx$$

$$2.\int e^x senx dx = e^x(senx - cosx) \Rightarrow \boxed{\int e^x senx dx = \frac{e^x(senx - cosx)}{2}}.$$

Derivando: $\frac{e^x(senx-cosx)+(cosx+senx)e^x}{2} = \boxed{e^x senx}$. ok!

Outra solução (método tabular):

Derivada $f(x)$	Integral $g(x)$
$+$ $senx$	e^x
$-$ $cosx$	e^x
$+$ $-senx$	e^x

Perceba que a última linha da tabela corresponde a mesma função original negativa, indicando o fim dos cálculos.

$$\int e^x senx dx = senx.e^x - cosx.e^x - \int e^x.senx\,dx.$$

Passando $-\int e^x.senx\,dx$ para o 1º membro, segue que

$$\boxed{\int e^x senx dx = \frac{e^x(senx - cosx)}{2}}.$$

4º exemplo: $\int arctgx\,dx$

Solução: A integral não apresenta explicitamente um produto de duas funções, mas podemos considerar $g(x)$ como 1. Assim,

$$\begin{cases} g(x) = arctgx \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}. \\ f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x \end{cases}$$

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int arctgx\,dx = x.arctgx - \int x.\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\int arctgx\,dx = x.arctgx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \quad (1)$$

Vamos utilizar o método da substituição em $\int \frac{x}{1+x^2}dx$. Fazendo $u = 1+x^2$, temos

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow xdx = \frac{du}{2}$. Substituindo na integral, encontramos

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}ln|u| = \frac{1}{2}ln(1+x^2).$$

Substituindo em (1), concluímos que

$$\boxed{\int arctgx\,dx = x.arctgx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + c}.$$

Fica como exercício, a aplicação do método tabular.

4º exemplo: $\int e^{senx}.sen2x\,dx$

Solução: A ordem LIATE não se aplica, pois tem-se uma função composta (exponencial e trigonométrica) em e^{senx}. Faremos por tentativas.

$$\begin{cases} g(x) = e^{senx} \Rightarrow g'(x) = e^{senx}.cosx \\ f'(x) = sen2x \Rightarrow f(x) = -\frac{cos2x}{2} \end{cases}.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes, temos

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int e^{senx}.sen2x\,dx = e^{senx}.\left(-\frac{cos2x}{2}\right) - \int -\frac{cos2x}{2}.e^{senx}.cosx\,dx\,.$$

A nova integral ficou ainda mais complicada. Porém, analisando $g'(x) = e^{senx}.cosx$ é prático substituir $sen2x$ por $2.cosx.senx$, da seguinte forma

$$\boxed{\int e^{senx}.2.senx.cosx\,dx = 2.\int \underbrace{e^{senx}.cosx}_{g'(x)}.\underbrace{senx}_{f(x)}\,dx}.(1)$$

$$\begin{cases} g'(x) = e^{senx}.cosx \Rightarrow g(x) = e^{senx} \\ f(x) = senx \Rightarrow f'(x) = cosx \end{cases}.$$

Aplicando a fórmula, encontramos

$$\int f(x).g'(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)\,dx$$

$$\int \underbrace{e^{senx}.cosx}_{g'(x)}.\underbrace{senx}_{f(x)}\,dx = senx.e^{senx} - \int cosx.e^{senx}\,dx\,.$$

Poderíamos utilizar o método da substituição na última integral, todavia a expressão do integrando coincidiu com $g'(x)$, cuja primitiva é $g(x) = e^{senx}$. Assim,

$$\int e^{senx}.cosx.senx\,dx = senx.e^{senx} - e^{senx} = e^{senx}(senx - 1).$$

Substituindo em (1), concluímos que

$$\boxed{\int e^{senx}.sen2x\,dx = 2.e^{senx}(senx - 1) + c}.$$

EXERCÍCIOS 21.4

1) Calcule as integrais:

a) $\int e^x.x\,dx$

b) $\int e^{-2x}.x\,dx$

c) $\int e^{-2x}.x^2\,dx$

d) $\int e^x.cosx\,dx$

e) $\int x.lnx\,dx$

f) $\int (x^2+1).e^{-x}\,dx$

g) $\int x^2.cosx\,dx$

h) $\int x.sen(3x)\,dx$

i) $\int x.tg^2x\,dx$

j) $\int x^2.senx\,dx$

k) $\int x^2.sen2x\,dx$

l) $\int ln\,(\sqrt{x})\,dx$

m) $\int x^2.lnx\,dx$

n) $\int ln\,(x^2+1)\,dx$

o) $\int ln^2x\,dx$

p) $\int arcsen(2x)\,dx$

q) $\int arctg(3x)\,dx$

r) $\int arcsen^2x\,dx$

s) $\int senx.ln\,(cosx)\,dx$

t) $\int e^{cosx}.sen2x\,dx$

u) $\int e^x.x.senx\,dx$

v) $\int x^2.sen^2x\,dx$

2) Demonstre que:

a) $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n.\int x^{n-1}e^x\,dx$

b) $\int (lnx)^n\,dx = x.(lnx)^n - n.\int (lnx)^{n-1}\,dx$

3) Calcule as integrais definidas a seguir.

a) $\int_0^2 xe^{-x}dx$

b) $\int_1^2 x^2ln^2xdx$

c) $\int_0^{\pi} e^x.cosx\,dx$

d) $\int_0^{\pi} x^2.senx\,dx$

21.4.3. Integrais trigonométricas

Nesta subseção, abordaremos estratégias para a solução de integrais, cujas funções no integrando, são estritamente trigonométricas.

Exemplo: $\int cos^3x\,dx$

Outra solução seria desmembrar cos^3x em $cos^2x.cosx$. Substituir cos^2x por $1-sen^2x$ e aplicar a técnica de integração por substituição (tente!).

Solução: $\begin{cases} g(x)=cos^2x \Rightarrow g'(x)=-2.cosx.senx \\ f'(x)=cosx \Rightarrow f(x)=senx \end{cases}$

Aplicando na fórmula:

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x - \int senx\,.(-2.cosx.senx)\,dx$$

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.\int sen^2x.cosx\,dx$$

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.\int sen^2x.cosx\,dx.$$

Substituindo $sen^2x = 1-cos^2x$, temos

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.\int (1-cos^2x).cosx\,dx$$

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.\int (cosx - cos^3x)\,dx$$

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.\left[\int cosx\,dx - \int cos^3x\,dx\right]$$

$$\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.senx - 2.\int cos^3x\,dx.$$

Passando $-2\int cos^3x\,dx$ para o 1º membro, dispomos de

$$3.\int cos^3x\,dx = senx.cos^2x + 2.senx$$

$$\boxed{\int cos^3x\,dx = \frac{senx.cos^2x + 2.senx}{3} + c}.$$

2º exemplo: Demonstre a fórmula de redução (ou recorrência) da integral da potência do seno a seguir.

$$\boxed{\int sen^nx\,dx = -\frac{1}{n}cosx.sen^{n-1}x + \frac{(n-1)}{n}\int sen^{n-2}x\,dx}.$$

Solução: Fazendo $sen^nx = sen^{n-1}x.senx$.

$$\begin{cases} f'(x)=senx \Rightarrow f(x)=-cosx \\ g(x)=sen^{n-1}x \Rightarrow g'(x)=(n-1).sen^{n-2}x.cosx \end{cases}.$$

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int sen^n x\,dx = -cosx.sen^{n-1}x - \int -cosx\,.(n-1).sen^{n-2}x\,.cosx dx$$

$$\int sen^n x\,dx = -cosx.sen^{n-1}x + (n-1)\int cos^2x\,.sen^{n-2}x\,dx$$

$$\int sen^n x\,dx = -cosx.sen^{n-1}x + (n-1)\int (1-sen^2x\,).sen^{n-2}x\,dx$$

$$\int sen^n x\,dx = -cosx.sen^{n-1}x + (n-1)\int sen^{n-2}x\,dx - (n-1)\int sen^n x\,dx$$

$$\int sen^n x\,dx + (n-1)\int sen^n x\,dx = -cosx.sen^{n-1}x + (n-1)\int sen^{n-2}x\,dx$$

$$\boxed{\int sen^n x\,dx = -\frac{1}{n}cosx.sen^{n-1}x + \frac{(n-1)}{n}\int sen^{n-2}x\,dx}.$$

A demonstração de outras fórmulas de redução serão cobradas nos exercícios.

3º exemplo: $\int cos^5x.sen^2x\,dx$

Solução: Poderíamos substituir sen^2x por $1-cos^2x$ e aplicar a fórmula de redução anterior. Em vez disso, faremos $cos^5x = (cos^2x)^2.cosx = (1-sen^2x)^2.cosx$ e assim:

$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

$$\int cos^5x.sen^2x\,dx = \int (1-sen^2x)^2.sen^2x.cosx\,dx.$$

Fazendo $u = senx$, então $\frac{du}{dx} = cosx \Rightarrow cosxdx = du.$ Substituindo na integral, encontramos

$$\int cos^5x.sen^2x\,dx = \int (1-u^2)^2.u^2.du = \int (u^2 - 2u^4 + u^6)du$$

$$\int cos^5x.sen^2x\,dx = \frac{u^3}{3} - 2.\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}$$

$$\boxed{\int cos^5x.sen^2x\,dx = \frac{sen^3x}{3} - 2.\frac{sen^5x}{5} + \frac{sen^7x}{7} + c}.$$

Essa estratégia funciona para integrais na forma: $\int cos^n x\,.sen^m x\,dx$, quando n ou m for ímpar. Pois, desenvolvendo o termo ímpar e fazendo $u = senx$ ou $u = cosx$ (a depender de qual expressão é ímpar, obviamente), podemos aplicar a substituição, como no exemplo anterior. Porém, essa estratégia pode falhar quando ambos n e m são pares. Neste caso, é indicado utilizar os arcos da metade:

$$\boxed{sen^2x = \frac{1-cos2x}{2}} \; e \; \boxed{cos^2x = \frac{1+cos2x}{2}}.$$

4º exemplo: $\int sen^4x.dx$

Solução: Fazendo $sen^4x = sen^2x\,.sen^2x$ e utilizando a identidade $sen^2x = \frac{1-cos2x}{2}$, obtemos

$$\int sen^4x\,dx = \int sen^2x\,.sen^2x\,dx = \int \left(\frac{1-cos2x}{2}\right).\left(\frac{1-cos2x}{2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{4}\int 1-2cos2x+\underbrace{\frac{cos^2 2x}{\frac{1+cos4x}{2}}}\,dx = \frac{1}{4}\int 1-2cos2x+\frac{1+cos4x}{2}dx =$$

$$\frac{1}{4}\left[\int 1dx-2.\int cos2xdx+\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{cos4x}{2}dx\right] = \frac{1}{4}\left[x-2.\frac{sen2x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{sen4x}{8}\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{\int sen^4x\,dx = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-sen2x+\frac{sen4x}{8}\right]+c}.$$

Outra situação pode ocorrer quando os produtos de seno e cosseno estão sem expoentes. Neste caso, é aconselhável transformar o produto em soma e utilizar as seguintes identidades trigonométricas:

$$\boxed{\begin{aligned} sena.cosb &= \frac{1}{2}.[sen(a+b)+sen(a-b)] \\ cosa.cosb &= \frac{1}{2}.[cos(a+b)+cos(a-b)] \\ sena.senb &= \frac{1}{2}.[cos(a-b)-cos(a+b)] \end{aligned}}.$$

5º exemplo: $\int cos(4x).cos(2x)\,dx$

Solução: Utilizando a identidade trigonométrica anterior, obtemos:

$$\int \cos(4x)\,.\cos(2x)\,dx = \int\frac{1}{2}.[\cos(4x+2x)+\cos(4x-2x)] =$$

$$\frac{1}{2}.\int cos(6x)+cos(2x)dx = \frac{1}{2}.\left(\int cos(6x)dx+\int cos(2x)dx\right) =$$

$$\boxed{\int \cos(4x)\,.\cos(2x)\,dx = \frac{sen6x}{12}+\frac{sen2x}{4}+c}.$$

Estratégia semelhante podemos utilizar em integrais na forma $\int tg^n x\,.\,sec^m x\,dx$. Se m for par, devemos separar e guardar um fator sec^2x e substituir sec^2x por $1+tg^2x$ nas outras expressões. Em seguida, fazer $u = tgx$ e aplicar o método da substituição. Se n for ímpar, o ideal que se separe e guarde um fator $secx.tgx$ e substitua tg^2x por sec^2x-1, para em seguida, substituir $u = secx$ utilizando o método da substituição.

Em qualquer situação lembre-se que:

$$\boxed{\int tgx\,dx = ln|secx| + c} \quad e \quad \boxed{\int secx\,dx = ln|secx + tgx| + c}.$$

5º exemplo: $\int tg^4x.sec^4x\,dx$

Solução:

$$\int tg^4x.sec^4x\,dx = \int tg^4x.\underbrace{sec^2x}_{1+tg^2x}.sec^2x.dx = \begin{cases} u = tgx \\ du = sec^2x dx \end{cases}$$

$$\int u^4.(1+u^2).du = \frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} \Rightarrow \boxed{\int tg^4x.sec^4x\,dx = \frac{tg^5x}{5} + \frac{tg^7x}{7} + c}.$$

EXERCÍCIOS 21.5

1) Calcule as integrais.

a) $\int sen^3x\,dx$

b) $\int cos^4x\,dx$

c) $\int tg^4x\,dx$

d) $\int sec^4x\,dx$

e) $\int sen^2x.cosx\,dx$

f) $\int sen^2x.cos^2x\,dx$

g) $\int sen^5x.cos^2x\,dx$

h) $\int sen^6x.cos^3x\,dx$

i) $\int senx.(cos4x)^2\,dx$

j) $\int sen(2x).cos(3x)\,dx$

k) $\int sen(4x).cos(2x)\,dx$

l) $\int (sen2x)^2.cos(3x)\,dx$

m) $\int sen(2x).senx.sen(3x)\,dx$

n) $\int tg^6x.sec^2x\,dx$

o) $\int tg^4x.sec^6x\,dx$

p) $\int tg^5x.sec^3x\,dx$

2) Demonstre que:

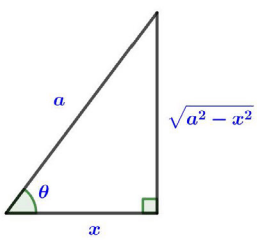
a) $\int cos^nx\,dx = \frac{1}{n}cos^{n-1}x.senx + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}x\,dx.$

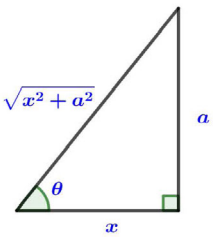
b) $\int tg^nx\,dx = \frac{tg^{n-1}x}{n-1} - \int tg^{n-2}x\,dx.$

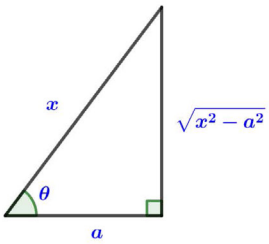
21.4.4. Integração por substituição trigonométrica

Esse método é aplicado em integrais cujas expressões possuem algum dos seguintes radicais: $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ou $\sqrt{a^2-x^2}$ (em que $a>0$). O processo consiste em substituir os radicais por expressões com $sen\theta$, $cos\theta$, $tg\theta$, $sec\theta$, $cossec\theta$ ou $cotg\theta$ de forma que possibilite solução.

Em todos os três casos é preciso ter em mente um triângulo retângulo, cuja posição dos radicais: $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ ou $\sqrt{a^2-x^2}$, depende do teorema de Pitágoras. A seguir estão três possibilidades.





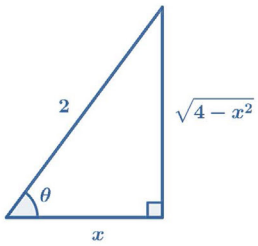


Em todos os casos, é possível trocar os catetos de posição.

Uma vez estabelecido o triângulo retângulo, destacam-se as relações trigonométricas entre x e θ e fazem-se as substituições dos termos equivalentes na integral. Para melhor entendimento, siga os passos dos exemplos a seguir.

1º exemplo: $\int \sqrt{4-x^2}dx$

Solução: Inicialmente devemos pensar como deve ficar o triângulo retângulo de acordo com função do integrando e o teorema de Pitágoras. A figura a seguir mostra uma possibilidade para esse triângulo.



Em seguida, calcular os valores de $sen\theta$, $cos\theta$ e $tg\theta$.

$$sen\theta = \frac{\text{Cat. oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \Rightarrow \boxed{\sqrt{4-x^2} = 2.sen\theta}.$$

$$cos\theta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2.cos\theta}.$$

$$tg\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \Rightarrow \text{não usaremos!}$$

Como $x = 2.cos\theta$, então $dx = -2sen\theta d\theta$. Substituindo na integral, obtemos

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2.sen\theta(-2sen\theta)d\theta = \boxed{-4.\int sen^2\theta d\theta} \quad (1).$$

Uma vez que

$$\int sen^2\theta d\theta = \int \frac{1}{2} - \frac{cos2\theta}{2} = \frac{1}{2}\theta - \frac{sen2\theta}{4}.$$

Substituindo em (1), encontramos

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = -4.\int sen^2\theta d\theta = -4\left(\frac{-cos\theta.sen\theta+\theta}{2}\right) = \boxed{2cos\theta.sen\theta - 2\theta}\ (2).$$

Como a integral inicial está em função de x, devemos substituir em (2) os valores correspondentes a variável θ. Nesse caso, são

$$cos\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{x}{2}\right)\ esen\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

Logo,

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = 2cos\theta.sen\theta - 2\theta = 2.\frac{x}{2}.\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - 2.arcos\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow$$

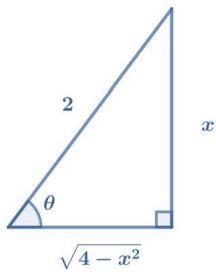
$$\boxed{\int \sqrt{4-x^2}dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - 2.arcos\left(\frac{x}{2}\right) + c}.$$

Vamos derivar e verificar se está correto.

$$\left(\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - 2.arcos\left(\frac{x}{2}\right) + c\right)' = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{x.(-2x)}{2.2.\sqrt{4-x^2}} - 2.\frac{-1}{2.\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2.\sqrt{4-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2+4}{2.\sqrt{4-x^2}} = \frac{8-2x^2}{2.\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \boxed{\sqrt{4-x^2}}\ ok!$$

Observação: A outra possibilidade para o triângulo seria trocando os catetos de posição, conforme a figura a seguir.



Assim, $sen\theta$ **e** $cos\theta$ passam a ser

$$sen\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x = 2.sen\theta}.$$

$$cos\theta = \frac{\text{Cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \Rightarrow \boxed{\sqrt{4-x^2} = 2.cos\theta}.$$

E o resultado da integral será

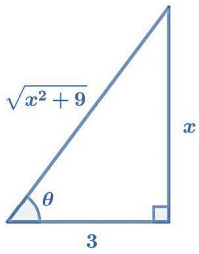
$$\boxed{\int \sqrt{4-x^2}dx = \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2.arsen\left(\frac{x}{2}\right) + c}.$$

Derive e comprove!

2º exemplo: $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx$

Solução:

Para a expressão $\sqrt{x^2+9}$ o triângulo retângulo fica da seguinte forma:



$$sen\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \text{não usaremos!}$$

$$cos\theta = \frac{\text{Cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{\sqrt{x^2+9}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+9} = \frac{3}{cos\theta}}.$$

$$tg\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{x}{3} \Rightarrow \boxed{x = 3.tg\theta}.$$

Como $x = 3.tg\theta$, então $dx = 3.sec^2\theta d\theta$. Substituindo na integral, obtemos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx = \int \frac{3.sec^2\theta}{(3.tg\theta)^2.\frac{3}{cos\theta}}d\theta = \int \frac{3.sec^2\theta}{\left(3.\frac{sen\theta}{cos\theta}\right)^2.\frac{3}{cos\theta}}d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{sec^2\theta}{\frac{sen^2\theta}{cos^2\theta}.\frac{1}{cos\theta}}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{1}{cos^2\theta}.\frac{cos^3\theta}{sen^2\theta}d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{cos\theta}{sen^2\theta}d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{9}\int cotg\theta.cossec\theta d\theta = \boxed{\frac{1}{9}(-cossec\theta)} \ (1).$$

Mas, $sen\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, então $\boxed{cossec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}}$ (2).

Substituindo (2) em (1), encontramos

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx = \frac{-1}{9}\frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx = \frac{-\sqrt{x^2+9}}{9x} + c}.$$

Vamos fazer o teste derivando, dispomos de

$$\left(\frac{-\sqrt{x^2+9}}{9x} + c\right)' = \frac{-1}{9}.\left(\frac{1}{2}\frac{2x.x}{x^2\sqrt{x^2+9}} - \sqrt{x^2+9}\right) = \frac{-1}{9x^2}.\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} - \sqrt{x^2+9}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{-1}{9x^2}.\left(\frac{x^2-x^2-9}{\sqrt{x^2+9}}\right) = \boxed{\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}} \ ok!$$

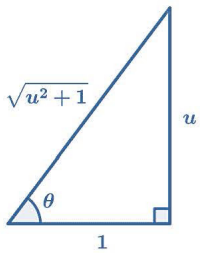
3º exemplo: $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

Solução: Nesse caso, não é possível aplicar a substituição trigonométrica diretamente, antes é preciso fazer algumas modificações algébricas na integral.

Fazendo $x^2 - 4x + 5$ como $(x-2)^2 + 1$ e $u = x - 2$, temos: $du = dx$ e $x = u + 2$ e consequentemente,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx = \boxed{\int \frac{u+2}{\sqrt{u^2+1}}du} \ (1).$$

O triângulo e as relações para a variável u estão a seguir.



$$sen\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+1}} \Rightarrow \text{não usaremos!}$$

$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{u^2+1} = \frac{1}{cos\theta}}$$

$$tg\theta = \frac{u}{1} \Rightarrow \boxed{u = tg\theta}$$

Como $u = tg\theta$, então $du = sec^2\theta d\theta$. Substituindo em (1), tem-se

$$\int \frac{u+2}{\sqrt{u^2+1}} du = \int \frac{tg\theta + 2}{\frac{1}{cos\theta}} sec^2\theta d\theta = \int \frac{(tg\theta+2)cos\theta}{cos^2\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$\int \frac{tg\theta + 2}{cos\theta} d\theta = \boxed{\int sec\theta . tg\theta \, d\theta + 2. \int sec\theta \, d\theta} \quad (2).$$

Sabemos pela tabela 21.3.1 de integrais básicas que

$$\boxed{\int secx . tgx \, dx = secx + c} \quad e \quad \boxed{\int secx \, dx = ln|secx + tgx| + c}$$

Desse modo, a expressão (2) equivale a

$$\int \frac{u+2}{\sqrt{u^2+1}} du = sec\theta + 2. ln|sec\theta + tg\theta|.$$

Como $u = tg\theta$ e $\sqrt{u^2+1} = \frac{1}{cos\theta} = sec\theta$, encontramos

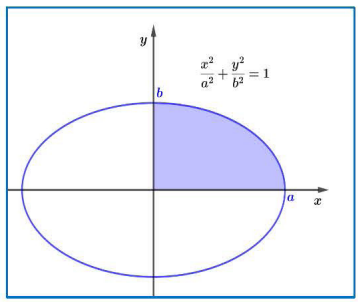
$$\int \frac{u+2}{\sqrt{u^2+1}} du = \sqrt{u^2+1} + 2. ln\left|\sqrt{u^2+1} + u\right|.$$

Porém, $u = x - 2$ e assim concluímos que

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx = \sqrt{x^2-4x+5} + 2. ln\left|\sqrt{x^2-4x+5} + x - 2\right| + c}.$$

4º exemplo: Vamos demonstrar a fórmula para o calcular a área de uma elipse.

Solução: Por simplicidade utilizaremos a equação de elipse centrada na origem e a parte positiva do 1º quadrante. Assim,



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{b^2x^2 + a^2y^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow a^2y^2 = a^2b^2 - b^2x^2 \Rightarrow$$

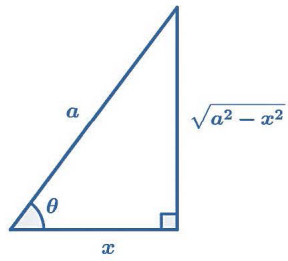
$$a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2) \Rightarrow y^2 = \frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2} \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}} \Rightarrow \boxed{y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}.$$

A área será 4 vezes o valor da integral no intervalo $[0, a]$, isto é

$$A = 4.\int_0^a (\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})dx = \frac{4b}{a}.\int_0^a (\sqrt{a^2 - x^2})dx.$$

Utilizando a substituição trigonométrica, temos o seguinte triângulo:



$$sen\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \Rightarrow \boxed{\sqrt{a^2 - x^2} = a.sen\theta}.$$

$$cos\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a.cos\theta}.$$

$$tg\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \Rightarrow \text{não usaremos!}$$

Como $x = a.cos\theta$, então $dx = a.(-sen\theta)d\theta$.

Quanto aos intervalos, precisamos ter um cuidado a mais com as integrais definidas. Esse intervalo depende da expressão em que possui o radical $\sqrt{\ }$. Para esse caso em que $x = a.cos\theta$, temos

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - (a.cos\theta)^2} = \sqrt{a^2 - a^2.cos^2\theta} = \sqrt{a^2 \underbrace{(1 - cos^2\theta)}_{sen^2\theta}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 sen^2\theta} = \underbrace{a}_{positivo}.\underbrace{\sqrt{sen^2\theta}}_{|sen\theta|} = a|sen\theta| \Rightarrow \boxed{\sqrt{a^2 - x^2} = a|sen\theta|}$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \begin{cases} asen\theta, se\ 0 \le \theta \le \pi \\ -asen\theta, se\ \pi \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Para que possamos utilizar $\sqrt{a^2 - x^2} = a.sen\theta$ proposto no triângulo inicial, devemos considerar o intervalo $0 \le \theta \le \pi$ na análise dos limites de integração. Desse modo,

Para $x = a.cos\theta$, devemos ter: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \\ x = a \Rightarrow \theta = 0 \end{cases}$.

Substituindo na integral, obtemos

$$A = \frac{4b}{a}.\int_0^a (\sqrt{a^2 - x^2})dx = \frac{4b}{a}.\int_{\pi/2}^0 (a.sen\theta).a.(-sen\theta)d\theta$$

Utilizando: $sen^2\theta = \frac{1 - cos2\theta}{2}$

$$A = \frac{4b}{a}.\int_{\pi/2}^0 -(a^2.sen^2\theta).d\theta = -4ab.\int_{\pi/2}^0 sen^2\theta d\theta$$

$$A = -4ab.\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1 - cos2\theta}{2}d\theta = -2ab.\int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - cos2\theta)d\theta \Rightarrow$$

$$A = -2ab.\left(\theta - \frac{sen2\theta}{2}\right)\Big]_{\pi/2}^0 = -2ab.\left[\left(0 - \frac{sen0}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{sen2\pi}{2}\right)\right] \Rightarrow \boxed{A = \pi ab}.$$

Os mesmos passos podem ser seguidos para demonstrar a fórmula da área de uma circunferência. Para isso, basta fazer $a = b = r$.

Observação: Ao utilizar o método da substituição trigonométrica nas integrais definidas, devemos analisar os extremos do intervalo de integração consoante ao radical da função obtida no triângulo retângulo. Veja que no exemplo anterior que o radical foi equivalente a

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a.sen\theta.$$

E assim, ao analisar que $sen\theta \geq 0$, inferimos que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Porém, ao optar por trocar os catetos, obteríamos $\sqrt{a^2 - x^2} = a.cos\theta$. E nesse caso, para $cos\theta \geq 0$, devemos utilizar: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Exemplos para outros casos:

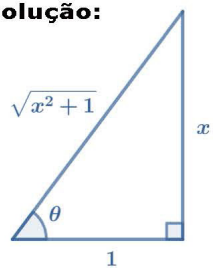
– Se $\sqrt{a^2 + x^2} = a.sec\theta$, para $sec\theta \geq 0$, devemos utilizar: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

– Se $\sqrt{x^2 - a^2} = a.tg\theta$, para $tg\theta \geq 0$, devemos utilizar: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

E assim por diante.

5º exemplo: Vamos calcular $\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Solução:



$$cos\theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+1} = sec\theta} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$tg\theta = \frac{x}{1} \Rightarrow \boxed{x = tg\theta} \Rightarrow dx = sec^2\theta d\theta.$$

Para $x = tg\theta$, devemos ter: $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \theta = \pi/4 \\ x = 2 \Rightarrow \theta = arctg(2) \end{cases}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{\pi/4}^{arctg(2)} \frac{sec^2\theta}{tg^2\theta sec\theta}d\theta = \int_{\pi/4}^{arctg(2)} \frac{sec\theta}{tg^2\theta}d\theta \Rightarrow$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg(2)} \frac{sec\theta}{tg^2\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg(2)} \frac{1/cos\theta}{sen^2\theta/cos^2\theta}d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{arctg(2)} cotg\theta.cossec\theta d\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx = -cossec\theta\Big]_{\pi/4}^{arctg(2)} = -cossec[arctg(2)] + \sqrt{2}}$$

Consulte a tabela básica de integrais.

Porém, $x = tg\theta \Rightarrow cotg\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow cotg\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow cotg\theta = \frac{1}{2}$ (para $x = 2$). E além disso,

$$cossec^2\theta = 1 + cotg^2\theta \Rightarrow cossec^2\theta = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow cossec^2\theta = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{cossec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}}.$$

Assim, $cossec[arctg(2)] = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e

$$\boxed{\int_1^2 \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{2}}.$$

EXERCÍCIOS 21.6

1) Calcule as integrais:

a) $\int \sqrt{1-x^2}dx$

b) $\int \sqrt{9+x^2}dx$

c) $\int \sqrt{x^2-4}dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

f) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

h) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

i) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$

j) $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}dx$

k) $\int \frac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2}dx$

l) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$

m) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$

n) $\int \sqrt{5-4x+x^2}\,dx$

o) $\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

p) $\int \frac{1}{(x^2-4x+3)^{3/2}}\,dx$

2) Calcule as integrais definidas:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

b) $\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

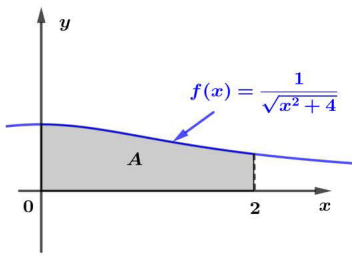
c) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

d) $\int_{0}^{5} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

e) $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

f) $\int_{0}^{1} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

3) Calcule a área A destacada na figura a seguir.



21.4.5. Integração de funções racionais por frações parciais

Nesta subseção, mostraremos como integrar uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ em que $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios.

Se o grau do polinômio $P(x)$ for maior do que o grau de $Q(x)$, deve-se inicialmente dividir $P(x)$ por $Q(x)$ e calcular a integral do polinômio resultante. Caso o $Grau\ (P) < grau\ (Q)$, aplica-se o método das frações parciais.

O método das frações parciais consiste em expressar a função racional em uma soma de frações mais simples, que denominamos de frações parciais.

De uma forma geral, se $Grau\ (P) < grau\ (Q)$ e $Q(x)$ for um produto de **fatores lineares distintos** na forma $(a_m x + b_m)^{r_n}$, a álgebra nos permite expressar uma função racional

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(a_1x+b_1)^{r_1}(a_2x+b_2)^{r_2}(a_3x+b_3)^{r_3}\dots(a_mx+b_m)^{r_n}},$$

da seguinte maneira:

- Para a expressão $(a_1x+b_1)^{r_1}$ devemos escrever uma quantidade r_1 de incógnitas $A_1,\ A_2,\ A_3, \dots, A_{r_1}$, cujos denominadores serão expressões na forma $(a_1x+b_1)^y$ com y (inteiro e positivo) crescendo a cada parcela, de 1 até r_1. Da seguinte forma

$$\frac{A_1}{(a_1x+b_1)^1} + \frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2} + \frac{A_3}{(a_1x+b_1)^3} \cdots \frac{A_{r_1}}{(a_1x+b_1)^{r_1}}.$$

- Para a expressão $(a_2x+b_2)^{r_2}$ devemos escrever uma quantidade r_2 de incógnitas: $B_1,\ B_2,\ B_3, \dots, B_{r_2}$ cujos denominadores serão expressões na forma $(a_2x+b_2)^y$ com y (inteiro e positivo) crescendo a cada parcela, de 1 até r_2, da seguinte maneira

$$\frac{B_1}{(a_2x+b_2)^1} + \frac{B_2}{(a_2x+b_2)^2} + \frac{B_3}{(a_2x+b_2)^3} \cdots \frac{B_{r_2}}{(a_2x+b_2)^{r_2}}.$$

- Continua-se esse processo até a última expressão $(a_m x + b_m)^{r_n}$:

$$\frac{Z_1}{(a_mx+b_m)^1} + \frac{Z_2}{(a_mx+b_m)^2} + \frac{Z_3}{(a_mx+b_m)^3} \cdots \frac{Z_{r_n}}{(a_mx+b_m)^{r_n}}.$$

Como a quantidade de incógnitas são limitadas comumente utilizamos as letras do alfabeto $A,\ B,\ C, \dots, Z$, em vez de $A_1, B_2, C_3 \dots Z_{r_n}$.

Exemplos:

✓ $\frac{x-1}{x^2-4x+3} = \frac{x-1}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$

Observe que o expoente de $(x-1)$ é 1, e desse modo, utilizou-se uma incógnita A. E que o expoente de $(x-3)$ é 1, e dessa forma, utilizou-se uma incógnita B.

✓ $\frac{x^2+1}{x^2-4x^2-3x-2} = \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$

Perceba que o expoente de $(x-1)$ é 2, por isso foram utilizadas duas incógnitas: A para $(x-1)$ e B para $(x-1)^2$. Como o expoente de $(x-2)$ é 1, somente a incógnita C foi utilizada.

✓ $\frac{P(x)}{(x-a)^3(x-b)^2(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \frac{D}{x-b} + \frac{E}{(x-b)^2} + \frac{F}{x-c}$

Veja que o expoente de $(x-a)^3$ é 3. Portanto, foram utilizadas três incógnitas: A, B e C. Os denominadores dessas incógnitas são expressões $(x-a)$ de expoente crescente a cada parcela em uma unidade, de 1 até 3, respectivamente. Observe ainda, que o expoente de $(x-b)^2$ é 2, então duas incógnitas D e E foram utilizadas. E por fim, o expoente de $(x-c)$ é 1, somente uma incógnita F foi necessária.

Se caso $Q(x)$ tiver algum fator quadrático irredutível (ou seja, da forma ax^2+bx+c, com $b^2-4ac<0$), então além das frações parciais anteriores, devemos acrescentar para cada fator quadrático uma expressão na forma $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$.

Exemplo:

$$\frac{x}{(x-3)(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)}$$

(x^2+1) e (x^2+x+1) são irredutíveis: $(b^2-4ac<0)$

De forma equivalente ao que se aplica aos fatores lineares na forma $(a_m x+b_m)^{r_n}$, aplica-se também aos fatores quadráticos irredutíveis. Isto é, acrescentamos expressões na forma $\frac{A_n x+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$ também de 1 até n, conforme a seguir.

$$\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)^1} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} \cdots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

Exemplo:

$$\frac{P(x)}{(x^2+4)^3(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)} + \frac{Cx+D}{(x^2+4)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^3}$$

Note que o expoente de $(x^2+4)^3$ é 3. Portanto, foram utilizadas as três expressões: $Bx+C, Cx+D$ e $Ex+F$, com denominadores de expoente crescente em uma unidade, de 1 até 3, respectivamente. Observe ainda, que $(x-1)$ é linear e segue o critério anterior.

Usando esses artifícios algébricos conseguimos obter frações parciais mais simples e equivalentes à função proposta na integral.

1º exemplo: $\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}dx$

Solução: A expressão x^2-4x+3 pode ser escrita como $(x-1)(x-3)$.

$$\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{x-2}{(x-1)(x-3)}dx.$$

Expressando $\frac{x-2}{(x-1)(x-3)}$ em frações parciais, temos

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{Ax-3A+Bx-B}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = \frac{(A+B)x+(-3A-B)}{(x-1)(x-3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ -3A-B=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} = \frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x-3}}.$$

Substituindo na integral, obtemos

$$\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}\,dx = \int \frac{1/2}{x-1}+\frac{1/2}{x-3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-4x+3}\,dx = \frac{1}{2}ln|x-1|+ln|x-3| \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}[ln|x^2-4x+3|]+c}.$$

2º exemplo: $\int \frac{x^2-4x+8}{x^4-4x^3+4x^2}dx$

Solução: Podemos decompor $x^4-4x^3+4x^2$, como $x^2(x^2-4x+4) = x^2(x-2)^2$.

$$\int \frac{x^2-4x+8}{x^4-4x^3+4x^2}\,dx = \int \frac{x^2-4x+8}{x^2(x-2)^2}\,dx.$$

Expressando $\frac{x^2-4x+8}{x^2(x-2)^2}$ em frações parciais, temos

$$\frac{x^2-4x+8}{x^2(x-2)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x-2)^2} = \frac{Ax(x-2)^2+B(x-2)^2+Cx^2(x-2)+Dx^2}{x^2(x-2)^2}$$

$$\frac{x^2-4x+8}{x^2(x-2)^2} = \frac{Ax^3-4Ax^2+4Ax+Bx^2-4Bx+4B+Cx^3-2Cx^2+Dx^2}{x^2(x-2)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2-4x+8}{x^2(x-2)^2} = \frac{x^3(A+C)+x^2(-4A+B-2C+D)+x(4A-4B)+4B}{x^2(x-2)^2}$$

A igualdade de polinômios no numerador nos dá o seguinte sistema

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -4A+B-2C+D=1 \\ 4A-4B=-4 \\ 4B=8 \end{cases}.$$

Resolvendo esse sistema:

$4B=8 \Rightarrow B=\frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{B=2}$.

$4A-4B=-4 \Rightarrow 4A-4.2=-4 \Rightarrow 4A=-4+8 \Rightarrow 4A=4 \Rightarrow \boxed{A=1}$.

$A+C=0 \Rightarrow 1+C=0 \Rightarrow \boxed{C=-1}$.

$-4A+B-2C+D=1 \Rightarrow -4.1+2-2.(-1)+D=1 \Rightarrow \boxed{D=1}$.

Encontramos

$$\boxed{\frac{x^2-4x+8}{x^2(x-2)^2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}}$$

E assim,

$$\int \frac{x^2-4x+8}{x^4-4x^3+4x^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{2}{x^2}\,dx + \int \frac{-1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\boxed{ln|x| - \frac{2}{x} - ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c}.$$

3º exemplo: $\int \frac{x^4+4x^3-4x^2+6x-1}{(2x-1)(x^2+1)^2}\,dx$

Solução:

$$\frac{x^4+4x^3-4x^2+4x}{(2x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x^2+1)(2x-1)+(Dx+E)(2x-1)}{(2x-1)(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{Ax^4+2Ax^2+A+(Bx^3+Bx+Cx^2+C)(2x-1)+2Dx^2-Dx+2Ex-E}{(2x-1)(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{Ax^4+2Ax^2+A+2Bx^4+2Bx^2+2Cx^3+2Cx-Bx^3-Bx-Cx^2-C+2Dx^2-Dx+2Ex-E}{(2x-1)(x^2+1)^2}$$

$$\frac{(A+2B)x^4+(2C-B)x^3+(2A+2B-C+2D)x^2+(2C-B-D+2E)x+A-C-E}{(2x-1)(x^2+1)^2}$$

A igualdade de polinômios no numerador nos dá o seguinte sistema

$$\begin{cases} A+2B=1 \\ 2C-B=4 \\ 2A+2B-C+2D=-4 \\ 2C-B-D+2E=6 \\ A-C-E=-1 \end{cases}.$$

Substituindo o valor da equação 2 na equação 4, temos

$$\overbrace{2C-B}^{4} - D + 2E = 6 \Rightarrow 4 - D + 2E = 6 \quad \Rightarrow \boxed{-D+2E=2}\ (1).$$

Desmembrando a equação 3

$$2A+2B-C+2D=-4 \Rightarrow \boxed{A+A+2B-C+2D=-4}.$$

Substituindo a equação 1 na equação 3: $A + \overbrace{A+2B}^{1} - C + 2D = -4 \Rightarrow$

$$A+1-C+2D=-4 \Rightarrow \boxed{A-C+2D=-5}\ (2).$$

Da equação 5, temos: $A-C-E=-1 \Rightarrow \boxed{A-C=-1+E}$.

Substituindo em (2), encontramos

$$\overbrace{A-C}^{-1+E}+2D=-5 \Rightarrow -1+E+2D=-5 \Rightarrow \boxed{E+2D=-4}\ (3).$$

Montando o sistema com (1) e (3), dispomos de

$$\begin{cases} -D+2E=2 & (x2) \\ E+2D=-4 \end{cases} \sim \begin{cases} -2D+4E=4 \\ E+2D=-4 \end{cases} \Rightarrow 5E=0 \Rightarrow \boxed{E=0}.$$

De (3), temos: $E+2D=-4 \Rightarrow 0+2D=-4 \Rightarrow \boxed{D=-2}$.

Da equação 5, obtemos: $A-C=-1+E \Rightarrow \boxed{A-C=-1}\ (4)$.

Da equação 1, obtemos: $A+2B=1 \Rightarrow \boxed{B=(1-A)/2}$.

Substituindo em (2): $2C-B=4 \Rightarrow 2C-\frac{1-A}{2}=4 \Rightarrow \boxed{4C+A=9}\ (5)$

Montando o sistema com (1) e (3), dispomos de

$$\begin{cases} A-C=-1 & (x4) \\ 4C+A=9 \end{cases} \sim \begin{cases} 4A-4C=-4 \\ 4C+A=9 \end{cases} \Rightarrow 5A=5 \Rightarrow \boxed{A=1}.$$

De (4): $A-C=-1 \Rightarrow 1-C=-1 \Rightarrow \boxed{C=2}$.

Da equação 1, obtemos: $A+2B=1 \Rightarrow 1+2B=1 \Rightarrow \boxed{B=0}$.

Dessa forma, a integral fica assim

$$\int \frac{x^4+4x^3-4x^2+6x-1}{(2x-1)(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$\int \left(\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)dx \Rightarrow$$

Use o método da substituição nessa integral.

$$\int \left(\frac{1}{2x-1}\right)dx+\int \left(\frac{2}{x^2+1}\right)dx+\int \left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{\int \frac{x^4+4x^3-4x^2+6x-1}{(2x-1)(x^2+1)^2}dx=\frac{1}{2}ln|2x-1|+2.arctg(x)+\frac{1}{x^2+1}}.$$

EXERCÍCIOS 21.7

1) Calcule as integrais.

a) $\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

b) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

c) $\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}dx$

d) $\int \frac{3x-1}{x^2+x+1}dx$

e) $\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

f) $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx$

g) $\int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}dx$

h) $\int \frac{3x^2-x+1}{x^2(x+1)}dx$

i) $\int \frac{2x+10}{x^2+4x+13}dx$

j) $\int \frac{x^3+2x^2+2x+2}{x^2+x+1}dx$

21.5. Comprimento de curva (ou arco)

Nesta seção estudaremos as ferramentas de cálculo integral para encontrar o comprimento de uma curva plana (ou arco).

Seja uma função $f(x)$ com derivada contínua no intervalo $[a,b]$, conforme figura 21.5.1. O comprimento do arco é a medida L "esticando a função", conforme a figura 21.5.2. Para calcular o comprimento L dessa função, precisamos dividi-la em n pequenos segmentos, conforme a figura 21.5.3. Esses pequenos segmentos serão denotados como L_n (figura 21.5.4).

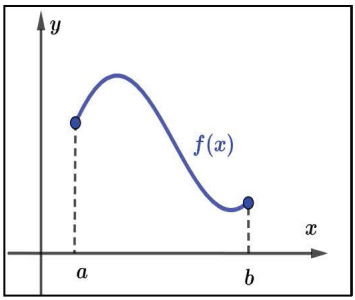


Figura 21.5.1

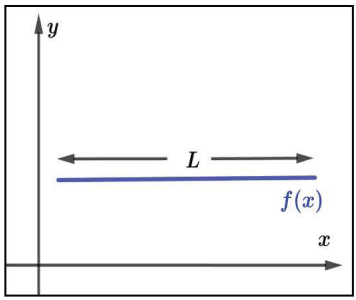


Figura 21.5.2

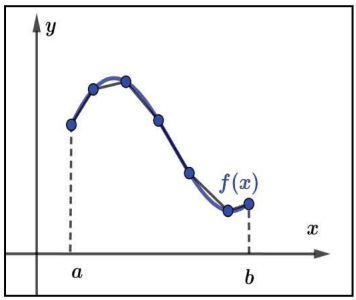


Figura 21.5.3

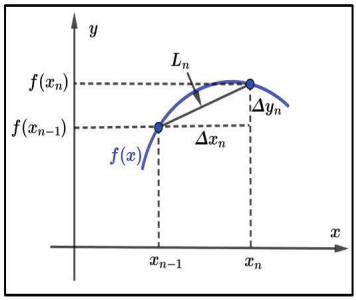


Figura 21.5.4

Aplicando o teorema de Pitágoras na figura 21.5.4, obtemos

$$L_n = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + [f(x_n) - f(x_{n-1})]^2} \quad (1).$$

O teorema 20.5.2.3 (teorema do valor médio), afirma que: se uma função f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então existe ao menos um ponto $x_n \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f'(x_n^*) \Rightarrow \boxed{f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(x_n^*).\Delta x_n}.$$

Substituindo em (1), encontramos

$$L_n = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + [f'(x_n^*).\Delta x_n]^2} \Rightarrow \boxed{L_n = \Delta x_n.\sqrt{1 + [f'(x_n^*)]^2}}.$$

Para aplicar a soma de Riemann devemos tomar o limite de n crescendo

infinitamente, dessa forma, $\Delta x_n \to 0$ e o comprimento será dado por

$$L = lim_{\Delta x_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_n . \sqrt{1 + [f'(x_n{}^*)]^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \Rightarrow$$

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

Exemplo: Vamos encontrar o comprimento do arco da curva $f(x) = x$ do ponto $(-1,-1)$ ao ponto $(2,2)$.

Solução:

$$f'(x) = 1 \Rightarrow L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \Rightarrow$$

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 1^2}\, dx = \int_{-1}^{2} \sqrt{2}\, dx = \sqrt{2}x \Big]_{-1}^{2} \Rightarrow$$

$$L = \sqrt{2}.2 - \sqrt{2}.(-1) \Rightarrow \boxed{L = 3\sqrt{2}\ u.c}.$$

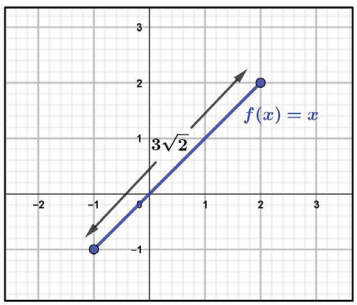


Figura 21.5.5

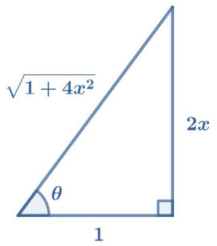
Use o teorema de Pitágoras no gráfico da função que está na figura 21.5.5 e comprove o valor $3\sqrt{2}$.

2º exemplo: Vamos encontrar o comprimento do arco da curva $f(x) = x^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

Solução: $f'(x) = 2x$. Assim,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^{1/2} \sqrt{1 + 4x^2}\, dx.$$

Utilizando a substituição trigonométrica:



$$sen\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \Rightarrow \text{não usaremos!}$$

$$cos\theta = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \Rightarrow \sqrt{1+4x^2} = \frac{1}{cos\theta}$$

$$tg\theta = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Cateto adjacente}} = \frac{2x}{1} \Rightarrow 2x = tg\theta$$

Para $cos\theta \geq 0$, devemos ter: $0 \leq \theta \leq \pi$

Como $x = \frac{tg\theta}{2}$, então $dx = \frac{1}{2}.(sec^2\theta)d\theta$ e para $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \pi/4 \\ x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \end{cases}$

Substituindo na integral, temos

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{cos\theta} . \frac{sec^2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} sec^3\theta d\theta.$$

Agora, aplicando a integração por partes: $\begin{cases} f'(\theta) = sec^2\theta \Rightarrow f(x) = tg\theta \\ g(\theta) = sec\theta \Rightarrow g'(x) = sec\theta . tg\theta\, d\theta \end{cases}$

$$\int f'(\theta).g(\theta)\,dx = f(\theta).g(\theta) - \int f(\theta).g'(\theta)\,d\theta$$

$$\int sec^3\theta\,d\theta = tg\theta.sec\theta - \int tg\theta.sec\theta.tg\theta\,d\theta = tg\theta.sec\theta - \int tg^2\theta.sec\theta\,d\theta$$

Substituindo $tg^2\theta = -1 + sec^2\theta$, dispomos de

$$\int sec^3\theta\,d\theta = tg\theta.sec\theta - \int (-1 + sec^2\theta).sec\theta\,d\theta$$

$$\int sec^3\theta\,d\theta = tg\theta.sec\theta + \int sec\theta\,d\theta - \int sec^3\theta\,d\theta$$

$$\int sec^3\theta\,d\theta + \int sec^3\theta\,d\theta = tg\theta.sec\theta + \underbrace{\int sec\theta\,d\theta}_{ln|sec\theta+tg\theta|}$$

$$2.\int sec^3\theta\,d\theta = tg\theta.sec\theta + ln|sec\theta + tg\theta|$$

$$\int sec^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}.(tg\theta.sec\theta + ln|sec\theta + tg\theta|)$$

Daí segue que

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} sec^3\theta d\theta = \frac{1}{4}(tg\theta.sec\theta + ln|sec\theta + tg\theta|)\Big]_0^{\pi/4}$$

$$L = \frac{1}{4}\left[\left(tg\frac{\pi}{4}.sec\frac{\pi}{4} + ln\left|sec\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{4}\right|\right) - \left(\underbrace{tg0}_{0}.\underbrace{sec0}_{1} + ln\left|\underbrace{sec0}_{1} + \underbrace{tg0}_{0}\right|\right)\right]$$

$$L = \frac{1}{4}(1.\sqrt{2} + ln|\sqrt{2} + 1| \Rightarrow$$

$$L = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + ln|\sqrt{2} + 1| \Rightarrow \boxed{L = 0{,}573897\ u.c}.$$

O gráfico da função $f(x) = x^2$ está na figura 21.5.6. Ao "esticar" a parte da função destacada e medirmos em uma régua, encontraremos $\cong 0{,}58\ cm$ (se a escala for em centímetros).

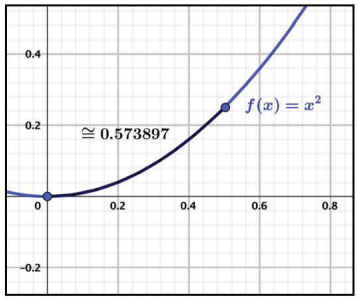


Figura 21.5.6

EXERCÍCIOS 21.8

1) Calcule o comprimento do arco da curva nos intervalos indicados:

a) $f(x) = 2x + 1$ no intervalo [-1,2]

b) $f(x) = \sqrt{x}$ no intervalo [0,1]

c) $f(x) = x^2$ no intervalo [0,2]

d) $f(x) = ln\,(secx)$ no intervalo $[1, \frac{\pi}{2}]$

e) $f(x) = ln\,(cosx)$ no intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$

f) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ no intervalo [0,1]

21.6. Volume de sólidos

Além do cálculo de área e comprimento de curva, podemos utilizar as integrais para calcular volumes de sólidos. As subseções a seguir abordarão três formas em que isso pode ser feito: por meio de fatiamento, revolução ou camadas cilíndricas.

21.6.1. Volume de sólidos por fatiamento

Considere um sólido que se estende ao logo do eixo x, no intervalo de $[a,b]$, cuja secção transversal é perpendicular a esse eixo. Podemos fatiar esse sólido em n fatias (subintervalos entre a e b) conforme figura 21.6.1.1. Se cada fatia possui área $A(x)$ e altura Δx_n, podemos obter o seu volume V aplicando soma de Riemann:

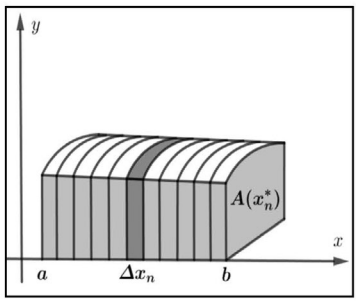


Figura 21.6.1.1

$$V = lim_{\Delta x_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x_n{}^*).\Delta x_n = \int_a^b A(x)dx \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)dx.}$$

Caso o sólido se estenda ao logo do eixo y (no intervalo de $[a,b]$) e sua secção transversal for perpendicular a esse eixo, teremos de forma equivalente que

$$\boxed{V = \int_a^b A(y)dy.}$$

Em outras palavras, o volume de um sólido pode ser obtido integrando-se a área que representa sua secção transversal entre os extremos a e b desse sólido.

Exemplo: Vamos calcular o volume de uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado a e altura h.

Solução: Inicialmente, precisamos encontrar uma relação entre y e x aplicada à área transversal $A(x)$.

Aplicando a semelhança de triângulos na figura a seguir, temos

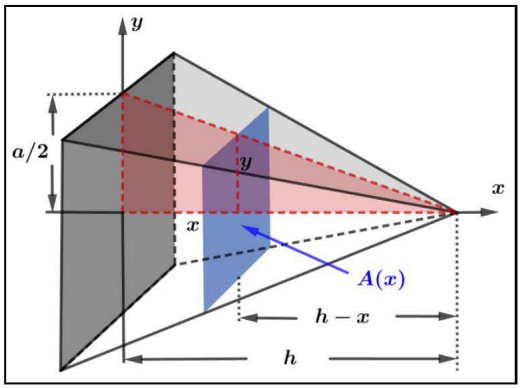
$$\frac{a/2}{y} = \frac{h}{h-x} \Rightarrow \frac{a/2}{y} = \frac{h}{h-x} \Rightarrow \boxed{y = \frac{a(h-x)}{2h}} \ (1).$$

A área da secção transversal pode ser calculada por

$$A = (2y)^2 \Rightarrow \boxed{A = 4y^2} \ (2).$$

Substituindo (1) em (2), dispomos de

$$A = 4y^2 \Rightarrow A(x) = 4\left(\frac{a(h-x)}{2h}\right)^2 \Rightarrow A(x) = \frac{4a^2(h-x)^2}{4h^2} \Rightarrow \boxed{A(x) = \frac{a^2(h-x)^2}{h^2}}.$$



$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_0^h \left(\frac{a^2(h-x)^2}{h^2}\right) dx \Rightarrow V = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h ((h-x)^2)\, dx \Rightarrow$$

$$V = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h (h^2 - 2xh + x^2)\, dx \Rightarrow V = \frac{a^2}{h^2}\left(\int_0^h (h^2)\, dx - 2h\int_0^h x\, dx + \int_0^h x^2\, dx\right)$$

$$V = \frac{a^2}{h^2}(h^2.x - hx^2 + \frac{x^3}{3})\Big]_0^h \Rightarrow V = \frac{a^2}{h^2}\left(h^2.h - hh^2 + \frac{h^3}{3}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{a^2h}{3}}.$$

2º exemplo: Vamos calcular o volume de uma esfera de raio R.

Solução: Para encontrar uma relação entre y e x aplicada à área transversal $A(x)$ da esfera, vamos aplicar o teorema de Pitágoras na figura a seguir.

$$R^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \boxed{y^2 = R^2 - x^2}(1).$$

A área A é uma circunferência de raio y, logo $A = \pi y^2$. Substituindo em (1), obtemos

$$A(x) = \pi(R^2 - x^2).$$

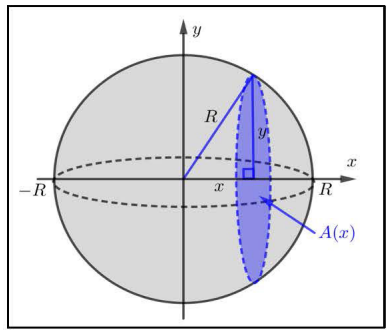
O volume é, portanto,

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2)\, dx \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-R}^R \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(R^2R - \frac{R^3}{3}\right) - \left(R^2.(-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right) \Rightarrow$$

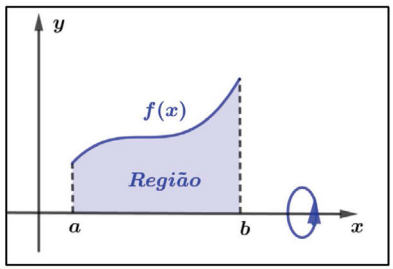
$$V = \pi\left(\frac{2R^3}{3} + \frac{2R^3}{3}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3}}.$$



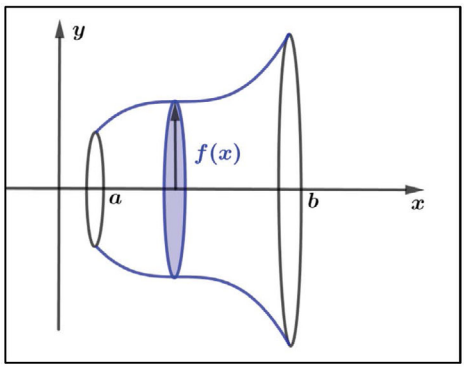
21.6.2. Volume de sólidos de revolução (método dos discos)

Considere um sólido gerado pela rotação de uma região plana compreendida entre a curva (a função) e uma reta. Se a rotação se dá em torno dessa reta (que deve está no mesmo plano da região a esse sólido), denominamos o sólido gerado de **sólido de revolução** e a reta de rotação de **eixo de revolução**.

Por simplicidade, iniciaremos a rotação de uma função em torno do eixo x, conforme a ilustração a seguir.



Como a secção tem forma de discos, esse método também é denominado de método dos discos.



Podemos encontrar o volume desse sólido aplicando o volume por fatiamento. Claramente a área da secção transversal desse sólido é dado por $A(x) = \pi.[f(x)]^2$, uma vez que é a área de uma circunferência de raio $f(x)$. Assim,

$$V = \int_a^b \pi.[f(x)]^2 dx.$$

Quando a rotação se dá em torno do eixo y, utilizamos

$$V = \int_a^b \pi.[f(y)]^2 dy.$$

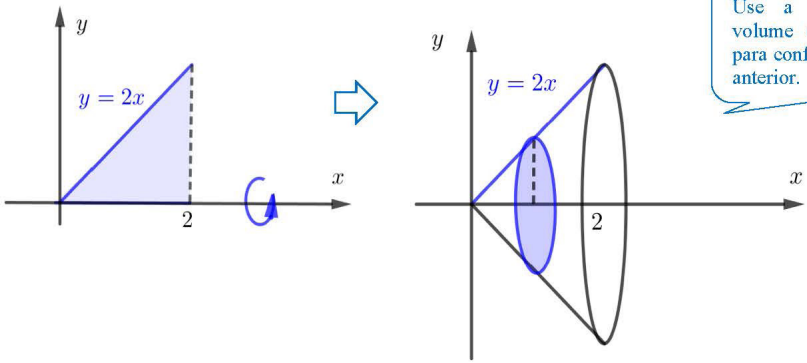
Exemplo: Vamos calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação em torno do eixo x da região delimitada por $y = 2x$ e o eixo x, no intervalo de $x = 0$ à $x = 2$.

Solução: A rotação e sólido gerado estão representados nas figuras a seguir.

A área da secção transversal é uma circunferência de raio $f(x)$. Assim,

$$V = \int_a^b \pi.[f(x)]^2 dx = \int_0^2 \pi.[2x]^2 dx = \int_0^2 \pi 4x^2 dx = 4\pi \int_0^2 x^2 dx.$$

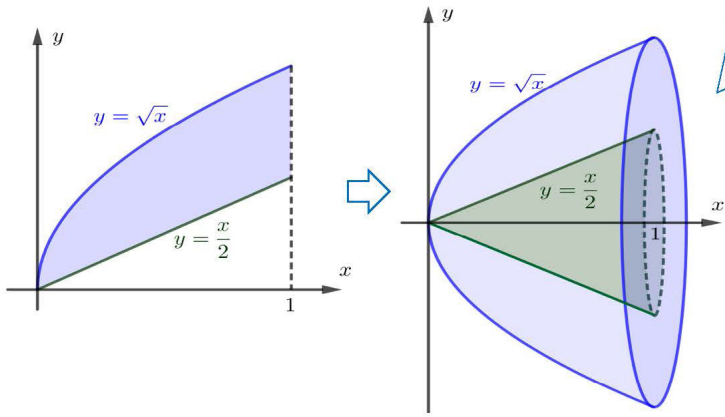
$$V = 4\pi \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^2 = 4\pi \left[\left(\frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right] \Rightarrow \boxed{V = \frac{32\pi}{3}\ u.v}.$$



Use a fórmula do volume de um cone para confirmar o valor anterior.

2º exemplo: Calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação em torno do eixo x da região compreendida entre $y = \sqrt{x}$ e $y = \frac{x}{2}$ no intervalo de $x = 0$ à $x = 1$.

Solução: A rotação e sólido gerado estão representados nas figuras a seguir.



Como a secção tem forma de arruelas, esse método também é denominado de método das arruelas.

O volume pretendido é a diferença entre o volume gerado pela rotação da função $y = \sqrt{x}$ e o eixo x e o volume da função $y = \frac{x}{2}$ e o eixo x, no intervalo de 0 à 1.

$$V_1 = \int_a^b \pi.[f(x)]^2 dx = \int_0^1 \pi.[\sqrt{x}]^2 dx = \int_0^1 \pi x dx = \pi \int_0^1 x dx \Rightarrow$$

$$V_1 = \pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right)\right] \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{\pi}{2}\, u.v}$$

$$V_2 = \int_a^b \pi.[f(x)]^2 dx = \int_0^1 \pi.\left[\frac{x}{2}\right]^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2 dx \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}\left[\left(\frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^3}{3}\right)\right] \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{\pi}{12}\, u.v}.$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{6\pi - \pi}{12} \Rightarrow \boxed{V = \frac{5\pi}{12} u.v}.$$

Diante desse exemplo, podemos inferir que o volume gerado pela rotação da área compreendida entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$ (com $f(x) \geq g(x)$) no intervalo de a à b, segundo o eixo de rotação x, é

$$V = \int_a^b \pi.([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx.$$

E para um eixo de rotação y,

$$V = \int_a^b \pi.([f(y)]^2 - [g(y)]^2)dy.$$

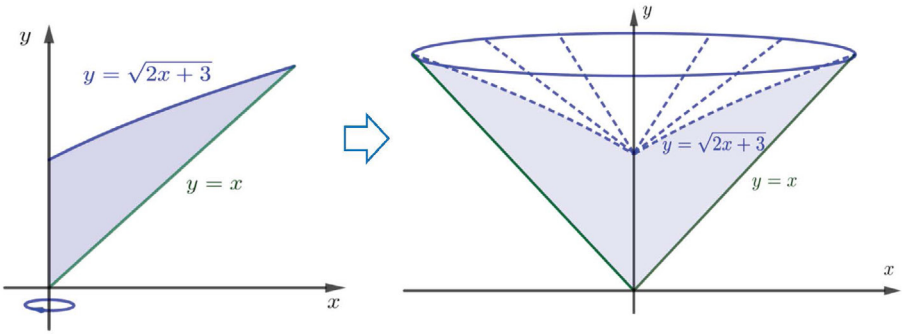
Aplicando a fórmula no exemplo anterior, encontramos

$$V = \int_a^b \pi.([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx = \pi.\int_0^1 [\sqrt{x}]^2 - \left[\frac{x}{2}\right]^2 dx = \pi.\int_0^1 x - \frac{x^2}{4}dx \Rightarrow$$

$$V_1 = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right)\Big]_0^1 = \pi.\left\{\left[\left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{1^3}{12}\right)\right] - \left[\left(\frac{0^2}{2}\right) - \left(\frac{0}{12}\right)\right]\right\} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{5\pi}{12}\ u.v}.$$

3º exemplo: Calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação em torno do eixo y da região compreendida entre $y = \sqrt{2x+3}$, $y = x$ e o eixo y.

Solução: A rotação e sólido gerado estão representados nas figuras a seguir.



Inicialmente devemos encontrar o intervalo, os pontos de intersecção das duas funções.

$$\sqrt{2x+3} = x \Rightarrow 2x + 3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (a = 1, b = -2\ e\ c = -3) \Rightarrow \Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \boxed{\Delta = 16}.$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2.1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x' = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x'' = \frac{2-4}{2} = -2\ (descartada!) \end{cases}.$$

Como a rotação está em torno do eixo y, as funções devem estar em função de y.

$$y = \sqrt{2x+3} \Rightarrow y^2 = 2x+3 \Rightarrow \boxed{x = f(y) = \frac{y^2-3}{2}}.$$

E a outra função será

$$\boxed{g(y) = y}.$$

Quanto ao intervalo, para $x = 3 \Rightarrow \boxed{y = 3}$ e para $x = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$. Assim,

$$V = \int_a^b \pi.([g(y)]^2 - [f(y)]^2)dy = \pi.\int_0^3 [y]^2 - \left[\frac{y^2-3}{2}\right]^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi.\int_0^3 \left(y^2 - \frac{y^4-6y^2+9}{4}\right)dy = \pi.\int_0^3 \left(\frac{-y^4+10y^2-9}{4}\right)dy \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{4}\int_0^3 (-y^4+10y^2-9)dy = V = \frac{\pi}{4}\left(\frac{-y^5}{5} + \frac{10y^3}{3} - 9y\right)\Big|_0^3 \Rightarrow$$

$$V = \frac{\pi}{4}.\left\{\left[\frac{-3^5}{5} + \frac{10.3^3}{3} - 9.3\right] - \left[\frac{-0^5}{5} + \frac{10.0^3}{3} - 9.0\right]\right\} \Rightarrow$$

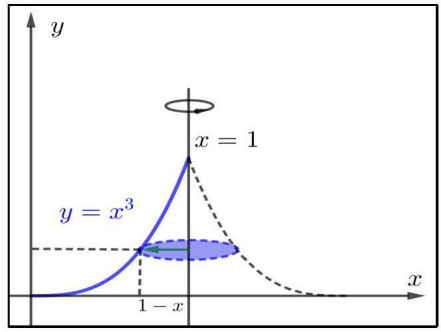
$$V = \frac{\pi}{4}.\left[\frac{-243}{5} + 90 - 27\right] = \frac{\pi}{4}.\left[\frac{-243}{5} + 63\right] \Rightarrow V = \frac{\pi}{4}.\left[\frac{72}{5}\right] \Rightarrow \boxed{V = \frac{18\pi}{5}\ u.v}.$$

O exemplo a seguir aborda o caso em que o eixo de rotação não é nenhum dos eixos x e y convencionais.

4º exemplo: Calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação da região delimitada por $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 1$, em torno da reta $x = 1$.

Solução: A figura do sólido pretendido está a seguir.

A área da secção transversal é uma circunferência de raio $1 - x$ ou $1 - \sqrt[3]{y}$. Assim,



$$V = \int_a^b \pi.[f(y)]^2 dy = \int_0^1 \pi.\left[1 - \sqrt[3]{y}\right]^2 dy \Rightarrow$$

$$V = \pi\int_0^1 (1 - 2\sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2})dy \Rightarrow$$

$$V = \pi\left(y - 2.\frac{y^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{y^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow$$

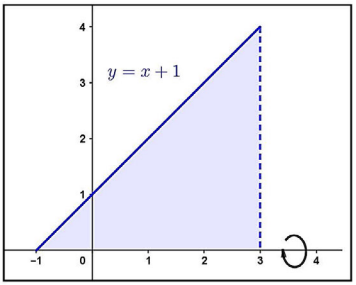
$$V = \pi\left(y - 3.\frac{y^{\frac{4}{3}}}{2} + 3.\frac{y^{\frac{5}{3}}}{5}\right)\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$V = \pi\left[\left(1 - 3.\frac{1^{\frac{4}{3}}}{2} + 3.\frac{1^{\frac{5}{3}}}{5}\right) - \left(0 - 3.\frac{0^{\frac{4}{3}}}{2} + 3.\frac{0^{\frac{5}{3}}}{5}\right)\right] = \pi\left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{10}\ u.v}.$$

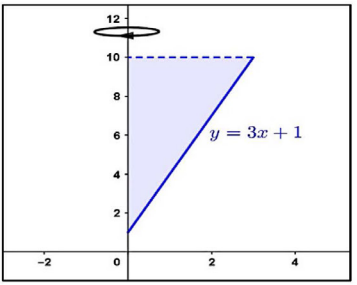
EXERCÍCIOS 21.9

1) Encontre o volume do sólido de revolução resultante da região sombreada quando gira em torno do eixo especificado.

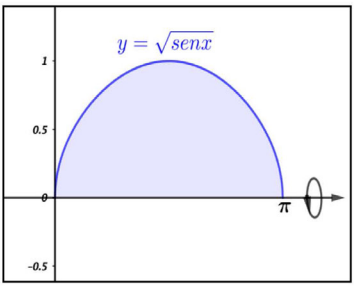
a)



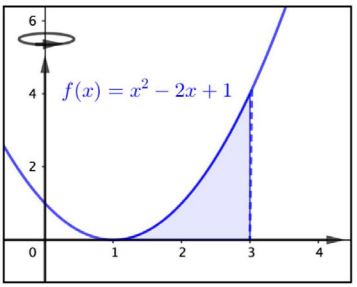
b)



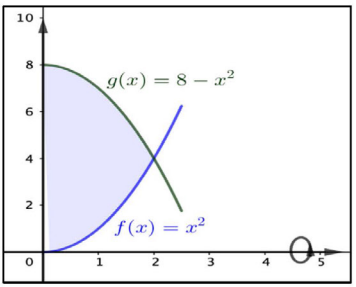
c)



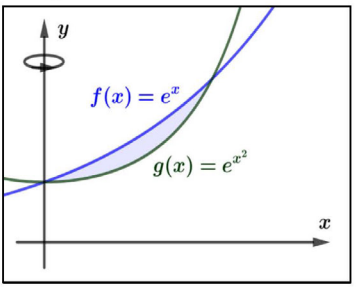
d)



e)



f)



2) Calcule o volume do sólido obtido a partir da rotação da região limitada pelas curvas em torno do eixo x nos intervalos especificados.

a) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 1$, $x = 1$ e $x = 4$;

b) $y = 1/x$, $y = 1$, $x = 1$ e $x = 4$;

c) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 2$;

d) $y = \sqrt{senx}$, $y = \sqrt{cosx}$, $y = 0$, $x = 0$ $x = \frac{\pi}{2}$;

e) $y = \sqrt{secx}$, $y = \sqrt{2cosx}$ e $x = 0$.

3) Calcule o volume do sólido obtido a partir da rotação da região limitada pelas curvas em torno do eixo y nos intervalos especificados.

a) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 4$ e $x = 4$;

b) $y = lnx$, $x = e$, $y = 0$ e $y = 1$;

c) $y = \frac{2}{x}$ e $y = -x + 3$;

d) $y = x$, $y^2 + x = 2$ e $y = 0$;

e) $y = arcsenx$ e $y = arccosx$.

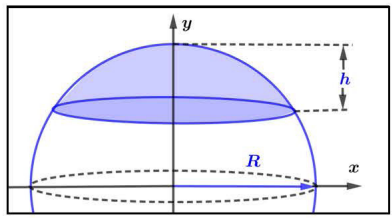
4) Usando o cálculo de volume por fatiamento, calcule:

a) Um tronco de uma pirâmide reta de altura h, base quadrada maior a e base quadrada menor b.

b) Um tronco de cone circular reto de altura h, raio da base maior R e raio da base menor r.

c) Um tetraedro regular de aresta a.

d) Uma calota de uma esfera de raio R e altura h (conforme a figura ao lado).



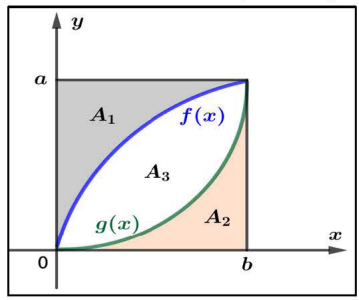
5) Monte as integrais que calculam os volumes gerados por cada região da figura seguir. Use a notação $f(y)$ e $g(y)$ para especificar a curva em função de y.

a) A região A_1 em torno do eixo x.

b) A região A_2 em torno do eixo y.

c) A região A_2 em torno do eixo x.

d) A região A_3 em torno do eixo y.



6) Calcule o volume de um sólido obtido a partir da rotação da região limitada pela curva $y = x^2 + 2$ no intervalo de $x = 0$ e $x = 1$ girando em torno da reta $y = 1$.

7) Calcule o volume de um sólido obtido a partir da rotação da região limitada pela curva $x = \sqrt{y + 4}$ no intervalo de $y = 0$ e $y = 1$ girando em torno da reta $x = 1$.

21.6.3. Volume por camadas cilíndricas

O método das camadas cilíndricas (ou cascas cilíndricas) é uma alternativa para cálculo de volumes quando os métodos anteriores apresentarem um integrando difícil de encontrar a primitiva ou quando a área da secção transversal não pode ser calculada. Em alguns casos, esse método pode ser mais prático que os anteriores.

Considere uma região plana compreendida entre a curva (a função) e o eixo x, dentro do intervalo $[a, b]$, conforme figura 21.6.3.1. O sólido gerado pela rotação dessa região (área) em torno do eixo y está na figura 21.6.3.2.

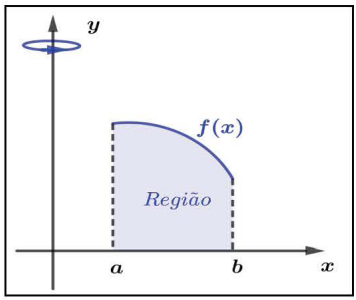


Figura 21.6.3.1

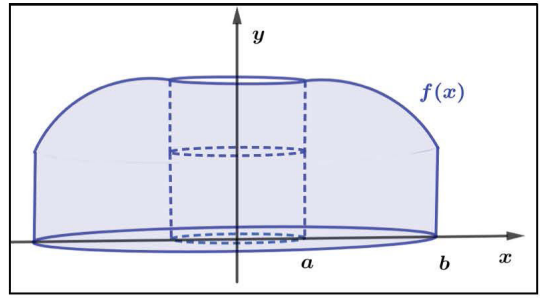


Figura 21.6.3.2

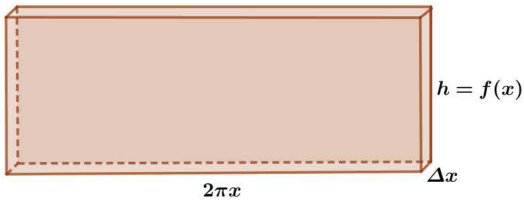


Figura 21.6.3.3

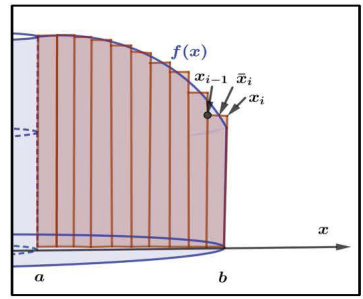


Figura 21.6.3.4

Segundo a figura 21.6.3.2, o volume V desse sólido pode ser obtido subtraindo o volume do sólido de fora V_2 que podemos assumir que tem raio r_2, pelo volume do cilindro interno V_1 de raio r_1. Dessa forma

$$V = V_2 - V_1 = (\pi {r_2}^2 - \pi {r_1}^2)h = \pi({r_2}^2 - {r_1}^2)h = \pi(r_2 - r_1)(r_2 + r_1)h \quad (1).$$

Fazendo $\Delta r = r_2 - r_1$ (a espessura da camada – retângulo da figura 21.6.3.3), temos $r = (r_2 - r_1)/2$ (o raio médio da camada). E ao multiplicar (1) por 2 e dividir $(r_2 + r_1)$ por 2, obtemos

$$V = 2\pi \overbrace{\frac{(r_2 + r_1)}{2}}^{r} \overbrace{(r_2 - r_1)}^{\Delta r} h \quad \Rightarrow \quad V = \overbrace{2\pi r}^{circunferência} \; . \; \overbrace{\Delta r}^{espessura} \; . \; \overbrace{h}^{altura} \; .$$

Esse é o volume de uma camada (uma casca) disposto na figura 21.6.3.4. A somatória de Riemann de todas essas camadas constitui o volume do sólido:

$$V = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi\overline{x}_i f(\overline{x}_i)\Delta x \Rightarrow \int_a^b 2\pi \overbrace{\overline{x}}^{raio}.\overbrace{f(\overline{x})}^{altura}.\overbrace{dx}^{espessura}.$$

O que equivale a

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx.}$$

Se a rotação for em torno do eixo x:

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi y f(y)dy.}$$

Para um volume entre duas funções:

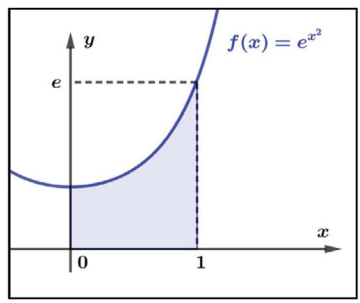
$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]dx.}$$

Para um volume entre duas funções, se a rotação for em torno do eixo x:

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi y[f(y) - g(y)]dy.}$$

Exemplo: Calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação em torno do eixo y da região compreendida entre $f(x) = e^{x^2}$, $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: A região em questão está na figura a seguir.



Utilizando o método das camadas cilíndricas, temos

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)dx = \int_0^1 2\pi x e^{x^2}dx \Rightarrow$$

$$V = \pi e^{x^2}\Big|_0^1 = \pi e - \pi \Rightarrow \boxed{V = \pi(e-1)}.$$

Para fins comparativos, vamos resolver agora utilizando o método dos discos:

$$y = e^{x^2} \Rightarrow lny = lne^{x^2} \Rightarrow \quad lny = x^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{lny}}.$$

$$V' = \int_a^b \pi.[f(y)]^2 dy = \int_1^e \pi\left(\sqrt{lny}\right)^2 dy = \int_1^e \pi lny dy \Rightarrow$$

$$V' = \pi y(lny - 1)\Big|_1^e = \pi.[e(1-1) - 1(-1)] = \pi \Rightarrow \boxed{V' = \pi}.$$

Esse é o volume gerado pela revolução da região compreendida entre a função e^{x^2},

$y = e$ e $x = 0$. Devemos, então, subtrair do cilindro externo gerado de raio 1 e altura e. Da seguinte maneira,

$$V = \underbrace{\pi.1^2.e}_{Cilindro} - \pi \Rightarrow \boxed{V = \pi(e-1)}.$$

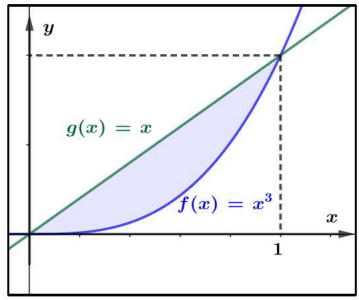
O método das camadas cilíndricas, para esse exemplo, foi mais prático.

2º exemplo: Calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação em torno do eixo y da região compreendida entre $f(x) = x^3$ e $g(x) = x$, no 1º quadrante.

Solução: Calculando a interseção das curvas:

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

O intervalo é $[0,1]$. A região está na figura ao lado.



$$V = \int_a^b 2\pi x[g(x) - f(x)]dx = \int_0^1 2\pi x[x - x^3]dx \Rightarrow$$

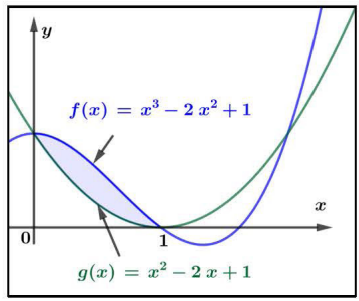
$$V = 2\pi \int_0^1 [x^2 - x^4]dx \Rightarrow V = 2\pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big]_0^1 \Rightarrow$$

$$V = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 2\pi\left(\frac{5-3}{15}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{4\pi}{15}u.v}.$$

Resolva utilizando o método dos discos e comprove o mesmo resultado.

3º exemplo: Calcular o volume de um sólido obtido a partir da rotação em torno do eixo y da região compreendida entre $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$, no intervalo $x = 0$ e $x = 1$.

Solução: Observe que não é possível aplicar o método dos discos, pois não há como escrever x em função de y nas funções. Vamos aplicar o método das camadas cilíndricas.



$$V = \int_a^b 2\pi x[f(x) - g(x)]dx$$

$$V = \int_0^1 2\pi x[x^3 - 2x^2 + 1 - (x^2 - 2x + 1)]dx$$

$$V = 2\pi \int_0^1 [x^3 - 2x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1\,]dx = 2\pi \int_0^1 [x^3 - 3x^2 + 2x\,]dx$$

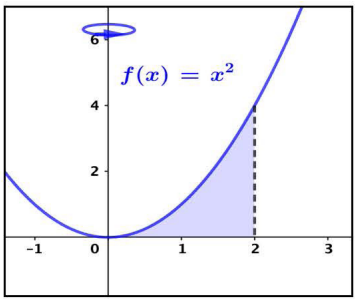
$$V = \pi\left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big]_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi}{2}u.v}.$$

Para a escolha entre o método dos discos e das camadas cilíndricas, vários fatores devem ser levados em conta. Entre eles, verifique em qual método é mais fácil encontrar os limites de integração (o intervalo). Também, considere qual método requer apenas uma integral para resolução ou qual método produz um integrando fácil (ou possível) de integrar.

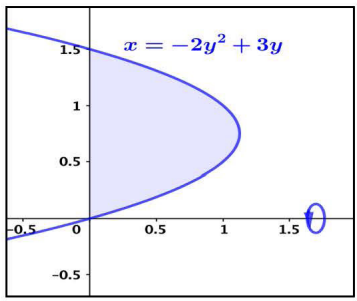
EXERCÍCIOS 21.10

1) Encontre o volume do sólido de revolução resultante da região sombreada quando gira em torno do eixo especificado. Use o método das camadas cilíndricas.

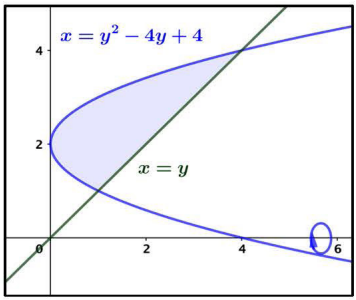
a)



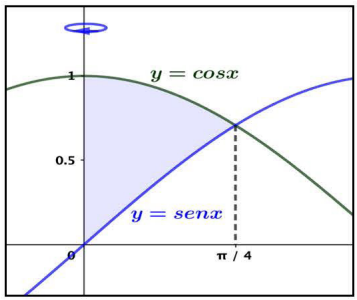
b)



c)



d)



2) Calcule o volume do sólido obtido a partir da rotação da região limitada pelas curvas em torno do eixo e intervalos especificados. Use o método que achar conveniente.

a) $y = x^3, y = x^2$ em torno do eixo y.

b) $y = lnx, y = 0$ e $x = e$ em torno do eixo x.

c) $y = \frac{1}{x}, y = -x + \frac{5}{2}$ em torno do eixo x.

d) $y = \frac{1}{x}, 2y = -x + 3$, em torno do eixo y.

3) Considere um sólido S obtido pela rotação da região compreendida entre a função e o eixo x no intervalo de $[0, 1]$, em torno do eixo y. Explique por que a solução é complicada para o método dos discos e prática para o método das camadas cilíndricas.

21.7. Integrais impróprias

Nesta seção, vamos estudar as integrais definidas que possuem intervalos infinitos ou que tenham alguma descontinuidade infinita dentro desse intervalo. Nesses casos, denominamos essas integrais como impróprias.

São basicamente dois casos a considerar:

- **Caso 1:** Integral imprópria com intervalo infinito.

Exemplos:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx\,;\ \int_{-\infty}^{0} e^x dx\,;\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$$

As integrais impróprias no **caso 1** são assim definidas e calculadas:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

Quando esses limites resultam em um número real, dizemos que a integral imprópria **converge** e o resultado desse limite é o valor da integral. Quando esses limites têm como resultado $+\infty$ ou $-\infty$, dizemos que integral imprópria **diverge** e não possui valor algum.

Exemplo: Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

Solução:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{x}\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) \Rightarrow \boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1}.$$

Vamos generalizar essa integral imprópria variando o expoente da variável x. Do seguinte modo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_1^b = \boxed{\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{-p+1}-1}{-p+1}\right]}.$$

Se $p>1$, então o expoente $-p+1$ é negativo e quando $b\to+\infty$ implica em $b^{-p+1}\to 0$, o que resulta no valor $\frac{1}{1-p}$.

Se $p < 1$, então o expoente $-p+1$ é positivo e o resultado da integral é $+\infty$, portanto, divergente.

Mas, se $p = 1$? Neste caso, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} lnx\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}[lnb - ln1] = +\infty\ (divergente).$$

Essa generalização demonstra o seguinte teorema.

Teorema 21.7.1:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1}, se\ p > 1 \\ diverge, se\ p \le 1 \end{cases}$$

Como o valor da integral representa a área entre a função e o eixo x no intervalo, pode-se pensar ocasionalmente que, se x tende a $+\infty$, então essa área também tende a $+\infty$. No entanto, esse teorema deixa claro que não é sempre o caso! Veja na figura 21.7.1 o comparativo entre as áreas que representam as integrais impróprias das duas funções $\frac{1}{x^2}$ e $\frac{1}{x}$ (no intervalo de 1 à $+\infty$) já calculadas. A primeira a área vale 1 $u.a$ (converge - área finita) e a segunda $+\infty$ (diverge – área infinita). Essa é a ideia por trás das integrais impróprias, verificar se a área compreendida entre a função e o eixo x, no intervalo indicado, é finita ou infinita.

2º exemplo: Calcule $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

Solução:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_c^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b \frac{1}{1+x^2}dx$$

Utilizando o método da substituição e escolhendo $c = 0$, encontramos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} arc\ tgx\Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} arc\ tgx\Big|_0^b \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}(\overbrace{arc\ tg0}^{0} - arc\ tga) + \lim_{b\to+\infty}(arc\ tgb - \overbrace{arc\ tg0}^{0}) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \underbrace{\lim_{a\to-\infty}(-arc\ tga)}_{\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\lim_{b\to+\infty}(arc\ tgb)}_{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi}.$$

Portanto, essa integral converge e área destacada na figura 21.7.2 vale $\pi\ u.a.$

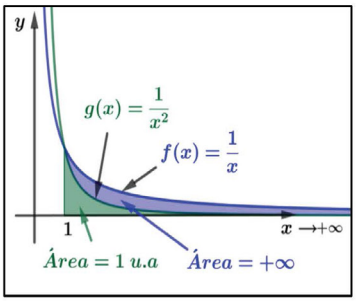


Figura 21.7.1

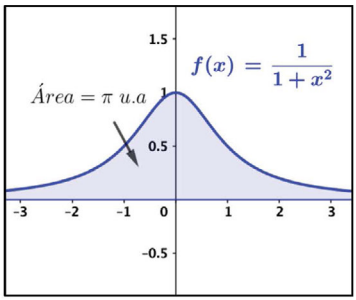


Figura 21.7.2

• **Caso 2:** Integral imprópria com descontinuidade infinita dentro do intervalo (integrando descontínuo).

Exemplos:

$$\int_1^3 \frac{1}{x-2}dx \; ; \int_0^1 lnxdx \; ; \int_0^{\pi/2} sec\, x\, dx.$$

As integrais impróprias no **caso 2** são assim definidas e calculadas:

• Se f for contínua em $[a,b)$ e descontínua em b:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx.$$

• Se f for contínua em $(a,b]$ e descontínua em a:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx.$$

Da mesma forma que ocorre com o caso 1, quando esses limites resultam em um número real, dizemos que a integral imprópria **converge**, caso contrário, **diverge.**

Caso f tenha uma descontinuidade em c $(a < c < b)$, podemos fazer

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Se as duas integrais impróprias do lado direito forem convergentes, então a integral do lado esquerdo será convergente. Se algumas das integrais do lado direito for divergente, então a integral do lado esquerdo será divergente.

Exemplo: Calcule $\int_0^1 lnxdx$.

Solução: Sabemos que não existe $ln0$, portanto, há uma descontinuidade na função nesse ponto. Aplicando a definição, temos

$$\int_0^1 lnxdx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 lnxdx = \lim_{t\to 0^+} lnx.x - x\Big]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}[ln1.1 - 1 - (lnt.t - t)]$$

Na expressão $lnt.t$, tem-se uma indeterminação $-\infty \times 0$. Aplicando a Regra de L'Hôspital nessa expressão, encontramos

$$\lim_{t\to 0^+}(lnt.t) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{lnt}{1/t}\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1/t}{-1/t^2}\right) = \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0.$$

Derivando o numerador e o denominador.

Dessa forma,

$$\int_0^1 lnxdx = \lim_{t\to 0^+}\left(\overset{0}{\overbrace{t}} - 1 - \overset{0}{\overbrace{lnt.t}}\right) \Rightarrow \boxed{\int_0^1 lnxdx = -1}\ (convergente).$$

O valor negativo é devido a área estar abaixo do eixo x (ver figura 21.7.3).

2º exemplo: Calcule $\int_1^3 \frac{1}{x-2}dx$.

Solução: Há uma descontinuidade na função no ponto $x = 2$. E como $1 < 2 < 3$, vamos dividir o intervalo da integral em duas partes, seguindo a definição do caso 2.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx.$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x-2}dx = \int_1^2 \frac{1}{x-2}dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}dx.$$

Resolvendo a primeira integral do lado direito, encontramos

$$\int_1^2 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{1}{x-2}dx = \lim_{t\to 2^-}[ln|x-2|]\Big]_1^t = \lim_{t\to 2^-}[ln|t-2| - ln|-1|] = -\infty.$$

Como uma das integrais diverge, a integral imprópria proposta é divergente, não sendo necessário calcular a outra integral.

A área infinita que representa a integral está destacada na figura 21.7.4.

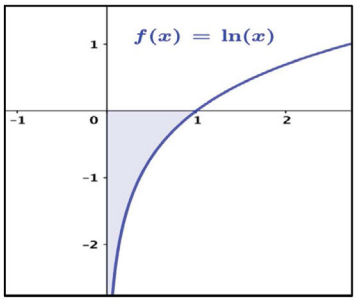


Figura 21.7.3

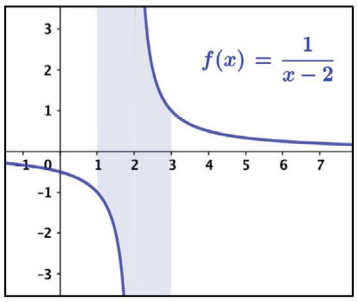


Figura 21.7.4

EXERCÍCIOS 21.11

1) Calcule as integrais impróprias caso sejam convergentes.

a) $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$

b) $\int_{1}^{5} \frac{1}{x-3}\,dx$

c) $\int_{0}^{\pi/2} sec\ x\,dx$

d) $\int_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

e) $\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

f) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx$

g) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

h) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$

i) $\int_{0}^{+\infty} tg\ x\,dx$

j) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

k) $\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{5^x}\,dx$

l) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{cosx}{\sqrt{senx}}\,dx$

m) $\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx$

n) $\int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

o) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$

p) $\int_{1}^{+\infty} \frac{lnx}{x^2}\,dx$

2) Calcule as integrais impróprias.

a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

b) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$

d) $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

e) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

f) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$

3) Na questão anterior, a integral imprópria do item "c)" é a contabilização da área negativa do item "a)" com a área positiva do item "b)", como são iguais em módulo, o resultado do item "c)" foi zero. Isso pode ser observado no gráfico dessa função na figura 21.7.5. De forma semelhante, a integral imprópria do item "f)" também é a contabilização da área negativa e positiva, respectivamente, das integrais impróprias do itens "d)" e "e)". E pelo gráfico da função na figura 21.7.6, essas são também iguais em módulo. Explique por que no item "f)" a integral imprópria não pode ser entendida como zero.

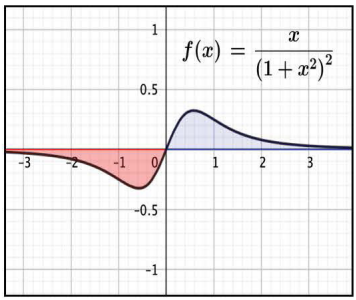


Figura 21.7.5

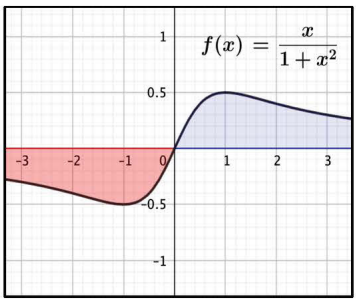


Figura 21.7.6

21.8. Integração numérica aproximada

Existem duas situações em que é impossível calcular o valor exato de uma integral definida. A primeira é que nem sempre uma integral apresenta como primitiva uma função elementar. Perceba que é impossível encontrar as primitivas das integrais definidas a seguir, mesmo aplicando todas as técnicas de integração possíveis:

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\,,\int_0^2 e^{e^x}dx\,,\int_3^5 ln\,(lnx)dx\,,\int_0^1 \sqrt{1-x^6}dx$$

A segunda, pode acontecer em um determinado experimento científico, onde nem sempre, para os dados coletados, existirá uma função que se ajusta aos dados.

Não obstante, em ambos os casos, podemos encontrar um valor numérico aproximado para essas integrais. E uma das formas é utilizar o método dos retângulos, que já foi visto na introdução dessa unidade, ou outros métodos mais sofisticados como a regra do ponto médio, trapézio, Simpson ou polinômio de Taylor, que são mais eficientes, propostos ao longo dessa seção.

21.8.1. Regra do ponto médio

Essa regra consiste em dividir a área a ser calculada em retângulos de bases iguais e altura correspondente a ordenada da média aritmética das abscissas.

$$\int_a^b f(x)dx \cong M_n = \Delta x\,[f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + f(\overline{x_3}) \ldots + f(\overline{x_n})].$$

Onde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, n é quantidade de retângulos e $\overline{x_i} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$ (ponto médio).

Como exemplo para essa regra (e todas as demais), iremos calcular a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

Na figura 21.8.1.1, decidiu-se dividir a área no intervalo de $x = 1$ a $x = 2$, em $n = 4$ retângulos. Quanto maior for a quantidade n desses retângulos maior será a aproximação do valor correto da integral. Desse modo,

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

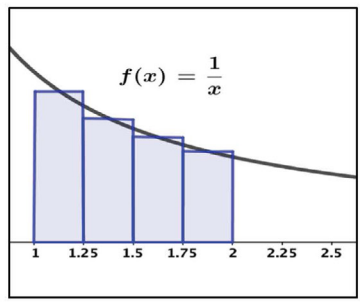


Figura 21.8.1.1

A altura de cada retângulo é o valor de $f(x)$ no ponto médio: $\overline{x_i} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. Logo,

$$f(\overline{x_1}) = f\left(\frac{1+1{,}25}{2}\right) = f(1{,}125);\ f(\overline{x_2}) = f\left(\frac{1{,}25+1{,}5}{2}\right) = f(1{,}375).$$

$$f(\overline{x_3}) = f\left(\frac{1{,}5+1{,}75}{2}\right) = f(1{,}625);\ f(\overline{x_3}) = f\left(\frac{1{,}75+2}{2}\right) = f(1{,}875).$$

E o valor aproximado da integral é

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong 0{,}25.[f(1{,}125) + f(1{,}375) + f(1{,}625) + f(1{,}875)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong 0{,}25.\left[\frac{1}{1{,}125} + \frac{1}{1{,}375} + \frac{1}{1{,}625} + \frac{1}{1{,}875}\right]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong 0{,}25.2{,}76488 \Rightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong 0{,}69122}.$$

21.8.2. Regra do trapézio

Essa regra consiste em dividir o intervalo em trapézios de base maior $f(x_i)$, base menor $f(x_{i-1})$ e altura igual a $\Delta x = x_{i-1} - x_i$.

$$\int_a^b f(x)dx \cong T_n = \frac{\Delta x}{2}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) \ldots + f(x_n)]$$

Onde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, n é quantidade de trapézios e $\overline{x_i} = a + i.\Delta x$.

Calculando novamente a integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ com o mesmo número $n = 4$, só que agora de trapézios, conforme a figura 21.8.2.1.

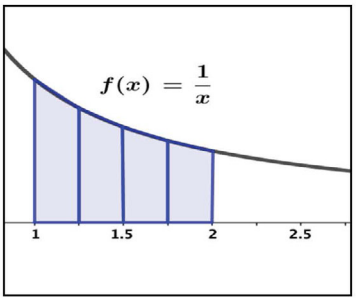


Figura 21.8.2.1

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$\overline{x_i} = a + i.\Delta x = 1 + i.0{,}25 \Rightarrow$$

$$x_0 = 1;\ x_1 = 1{,}25;\ x_2 = 1{,}5;\ x_3 = 1{,}75\ e\ \ x_4 = 2\ .$$

O valor da integral aproximada é

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{2}.[f(1) + 2f(1{,}25) + 2f(1{,}5) + 2f(1{,}75) + f(2)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{2}.[1 + 1{,}6 + 1{,}333 + 1{,}142857 + 0{,}5]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{2}.[5{,}57619] \cong 0{,}697024 \Rightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong 0{,}697024}.$$

21.8.3. Regra de Simpson

Na regra de Simpson[13] a soma S_n consiste no uso de parábolas ao invés de segmentos. Sua regra é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \cong S_n = \frac{\Delta x}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + f(x_n)].$$

Onde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e n é par.

Resolvendo o mesmo exemplo anterior para o mesmo $n = 4$, temos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{3}.[f(1) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{3}.[f(1) + 4f(1{,}25) + 2f(1{,}5) + 4f(1{,}75) + f(2)]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{3}.[1 + 3{,}2 + 1{,}333 + 2{,}285714 + 0{,}5]$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \frac{0{,}25}{3}.[8{,}319048] \Rightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong 0{,}693254}.$$

Agora, vamos comparar o valor das três regras anteriores já calculadas com o valor correto da integral.

O valor correto é:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \ ln\,|x|\Big]_1^2 = ln2 - ln1 = \boxed{ln2 = 0{,}693147}.$$

O valor da regra do ponto médio foi $M_4 = 0{,}69122$, diferença: $0{,}001927$.

O valor da regra do trapézio foi $T_4 = 0{,}697024$, diferença: $-0{,}00388$.

O valor da regra de Simpson foi $S_4 = 0{,}697024$, diferença: $0{,}00011$.

As aproximações utilizando a regra de Simpson foram melhores que as regras do ponto médio e do trapézio. De uma forma geral, isso sempre acontece pelo fato da regra de Simpson ser a média ponderada das regras do ponto médio e do trapézio.

Não faz sentido deduzir aproximações de uma integral fácil de calcular como a $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ utilizada como exemplo. O objetivo dessa escolha é apenas para comparar e mostrar a eficácia das aproximações dos métodos (das regras) quando a integral não possuir primitiva elementar, como o 2º exemplo da subseção a seguir.

[13] Thomas Simpson (1710-1761).

21.8.4. Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor[14] nos fornece também uma aproximação de integrais definidas. A ideia principal é encontrar um polinômio P de grau n que melhor se aproxime da função em uma vizinhança x_0 (próxima) e a partir dessa função polinomial encontrar a integral definida.

Definição 21.8.4.1: Seja f uma função n vezes derivável em x_0, então o enésimo polinômio de Taylor de f em torno de x_0 é dado por:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!} \ldots + \frac{f^n(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

Como exemplo, vamos calcular o terceiro polinômio de Taylor ($n=3$) da função $f(x)=\frac{1}{x}$ em uma vizinhança $x_0 = 1$.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \Rightarrow f'''(1) = -6$$

$$P_3(x) \cong f(x) = \frac{1}{x} \cong 1 - 1(x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$$

$$P_3(x) \cong f(x) = \frac{1}{x} \cong 1 - x + 1 + x^2 - 2x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x - 1$$

$$\boxed{P_3(x) \cong f(x) = \frac{1}{x} \cong -x^3 + 4x^2 - 6x + 4}$$

Calculando a integral utilizando esse polinômio, encontramos:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong \int_1^2 -x^3 + 4x^2 - 6x + 4 \; dx \Rightarrow$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \cong -\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - 3x^2 + 4x\Big]_1^2 \cong \frac{7}{12} \cong 0{,}5833.$$

A diferença desse valor para o correto ($ln2 = 0{,}693147$) deve-se ao fato do polinômio de Taylor representar a função em vizinhança próxima de 1 e, além disso, foi utilizado o fator n apenas até o 3. Veja na figura 21.8.4.1 a aproximação da função com o polinômio $P_3(x)$ no ponto $x = 1$.

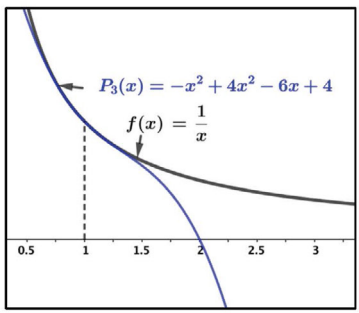


Figura 21.8.4.1

[14] Brook Taylor (1685-1731)

2º exemplo: Sabemos que $\int_0^1 e^{x^2}dx$ não possui como primitiva um função elementar. Vamos calcular seu valor numérico aproximado usando a regra de Simpson para $n = 10$ e o polinômio de Taylor para uma vizinhança próxima de 0.

Solução: Utilizando a regra de Simpson: $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$.

$$\int_a^b f(x)dx \cong S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + f(x_n)]$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \cong \frac{0{,}1}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + \cdots + f(1)]$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \cong \frac{0{,}1}{3}[1 + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + \cdots + f(1)]$$

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \cong \frac{0{,}1}{3}[43{,}88044] \Rightarrow \boxed{\int_0^1 e^{x^2}dx \cong 1{,}462681}.$$

Utilizando o polinômio de Taylor para $f(x) = e^{x^2}$ em uma vizinhança $x_0 = 0$.

$f'(x) = e^{x^2}.2x \Rightarrow f'(0) = 0$

$f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2.e^{x^2} \Rightarrow f''(0) = 2$

$f'''(x) = 8xe^{x^2} + e^{x^2}.2x.4x^2 + 2.e^{x^2}.2x \Rightarrow f''(0) = 0 \;\; e\, f^4(0) = 12.$

$$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} \ldots + \frac{f^n(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

$$P_4(x) = f(x) = e^{x^2} \cong 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{12}{4!}x^4 \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{x^2} \cong 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4}.$$

Desse modo,

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \cong \int_0^1 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4dx \cong \frac{43}{30} \cong 1{,}433\ldots \Rightarrow \boxed{\int_0^1 e^{x^2}dx \cong 1{,}433}.$$

Na figura 21.8.4.2 está o cálculo da área realizado pelo software geogebra, bem próximo dos valores anteriores. Veja como calcular essa área usando esse software na seção 21.9 a seguir.

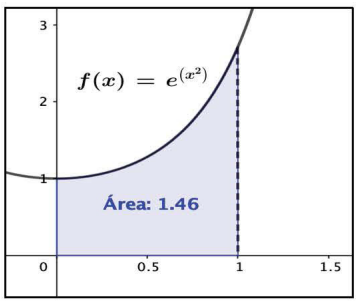


Figura 21.8.4.2

A seguir está um exemplo que representa a última situação, que é o caso em que um experimento científico pode não ter uma função que se ajusta aos dados.

3º exemplo: O escoamento da produção de soja de uma propriedade em toneladas de grãos por hora, estão na tabela a seguir:

Escoamento (ton. Grãos/ hora)	2	1	0,5	0,3	0,2	0,1	0
Tempo(h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Estime utilizando a regra de Simpson o total de grãos escoados nas 3 primeiras horas.

Solução: A velocidade de produção (ton. Grãos/h) está variando ao longo do tempo em intervalos de 0,5 h. A integral dessa velocidade nos dá o escoamento (ton. Grãos). No entanto, os dados não representam uma função elementar para que possamos integrar (verifique!). Assim, usaremos o método de Simpson proposto para estimar o escoamento.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = 0{,}5 \Rightarrow n = 6.$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong S_n = \frac{\Delta x}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) \ldots + f(x_n)\right]$$

$$S_6 \cong \frac{0{,}5}{3}\left[f(0) + 4f(0{,}5) + 2f(1) + 4f(1{,}5) + 2f(2) + 4f(2{,}5) + f(3)\right]$$

$$S_6 \cong \frac{0{,}5}{3}\left[2 + 4.1 + 2.0{,}5 + 4.0{,}3 + 2.0{,}2 + 4.0{,}1 + 0\right]$$

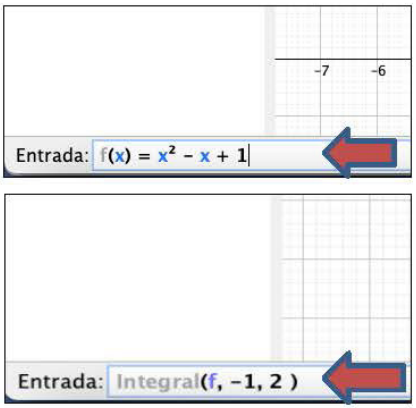
$$S_6 \cong \frac{0{,}5}{3}\left[2 + 4 + 1 + 1{,}2 + 0{,}4 + 0{,}4\right] \Rightarrow S_6 \cong \frac{0{,}5}{3}\left[9\right] \Rightarrow \boxed{S_6 \cong 1{,}5\ toneladas}.$$

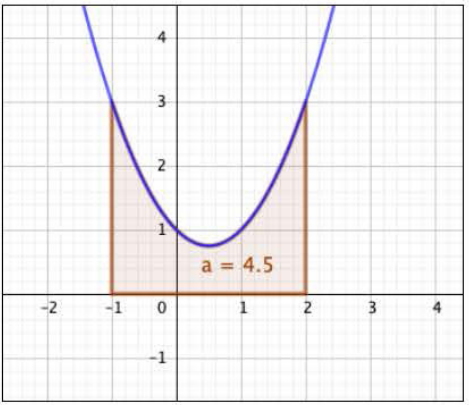
21.9. Cálculo de integrais utilizando o geogebra

- **Cálculo de área (integral definida) entre a função e o eixo x.**

Como exemplo, calcularemos $\int_{-1}^{2} x^2 - x + 1\, dx$.

Digite a função $x^2 - x + 1$ no campo de entrada do software. Em seguida digite: "integral(f,-1,2)" e tecle enter. A tela de visualização do software mostrará a área entre a função e o eixo x e o seu valor.



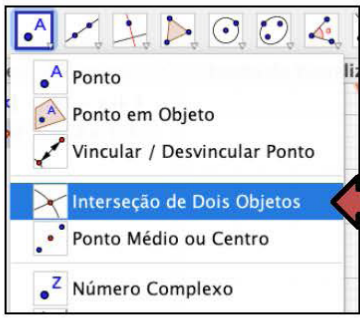


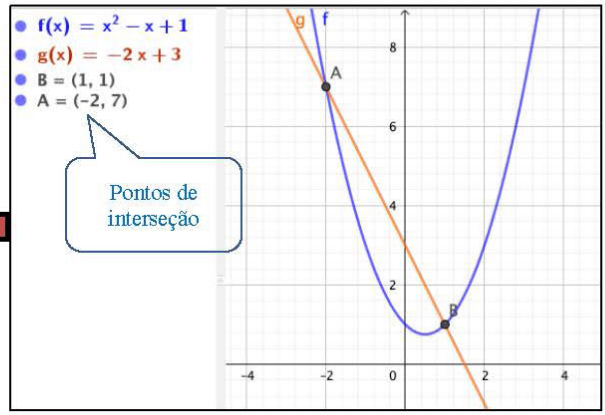
- **Cálculo de área entre funções.**

Como exemplo, calcularemos a área entre as funções $f(x) = x^2 - x + 1$ e $g(x) = -2x + 3$.

Digite a função no campo de entrada do software as duas funções.

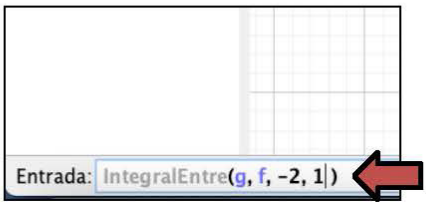
- Calcule os pontos de interseção da função ou use a ferramenta "interseção de dois objetos" do software, conforme a seguir.



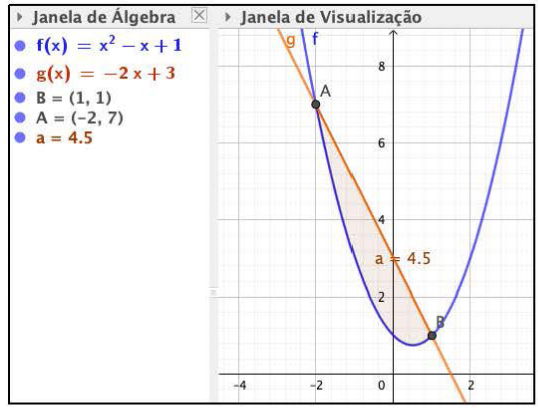


Após a seleção dessa ferramenta clique na parábola e na reta, depois disso, o software mostrará os pontos de interseção, conforme a ilustração.

Os pontos de inserção são $x = -2$ e $x = 1$. Digite no campo de entrada: "integralentre(g,f,-2,1)" e tecle enter (conforme a imagem a seguir):



A tela de visualização do software destacará a área entre as funções e o seu valor a=4.5, conforme a ilustração:

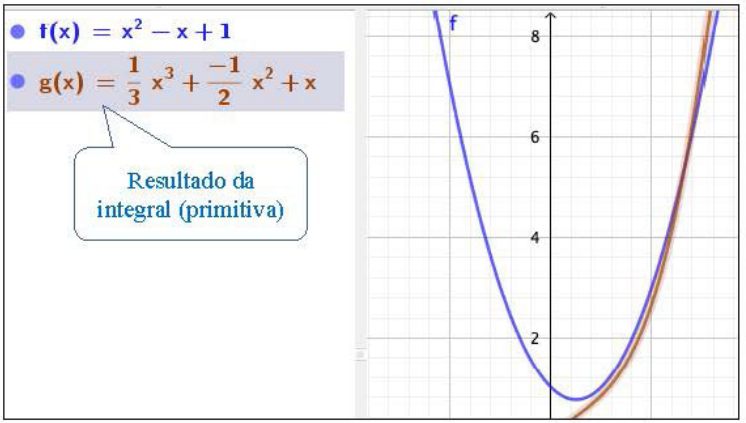


- **Cálculo de integral indefinida (primitiva).**

Como exemplo, calcularemos a integral $\int x^2 - x + 1 \, dx$.

- Digite a função no campo de entrada do software: $f(x) = x^2 - x + 1$.
- Em seguida, digite: "integral(f)".

- Após o enter, o softwares mostrará a função $g(x)$ resultado da integral indefinida, conforme a ilustração a seguir.



EXERCÍCIOS 21.12

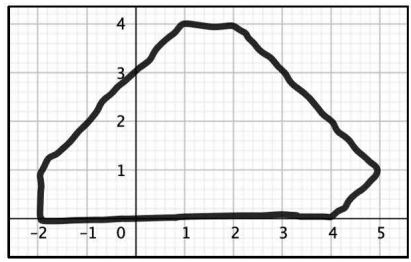
1)Calcule o valor aproximado da área entre função $f(x) = e^{-x}$ e o eixo x, no intervalo de 0 à 3. Use a regra do ponto médio, do trapézio e de Simpson, para $n = 6$ e compare com o valor exato (calculando a integral pela primitiva). Qual dos métodos (regras) mais se aproximou do valor exato?

2)Calcule o quarto polinômio de Taylor $(n = 3)$ para a função $f(x) = e^{-x}$ em uma vizinhança $x_0 = 0$. Use esse polinômio para calcular o valor aproximado de e^{-1}.

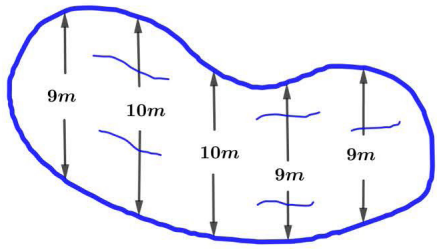
3)A integral $\int_3^5 ln\,(lnx)dx$ não possui uma função elementar como primitiva. Estime o seu valor usando a regra de Simpson para $n = 10$.

4)A integral $\int_0^1 sen(x^2)dx$ não possui uma função elementar como primitiva. Estime o seu valor usando a regra do trapézio dividindo o intervalo em cinco partes.

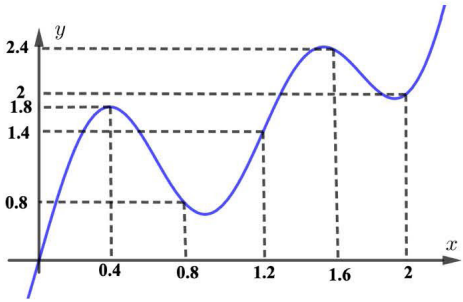
5)Uma fazenda está representa no mapa a seguir de escala 1:10000000. Sabendo que as medidas do mapa estão em centímetros, use a regra dos trapézios em intervalos de 1 centímetro para estimar a área dessa fazenda.



6)A verificação da viabilidade de um projeto de irrigação de uma cultura, está ligado ao volume de água disponível em um lago próximo a plantação. O lago, que possui profundidade de 1 metro, foi medido horizontalmente a cada 4 metros, obtendo as medidas verticais que estão na figura. Qual o seu volume de água em m³?

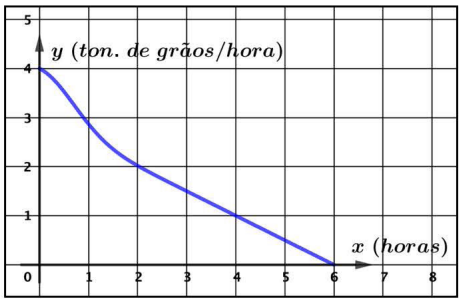


7)O gráfico a seguir mostra a relação entre as grandezas y e x de um experimento. Calcule o valor aproximado de $\int_0^2 ydx$ usando a regra do trapézio para $n = 5$.



8) O escoamento da produção em toneladas de grãos por hora de uma propriedade em toneladas está representada no gráfico a seguir.

Estime utilizando a regra de Simpson para $n = 6$ o total de grãos escoados nesse intervalo de tempo.



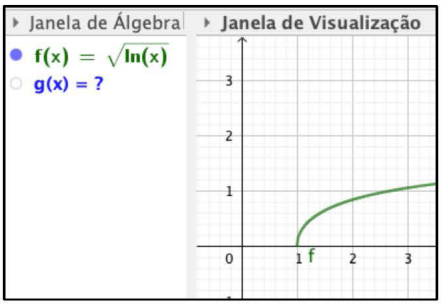
9)Por questões técnicas, uma operador precisar variar a velocidade de uma colhedora de acordo com o tipo de grãos plantado. Os dados estão a seguir:

Velocidade (km/h)	0	2	20	56
Tempo(h)	0	4	7	12

Estime utilizando a regra de Simpson a distância percorrida pela colhedora.

10) Explique por que o software geogebra não calcula a integral indefinida (a primitiva) da função $f(x) = \sqrt{lnx}$.

Veja a ilustração do resultado apresentado pelo software:



21.10. Aplicações de integral

Nesta seção, vamos estudar a aplicação da integral em diversas ciências, inclusive em ciências agrárias.

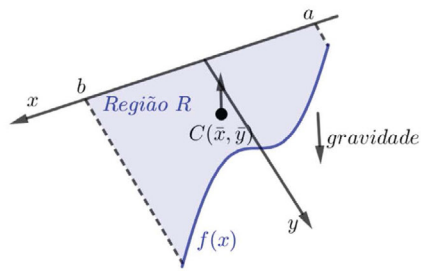
21.10.1. Centro de gravidade (centroide)

Suponha uma lâmina de espessura desprezível e homogênea (ou seja, que possui massa inteiramente uniforme em toda sua composição) cuja região R esteja num plano horizontal xy. E seja uma força gravitacional agindo verticalmente sobre ela. Existe um ponto $C(\overline{x},\overline{y})$ denominado de centroide, tal que o efeito da gravidade nesse ponto é equivalente à de uma só força, que agindo nesse ponto ($C \in R$) em sentido contrário, equilibra horizontalmente a lâmina. A esse ponto denominamos de **centro de gravidade**.

O Calculo de $C(\overline{x},\overline{y})$ é dado por:

$$\overline{x} = \frac{1}{área\ de\ R}\int_a^b xf(x)dx.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{área\ de\ R}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2dx.$$



A área de R é dada por

$$Área\ R = \int_a^b f(x)dx.$$

Se a região R for entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$, temos

$$\overline{x} = \frac{1}{área\ de\ R}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx.$$

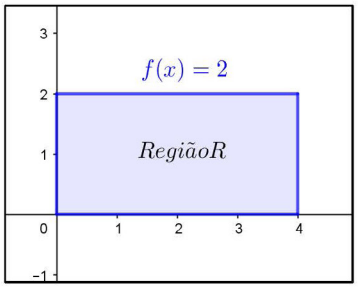
$$\overline{y} = \frac{1}{área\ de\ R}\int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx.$$

A área de R é dada por

$$W = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exemplo: Podemos conjecturar que o centroide (o ponto de equilíbrio) de um retângulo de lado 4cm e 2cm, conforme a figura a seguir é (2, 1). Vamos confirmar usando o centro de gravidade.

Solução: A área de R é 4x2 = 8 (não precisou usar integral). Claramente a função do lado superior do retângulo é dada por $f(x) = 2$ e o limites serão 0 e 4. Assim,



$$\overline{x} = \frac{1}{\text{área } R}\int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{8}\int_0^4 2xdx \Rightarrow$$

$$\overline{x} = \frac{1}{8}.\frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \frac{4^2}{8} \Rightarrow \boxed{\overline{x} = 2}.$$

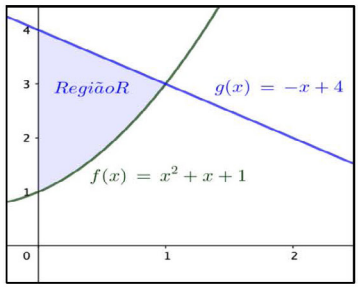
$$\overline{y} = \frac{1}{\text{área de } R}\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)]^2dx = \frac{1}{8}\int_0^4 \frac{1}{2}[2]^2dx \Rightarrow$$

$$\overline{y} = \frac{1}{8}\int_0^4 2dx = \frac{1}{4}\int_0^4 xdx = \frac{1}{4}.x\Big]_0^4 = \frac{4}{4} \Rightarrow \boxed{\overline{y} = 1}.$$

De fato, C é (2,1).

2º exemplo: Calcular o centroide da região R limitada pelas funções $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = -x + 4$.

Solução: O ponto de intersecção das duas funções é $x = 1$. E a área R é



$$\text{Área de } R = \int_0^1 [-x + 4 - (x^2 + x + 1)]dx \Rightarrow$$

$$\text{Área de } R = \int_0^1 [-x + 4 - x^2 - x - 1]dx \Rightarrow$$

$$\text{Área de } R = \int_0^1 [-x^2 - 2x + 3]dx \Rightarrow$$

$$\text{Área de } R = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\Big]_0^1 \Rightarrow$$

$$-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3.1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\text{Área de } R = \frac{5}{3}}.$$

$$\overline{x} = \frac{1}{\text{área de } R}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx = \frac{1}{5/3}\int_0^1 x[-x + 4 - (x^2 + x + 1)]dx \Rightarrow$$

$$\overline{x} = \frac{3}{5}\int_0^1 x[-x^2 - 2x + 3]dx = \frac{3}{5}\int_0^1 [-x^3 - 2x^2 + 3x]dx \Rightarrow$$

$$-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Big]_0^1 = -\frac{1^4}{4} - \frac{2.1^3}{3} + \frac{3.1^2}{2} \Rightarrow \boxed{\overline{x} = \frac{7}{12} \cong 0{,}58}.$$

$$\overline{y} = \frac{1}{\text{área de } R}\int_a^b \frac{1}{2}\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx$$

$$\overline{y} = \frac{1}{5/3}\int_0^1 \frac{1}{2}\{[-x + 4]^2 - [x^2 + x + 1]^2\}dx$$

$$\overline{y} = \frac{3}{5}\int_0^1 \frac{1}{2}\{x^2 - 8x + 16 - [x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1]\}dx$$

$$\bar{y} = \frac{3}{5}\int_0^1 \frac{1}{2}\{-x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 10x + 15\}dx$$

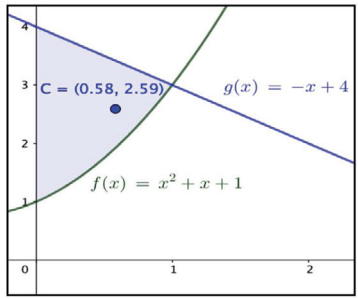
$$\frac{3}{5}.\frac{1}{2}.\left\{\frac{-x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{10x^2}{2} + 15x\right\}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10}.\left\{\frac{-1^5}{5} - \frac{2.1^4}{4} - \frac{2.1^3}{3} - \frac{10.1^2}{2} + 15.1\right\}$$

$$\bar{y} = \frac{3}{10}\left\{\frac{259}{30}\right\} = \frac{777}{300} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 2{,}59}.$$

Resposta: C(0,58 ; 2,59).

Esse ponto está representado na figura ao lado.



21.10.2. Energia e trabalho

Na Física, a grandeza trabalho está relacionada a força e a distância. Exemplos:

- Empurrar um livro sobre uma mesa a uma distância d;
- Puxar uma mola de um ponto a um ponto b;
- Carregar um objeto de um lugar (ponto a) para outro (ponto b);
- Empurrar um carro a uma distância d.

Nesse contexto, quanto maior for a força exercida, maior será o trabalho, e quanto maior for a distância d, também maior será o trabalho (grandezas diretamente proporcionais). Isto é

$$W = F.d.$$

Agora, imaginemos uma força variável aplicada sobre um objeto, na direção do movimento e sobre o eixo x, provocando seu deslocamento do ponto $x = a$ ao ponto $x = b$. Podemos dividir esse deslocamento em n subintervalos e o trabalho realizado, no i-ésimo intervalo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, pode ser aproximado por

$$W \cong F(x^*{}_i).\Delta x_i.$$

Somando essa aproximações, obtemos a soma de Riemann:

$$W = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F(x^*{}_i).\Delta x_i \Rightarrow W = \int_a^b F(x)dx.$$

Conclusão: O trabalho realizado por uma força variável $F(x)$ em um deslocamento do ponto $x = a$ ao ponto $x = b$ é a integral:

$$\boxed{W = \int_a^b F(x)dx.}$$

Como exemplo dessa aplicação, podemos citar a lei de Hooke[15] empregada em uma mola esticada em x unidades, que é dada por $F = kx$, onde k é uma constante da mola. O trabalho realizado pela mola é

$$W = \int_a^b kxdx \Rightarrow W = \frac{kx^2}{2}\Big]_a^b.$$

Fórmula bastante conhecida da Física no ensino médio.

Exemplo: Calcule o trabalho e a força exercida por uma mola de constante $k = 2N/m$ foi esticada $k = 1m$ além do seu comprimento natural.

Solução:

$$F = kx \Rightarrow F = 2.1 \Rightarrow F = 2N.$$

$$W = \int_0^1 2dx \Rightarrow W = 2x\Big]_0^1 \Rightarrow W = 2\ joules.$$

Ainda na Física, a segunda lei de Newton afirma que se um objeto de massa m for submetido a uma força F, então o objeto adquire uma aceleração conforme a equação

$$\boxed{F = m.a}.$$

Conforme vimos na seção de aplicação de derivada, a derivada da velocidade em relação ao tempo é a aceleração: $V'(t) = a$. Logo,

$$F = m.V'(t).$$

Se $x = x(t) \Rightarrow dx = x'(t)dt$, substituindo em

$$W = \int_a^b F(x)dx,$$

obtemos:

$$W = \int_a^b F(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} m.V'(t).\overbrace{x'(t)}^{v(t)}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} m.V'(t).V(t)dt.$$

Porém, $V = V(t) \Rightarrow dV = V'(t)dt$ e com isso

$$W = \int_{V_0}^{V_1} m.V.dv \Rightarrow W = m.\frac{V^2}{2}\Big]_{V_0}^{V_1} \Rightarrow$$

$$\boxed{W = m.\frac{V_1^{\,2}}{2} - m.\frac{V_2^{\,2}}{2}.}$$

Pesquise sobre essa fórmula nos livros de Física (cinemática) do ensino médio.

Fisicamente a expressão $m.\frac{V^2}{2}$ representa a energia cinética do movimento. Isso posto, o trabalho de uma força é dada pela variação da energia cinética. Essa concepção em Física é denominada de teorema da energia cinética.

[15] Robert Hooke (1635-1703)

21.10.3. Lei de resfriamento de Newton

A lei de resfriamento de Newton diz que se um objeto quente for colocado em um ambiente frio, esse resfriará a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o ambiente. A afirmação em forma de equação é a seguinte

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a).$$

$\frac{dT}{dt}$ – é a taxa de variação da temperatura ou velocidade de resfriamento;

T – é a temperatura do objeto;

T_a – é a temperatura do ambiente;

k – constante do material do objeto.

Se o corpo apresentar temperatura inicial T_0, temos

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \Rightarrow \frac{dT(T_0 - T_a)}{(T - T_a)} = kdt \Rightarrow$$

$$\int_a^b \frac{dT\overbrace{(T_0 - T_a)}^{constante}}{(T - T_a)} = \int_a^b kdt \Rightarrow ln\left|\frac{T - T_a}{T_0 - T_a}\right| = kt \Rightarrow$$

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = e^{kt} \Rightarrow T - T_a = (T_0 - T_a).e^{kt} \Rightarrow \boxed{T = T_a + (T_0 - T_a).e^{kt}.}$$

Exemplo: Um corpo inicialmente a 80°C é posto em um ambiente de temperatura constante de 20°C. Sabendo que após 5 minutos o corpo está a 40°C, em quanto tempo ele estará a 30°C?

Solução:

$$T = T_a + (T_0 - T_a).e^{kt}$$

$$40 = 20 + (80 - 20).e^{k.5}$$

$$20 = 60.e^{k.5} \Rightarrow \frac{20}{60} = e^{5k} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{5k} \Rightarrow ln\frac{1}{3} = lne^{5k} \Rightarrow$$

$$ln\frac{1}{3} = 5k \Rightarrow -1{,}09861 = 5k \Rightarrow k = -\frac{1{,}09861}{5} \Rightarrow \boxed{k = -0{,}21972}.$$

Assim a função é

$$\boxed{T = 20 + 60.e^{-0{,}21972.t}}.$$

Substituindo $T = 30$, temos

$$30 = 20 + 60.e^{-0{,}21972.t} \Rightarrow 30 - 20 = 60.e^{-0{,}21972.t}$$

$$10 = 60.e^{-0{,}21972.t} \Rightarrow \frac{10}{60} = e^{-0{,}21972.t} \Rightarrow$$

$$ln\frac{1}{6} = ln\, e^{-0{,}21972.t} \Rightarrow -1{,}79176 = -0{,}21972.t \Rightarrow \boxed{t \cong 8{,}15\ min}.$$

21.10.4. Teorema do valor médio para as integrais (TVMI)

Teorema 21.10.4.1 (Teorema do valor médio para integrais-TVMI): Seja f uma função contínua em $[a,b]$, então existe pelo menos um valor de c do intervalo (a,b) tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Demonstração: De acordo com teorema 20.5.2.3 (teorema do valor médio-TVM), se uma função F é contínua em $[c,d]$ e derivável em (c,d), então existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c)$. Como $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, podemos dividir tudo por $b-a$ e com isso comprovar que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c).$$

Esse teorema afirma, do ponto de vista geométrico, que existe um ponto c no intervalo $[a,b]$, tal que a área entre a função e o eixo x (a integral) é igual a área de um retângulo de medidas $b-a$ e $f(c)$, como ilustrado na figura 21.10.4.1.

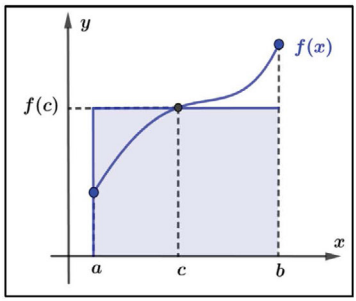


Figura 21.10.4.1

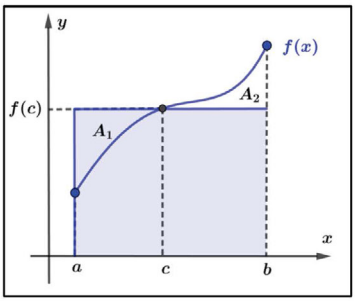


Figura 21.10.4.2

Vamos mostrar que as áreas A_1 e A_2 da figura 21.10.4.2 são equivalentes. Nessa figura, vemos que a área entre a função e o eixo x (a integral definida) é igual à área do retângulo de altura $f(c)$ e base $b-a$, mais a área A_2, menos a área A_1, matematicamente:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\substack{\text{área entre a função} \\ \text{e o eixo x}}} = \underbrace{f(c).(b-a)}_{\text{área do retângulo}} + A_2 - A_1.$$

Como a área entre a função e o eixo x, e a área do retângulo são equivalentes no ponto c, concluímos que $A_1 = A_2$.

Além dessa visão geométrica, podemos demonstrar que o valor $f(c)$ do TVMI é também o valor médio de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$. Para isso, vamos dividir a área que representa a integral em n retângulos de base iguais a Δx, tomando $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ tão pequeno quanto se deseje. Nessa conjuntura, se f_m a média aritmética de todas as imagens $f(x_n{}^*)$, então

$$f_m = \frac{f(x_1{}^*) + f(x_2{}^*) + f(x_3{}^*) \dots f(x_n{}^*)}{n}.$$

Mas, $n = \frac{b-a}{\Delta x}$ e área de cada retângulo é $f(x_n{}^*).\Delta x$. Logo,

$$f_m = \frac{f[(x_1{}^*) + f(x_2{}^*) + f(x_3{}^*) \dots f(x_n{}^*)]\Delta x}{b-a}.$$

Aplicando o limite $n \to \infty$, concluímos que

$$f_m = \frac{1}{b-a}\left(lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_n{}^*).\Delta x\right) \Rightarrow f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\,.$$

Vale ressaltar que o valor médio f_m calculado na forma acima, conforme a demonstração, representa a média aritmética de infinitos valores de $f(x)$.

Exemplo: Considerando que a produção de grãos (em toneladas) de uma propriedade foi modelada pela função $P(x) = 0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 + 2x$, sendo x em hectares de área plantada. Qual a média de produção dessa propriedade que possui 10 hectares de área plantada?

Solução:

$$f_m = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} (0{,}5x^3 - 0{,}5x^2 + 2x)dx$$

$$f_m = \frac{1}{10}\left(\frac{0{,}5x^4}{4} - \frac{0{,}5x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^{10}$$

$$f_m = \frac{1}{10}\left(\frac{0{,}5.10^4}{4} - \frac{0{,}5.10^3}{3} + 10^2\right) \Rightarrow \boxed{f_m = 118{,}33}.$$

Esse valor está representado na figura 21.10.4.3.

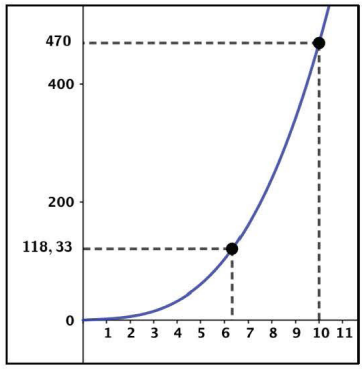


Figura 21.10.4.3

Para comprovar que esse é o valor médio para função em infinitos valores, foi feito um cálculo com a ajuda de um computador. Utilizando intervalos de 0.1 (ou seja 0;0,1;0,2;0,3;...10) e considerando 100 valores, encontrou-se uma média de 119,5, bem próxima do valor médio mencionado anteriormente.

21.10.5. Aplicação em matemática financeira

Estudamos em Matemática financeira, especificamente em juros compostos (subseção 3.3.2 – volume 1), a seguinte fórmula exponencial

$$\boxed{M = C(1+i)^t}.$$

Onde M é o montante, C o capital, i a taxa de juros e t o período (o tempo).

Exemplo: Um capital de R$ 5.000,00 é aplicado em fundo de investimento a uma taxa $i = 6\%\ a.a$ durante 5 anos. Qual o montante desse investimento ao final desse período?

Solução:

$$M = C(1+i)^t = 5000(1+\frac{6}{100})^5 \Rightarrow \boxed{M = R\$\ 6.691{,}12}.$$

O regime de capitalização desse exemplo é denominado de descontínuo. Já o **regime de capitalização contínua** é um regime de taxa constante i, capital C, que transforma em t períodos de tempo, um capital acumulado (montante M) igual a

$$M = C.e^{i.t}.$$

Nessa modalidade, os períodos de tempo são considerados infinitesimais implicando em períodos de capitalização instantâneos (continuamente capitalizados a cada período infinitesimal). Por esse motivo, a taxa de juros nessa modalidade é denominada de taxa de juros instantânea.

Demonstração: Considerando que queremos aumentar um número n de capitalizações, para aumentar o montante M em períodos infinitesimais, temos: $t' = n.t$ e $i' = i/n$, substituindo em

$$M = C(1+i')^{t'} = C(1+\frac{i}{n})^{n.t} = C\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right]^t.$$

Como a taxa de juros é instantânea, M é o limite de $n \to \infty$:

$$M = \lim_{n\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^n\right]^t = C\left[\underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n}_{e^i}\right]^t = \boxed{C.e^{i.t}}.$$

Resolvendo o mesmo exemplo anterior, porém utilizando a capitalização contínua, encontramos

$$M = M = C.e^{i.t} = 5000.(2{,}718182)^{0{,}06.5} = R\$\ 6.749{,}22.$$

O montante aqui foi maior (e sempre será) pois a capitalização é contínua.

O exemplo acima trata apenas de um único depósito (aplicação) que fica capitalizando mensalmente. Suponha que haja depósitos mensais durante todo o período, como calcular o montante?

O montante em questão é denominado também de **valor futuro (VF) de um fluxo contínuo de depósitos**.

Como, nesse caso, a taxa de juros é instantânea, podemos dividir o tempo t em n subintervalos de comprimento Δt e o valor futuro de cada subintervalo i será $C.e^{i.(t_0-t^*i)}\Delta t^*_i$. O valor futuro então, será a soma de Riemann

$$VF = lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} C.e^{i.(t_0-t^*i)}\Delta t^*_i \Rightarrow \boxed{VF = \int_0^{t_0} C.e^{i.(t_0-t)}dt}$$

Exemplo: Suponha 4 depósitos mensais de R$ 100,00 em uma aplicação com taxa de rendimento de 1% a.m.

Solução:

O saldo do 1º depósito após 3 meses é: $M = 100.(2{,}71)^{0{,}01.(4-1)} = R\$\ 103{,}04.$

O saldo do 2º depósito após 2 meses é: $M = 100.(2{,}71)^{0{,}01.(4-2)} = R\$\ 102{,}02.$

O saldo do 3º depósito após 1 mês é: $M = 100.(2{,}71)^{0{,}01.(4-3)} = R\$\ 101{,}00.$

O saldo do 4º depósito após 0 mês: $M = 100.(2{,}71)^{0{,}01.(4-4)} = R\$\ 100{,}00.$

O valor futuro será a soma de todos os montantes de cada depósito:

$VF = 103{,}04 + 102{,}02 + 101{,}00 + 100{,}00 = R\$\ 406{,}06.$

Utilizando a fórmula para um fluxo contínuo de depósito, temos

$$VF = \int_0^{t_0} C.e^{i.(t_0-t)}dt \Rightarrow VF = \int_0^{4} 100.e^{0{,}01.(4-t)}dt$$

$$VF = \int_0^{4} 100.e^{0{,}01.(4-t)}dt = \int_0^{4} 100.e^{0{,}04}.e^{-0{,}01t}dt = \underbrace{100.e^{0{,}04}}_{104{,}08}\int_0^{4} e^{-0{,}01t}dt$$

$$VF = 104{,}08\left(-\frac{e^{-0{,}01.t}}{0{,}01}\right)\Bigg]_0^4 = 104{,}08\left[\left(\underbrace{-\frac{e^{-0{,}01.4}}{0{,}01}}_{-96{,}0789}\right)-\left(\underbrace{-\frac{e^{-0{,}01.0}}{0{,}01}}_{-100}\right)\right]$$

$$VF = 104{,}08\,.3{,}921 \Rightarrow \boxed{VF = R\$\ 408{,}10}.$$

21.10.6. Custo de armazenamento

Considere uma quantidade ou peso (Q_0) de um produto armazenado inicialmente (estoque inicial). E seja a taxa de venda k (peso ou quantidade/tempo) desse produto **constante**. Então, a quantidade de produto armazenado no tempo t será dado por: $Q(t) = Q_0 - kt$.

Por outro lado, se os custos desse armazenamento $C(t)$ (preço/peso ou

quantidade/tempo) for dada também em função do tempo t, temos que o custo de armazenamento será dado por

$$CA(t) = C(t).Q(t).$$

E o custo do armazenamento total (CAT) em um período t será

$$CAT = \sum_{1}^{t} C(t).Q(t).$$

Exemplo: O custo de armazenamento de um certo tipo de grãos em um silo é estimado em R$ 0,05 por quilograma por mês. Com um estoque inicial de R$ 2 toneladas desse grãos, as vendas nos primeiros 5 meses tiveram uma taxa constante de 200kg/mês. Calcule o custo total de armazenamento desses grãos nesses 5 meses.

Solução:

$$Q(t) = \overbrace{2000}^{estoque\ inicial} - \overbrace{200}^{taxa\ de\ venda}\ t$$

$$C(t) = 0{,}05$$

$$CA(t) = 0{,}05.(2000 - 200t) \Rightarrow \boxed{CA(t) = 100 - 10t}.$$

Para o custo de armazenamento total, podemos fazer uma tabela mês e mês e somar os resultados:

Mês	1	2	3	4	5	Custo de Armazenamento Total (CAT)
Custo de armazenamento	90	80	70	60	50	350

Resposta: $CAT = R\$\ 350{,}00$.

Porém, essa solução será exaustiva para um período muito longo. Nesse contexto, para estimar um valor usando integral, vamos dividir o intervalo em n subintervalos de comprimento Δt e o custo de cada subintervalo i será $C(t^*_i).Q(t^*_i)$. O custo de armazenamento total será o limite de $n \to \infty$ da soma Riemann:

$$CAT = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} C(t^*_i).Q(t^*_i)\Delta t_i \Rightarrow \boxed{CAT(t) = \int_0^{t_0} C(t).Q(t)dt.}$$

Aplicando no exemplo anterior, temos

$$CAT(t) = \int_0^{t_0} C(t).Q(t)dt = \int_0^5 (100 - 10t)dt = (100t - 5t^2)\Big]_0^5$$

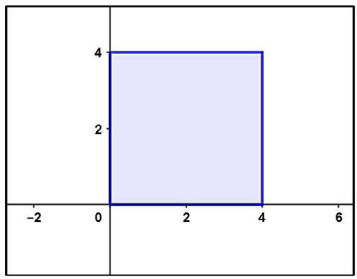
$$CAT(t) = 100.5 - 5.5^2 = 500 - 125 \Rightarrow \boxed{CAT(t) = R\$\ 375{,}00}.$$

O valor do custo do armazenamento total foi maior, porque a contabilização do custo é contínua.

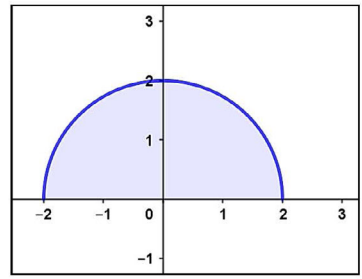
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 21.13

1) Encontre as coordenas do centroide das regiões destacadas a seguir.

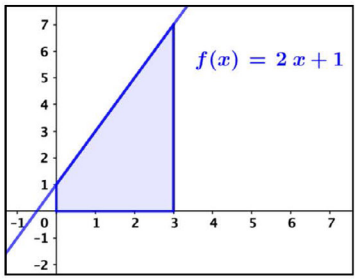
a)



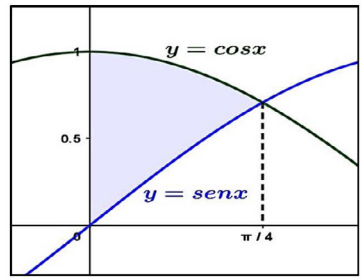
b)



c)



d)



2) Calcule o trabalho e a força exercida por uma mola de constante $k = 5N/m$ foi esticada $2m$ além do seu comprimento natural.

3) Qual o trabalho que deverá ser realizado sobre um corpo de massa igual a 5 kg, para que sua velocidade passe de 10 m/s para 20 m/s?

4) Um corpo inicialmente a 100ºC é posto em um ambiente de temperatura constante de 25ºC. Sabendo que após 10 minutos o corpo está a 50ºC, em quanto tempo ele estará a 30ºC?

5) Um corpo inicialmente a 100ºC é posto em um ambiente de temperatura constante desconhecida. Sabendo que após 10 minutos o corpo está a 90ºC e após 20 minutos o corpo está a 85ºC. Qual a temperatura do ambiente?

6) Uma amostra de uma hortaliça foi posta em uma estufa (micro-ondas) para a determinação de matéria seca. Ao término do aquecimento, o material foi retirado da estufa a uma temperatura de 90ºC em um ambiente de temperatura constante de 20ºC. Se após 10 minutos o corpo está a 60ºC, em quanto tempo ele estará a 30ºC?

7)Considerando que o custo de produção de um cultivo de bananas de uma propriedade foi modelada pela função $C(x) = 100 + \frac{150}{x}$, onde x é dado em hectares de área plantada e C na ordem de mil reais, qual a média do custo dessa propriedade entre 1 e 10 hectares de área plantada?

8)A produção de um cultivo (em toneladas) de uma propriedade foi modelada pela função $P(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}01x + 50$, sendo x em hectares de área plantada. Qual a média de produção dessa propriedade que possui 12 hectares de área plantada?

9)As projeções de venda de melão de uma propriedade foram modeladas de acordo com a função $Q(t) = -2t + 100$, onde t é o tempo de dias corridos e $Q(t)$ é a quantidade de melões vendidos. Quantos melões em média foram vendidos entre o 10º dia e o 40º dia?

10)Um capital de R$ 10.000,00 é aplicado em fundo de investimento a uma taxa $i = 10\%\ a.a$ durante 4 anos. Calcule:

a)O montante desse investimento ao final desse período utilizando o regime de capitalização descontínua?

b)O montante desse investimento ao final desse período utilizando o regime de capitalização contínua?

11)Pedro realizou depósitos de R$ 1000,00 mensalmente durante 5 meses em sua conta poupança. Sabendo que taxa de juros de rendimento da poupança esteve constante e no valor de 0,5% a.m durante esse período, quanto Pedro resgatou ao final dos 5 depósitos? Use a capitalização contínua.

12)Um proprietário de uma fazenda pretende comprar um trator agrícola que custa no mercado R$ 200.000,00. Para isso ele pretende fazer depósitos mensais iguais em sua conta poupança, que rende 1% a.m, durante 5 anos (ou seja, 60 depósitos). Qual deve ser o valor mensal desses depósitos, para que ao final dos 5 anos, o saldo seja suficiente para a compra desse trator? Use a capitalização contínua.

13)O custo de armazenamento de um certo produto é estimado em R$ 0,01 por quilograma por mês. Com um estoque inicial de R$ 1500kg, o proprietário percebeu que as vendas nos primeiros 10 meses tiveram uma taxa constante de 20kg/mês. Use a integral para calcular o custo total de armazenamento desse produto nos 10 meses.

14)Um armazém possui em estoque 10 toneladas de milho. A expectativa é que as vendas girem em torno de 1800 kg por mês. Se o custo de armazenagem é dado por $C(t) = 100 - 18t$ sendo t em meses, calcule:

a) O custo de armazenamento total, de acordo com a expectativa de venda,

durante 6 meses. Use a integral.

b) Se as vendas foram acima das expectativas, zerando o estoque já no 5º mês, qual foi taxa de vendas (kg/mês)?

15)O crescimento vegetal é decisivamente influenciado pelo tempo em que a planta mantém ativa sua superfície foliar. Esta característica é definida pela duração da área foliar (D) e pode ser representada pela equação:

$$D = \int_{t_1}^{t_2} A(t)dt$$

Fonte adaptada: (BELTRÃO, FILHO e OLIVEIRA, 2008)

A solução para D para $A(t) > 0$, pode ser dada por:

a) ( ) $A(t_2) - A(t_1)$;

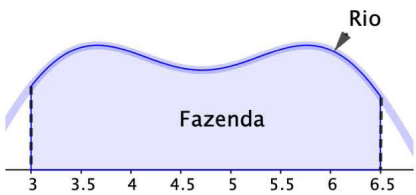
b) ( ) $B(t_1) - B(t_2)$, onde $B(t)$ é uma função cuja derivada é $A(t)$;

c) ( ) $B(t_1) - B(t_2)$, onde $B(t)$ é uma função cuja integral é $A(t)$;

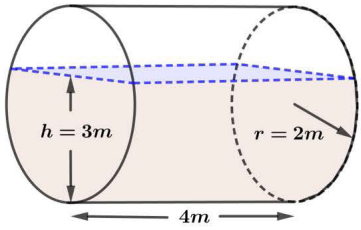
d) ( ) Valor numérico da área entre a função $A(t)$ e o eixo t, no intervalo de $[t_1, t_2]$;

e) ( ) Valor numérico da área entre a função $A(t)$ e o eixo A, no intervalo de $[t_1, t_2]$;

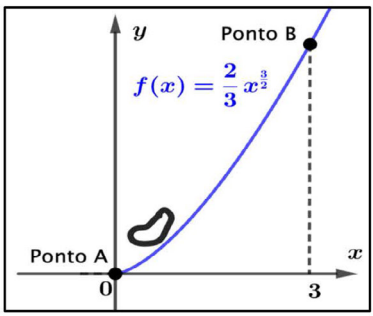
16)Uma fazenda está limitada em sua parte superior por um rio. Dispondo suas medições em um plano cartesiano, conforme a figura, o rio se modela de acordo com a função $f(x) = cos^2 x - senx$. Se escala do plano está em quilômetros, quantos hectares possui essa fazenda?



17)Um tanque cilíndrico agroquímico possui 2 metros de raio e 4 metros de comprimento. Disposto na horizontal, conforme a figura, a altura h do líquido mede 3 metros. Qual o volume desse líquido?



18) Um projeto de irrigação, na escala em quilômetros, prevê um desvio na canalização da água do ponto A ao ponto B. Estudos apontaram que o modelo matemático que melhor se ajusta a curva necessária para o desvio é a função $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, conforme a figura. Quantos quilômetros de canal serão necessários para a execução do projeto?

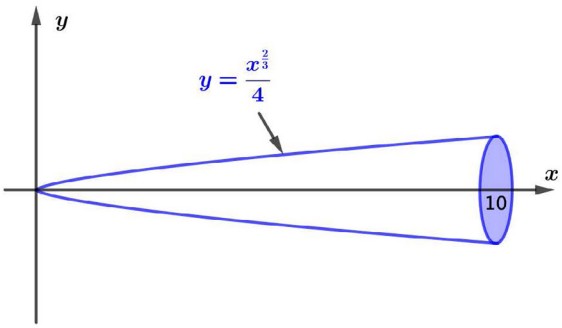


19)A água de um tanque de irrigação vaza a uma taxa de y litros por hora. A função y por x (em horas) foi modelada segunda a função $f(x) = e^{-x}$ de acordo com as três primeiras horas. Qual o total de água que vazou nesse intervalo de tempo?

20)Em dendrometria, usa-se integrais para cálculo de volumes de troncos de árvores, veja a aplicação seguinte para dois casos.

a) Uma árvore teve o volume do seu tronco modelado pelo sólido de revolução gerado pela função $x = -0{,}1y + 0{,}8$ em torno do eixo y. Se a altura dessa árvore era de $y = 5$ metros, qual o volume do tronco dessa árvore?

b) Uma árvore teve seu tronco modelado pela parábola de Neil na forma $y = \pm bx^{2/3}$, cujos valores estão na figura a seguir. Se a altura do tronco dessa árvore é de 10 metros, qual o seu volume? Arredonde a resposta em até duas casas decimais.



CAPÍTULO

22

GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL

GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL

22. GEOMETRIA ANALÍTICA ESPACIAL

Embora já tenhamos, de alguma forma, tido contato com objetos espaciais como prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas na unidade de geometria espacial, e outros sólidos como os de revolução na unidade anterior, a partir dessa unidade, iremos estudar esses e outros objetos como pontos, retas, planos, vetores e superfícies de forma minuciosa e em um plano cartesiano tridimensional.

Nesta unidade, especificamente, daremos ênfase a esses objetos empregando os conhecimentos adquiridos sobre vetores, mas agora no espaço tridimensional.

22.1. Representação em um espaço tridimensional

Qualquer objeto matemático tem sua representação no espaço tridimensional com o eixo x (eixo das abcissas) representando a profundidade, o eixo y (eixo das ordenadas) representando o comprimento e o eixo z (eixo das cotas), representando a altura desse objeto. A convenção mais utilizada nessa representação, estabelece que os sentidos: para frente, para a direita e para cima, são positivos e os seus opostos são negativos, com a origem (0, 0, 0) no encontro dos eixos (ver figura 22.1.1).

Enquanto o plano cartesiano tradicional é dividido em quatro quadrantes, o espaço tridimensional é dividido em oito regiões, geradas pela interseção dos planos xy, xz e yz, denominadas de **octantes**. Sendo que os quatro primeiros (1º, 2º, 3º e 4º octantes), ficam na parte superior do plano xy e os quatro últimos (5º, 6º, 7º e 8º octantes), na parte inferior desse plano, de forma que a ordem de leitura dessas regiões estejam no sentido anti-horário horizontalmente. Ver figura 22.1.2.

Representação de um ponto: Um ponto é representado pela tripla ordenada (x, y, z), em que x é a abscissa do ponto, y é a ordenada do ponto e z é a cota do ponto. A seguir estão alguns pontos e suas representações:

- A$(1,2,3)$ na figura 22.1.3;
- B$(-1,-2,2)$ na figura 22.1.4;

- C(−1, 2, − 2) na figura 22.1.5.;
- D(− 2, − 2, − 2) na figura 22.1.6.

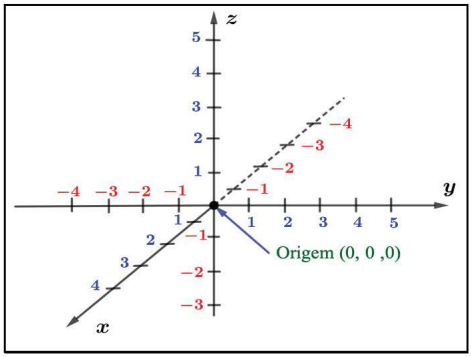


Figura 22.1.1

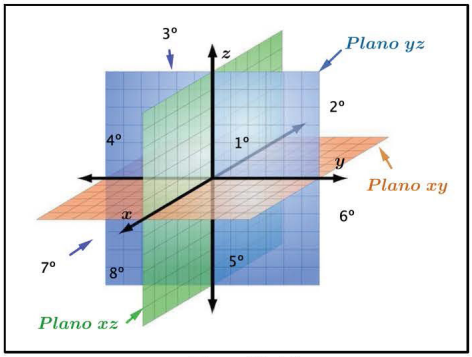


Figura 22.1.2

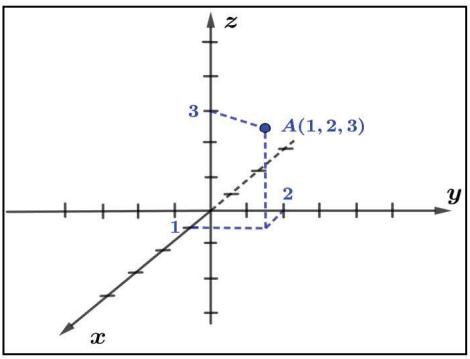


Figura 22.1.3

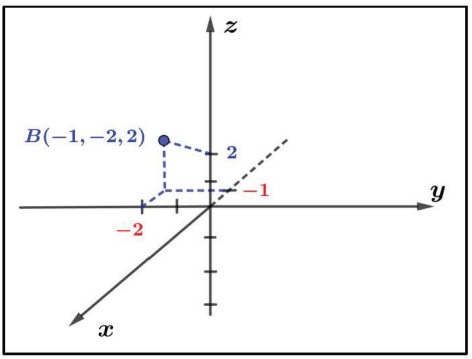


Figura 22.1.4

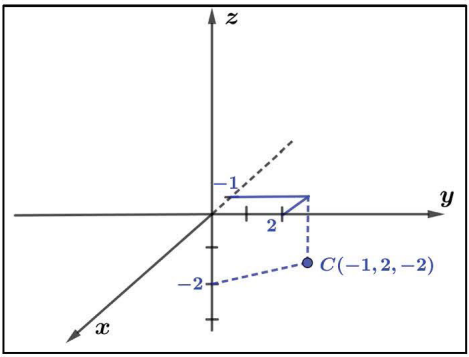


Figura 22.1.5

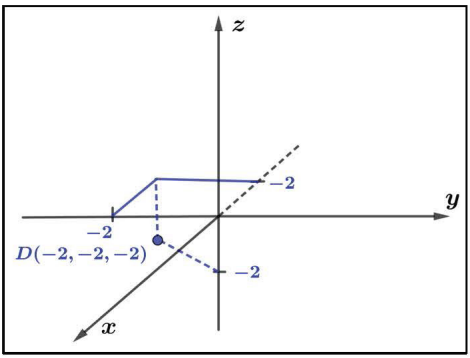


Figura 22.1.6

22.2. Distância entre dois pontos no espaço

Sejam dois pontos do espaço $P(x_p, y_p, z_p)$ e $Q(x_q, y_q, z_q)$. Pela figura 22.2.1, o tamanho do segmento $\overline{P'Q'}$ formado pelas projeções do ponto P e Q no plano xy, pode ser calculado pelo teorema de Pitágoras a seguir.

$$D_{P',Q'} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}.$$

Por outro lado, o triângulo formado no espaço, conforme a figura 22.2.2, é retângulo de catetos $D_{P',Q'}$ e $\overline{Z_pZ_q}$. Sendo assim, a hipotenusa será a distância:

$$D_{P,Q} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (Z_q - Z_p)^2}.$$

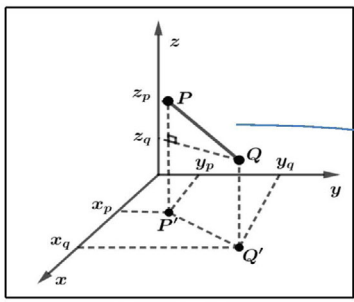


Figura 22.2.1

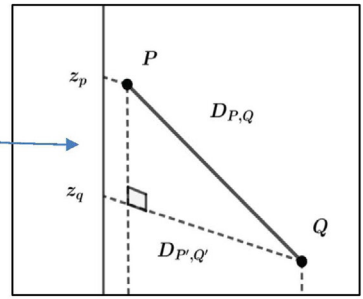


Figura 22.2.2

1º exemplo: Calcular a distância entre os pontos $P(1,4,2)$ e $Q(-1,2,3)$.

Solução:

$$D_{P,Q} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (Z_q - Z_p)^2}$$

$$D_{P,Q} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-4)^2 + (3-2)^2}$$

$$D_{P,Q} = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \Rightarrow D_{P,Q} = \sqrt{9} \Rightarrow \boxed{D_{P,Q} = 3\ u.c}.$$

2º exemplo: Calcule o valor de x para que a distância entre os pontos $P(x,0,1)$ e $Q(-1,1,0)$ seja $2\ u.c$.

Solução: $D_{P,Q} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (Z_q - Z_p)^2}$

$$2 = \sqrt{(x+1)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow \quad 2 = \sqrt{(x+1)^2 + (-1)^2 + 1^2} \Rightarrow$$

$$4 = (x+1)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -1 \pm \sqrt{2}}.$$

Isso significa que os pontos $(-1+\sqrt{2}, 0, 1)$ e $(-1-\sqrt{2}, 0, 1)$ estão a mesma distância $\sqrt{2}$ u.c do ponto $Q(-1,1,0)$.

22.3. Equação de uma esfera

A fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos nos fornece o lugar geométrico do conjunto de pontos equidistante a um ponto central, o que coincide com a definição de uma esfera.

Definição 22.3.1: Esfera é uma superfície formada por um conjunto de pontos que estão à mesma distância do espaço, denominado de raio R, de um ponto central $C(a,b,c)$.

Assim, a distância do centro (a,b,c) à um ponto genérico (x,y,z), conforme a figura 22.3.1, nos dá a seguinte equação de uma esfera:

$$R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.}$$

Exemplo: Qual a equação de uma esfera de centro $C(0,-1,2)$ e raio $R=4$?

Solução:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-(-1))^2 + (z-2)^2} = 4 \Rightarrow$$

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16} \Rightarrow \textit{Equação da esfera.}$$

Sua representação está figura 22.3.2.

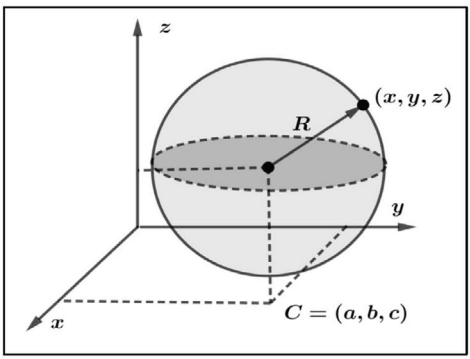


Figura 22.3.1

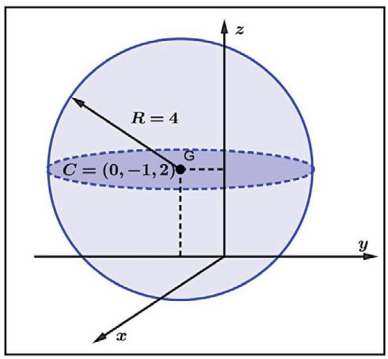


Figura 22.3.2

22.4. Ponto médio

Sejam dois pontos do espaço: $P(x_p, y_p, z_p)$ e $Q(x_q, y_q, z_q)$, o ponto médio $M(x_m, y_m, z_m)$ do segmento $\overline{PQ}$ é dado pelas seguintes coordenadas:

$$M(x_m, y_m, z_m) = \begin{cases} x_m = \dfrac{x_p + x_q}{2} \\ y_m = \dfrac{y_p + y_q}{2} \\ z_m = \dfrac{z_p + z_q}{2} \end{cases}$$

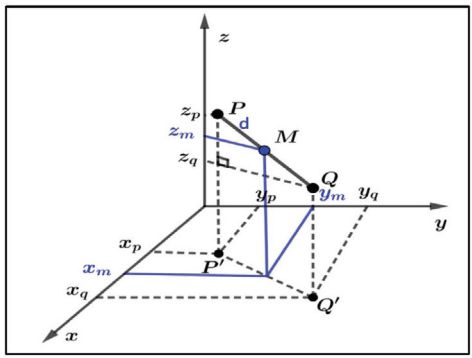


Figura 22.4.1

Ou seja, assim como ocorre no plano cartesiano bidimensional, o ponto médio é um ponto equidistante aos pontos extremos, portanto é dado pela média aritmética das coordenadas desses pontos extremos.

A ilustração de um ponto médio M entre P e Q, está figura 22.4.1.

Exemplo: Calcule o ponto médio entre os pontos $P(3,0,3)$ e $Q(-1,2,3)$

Solução:

$$M(x_m, y_m, z_m) = \begin{cases} x_m = \dfrac{x_p + x_q}{2} = \dfrac{3 + (-1)}{2} = 1 \\ y_m = \dfrac{y_p + y_q}{2} = \dfrac{0 + 2}{2} = 1 \\ z_m = \dfrac{z_p + z_q}{2} = \dfrac{3 + 3}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,3).$$

22.5. Baricentro de um triângulo

De forma semelhante ao que ocorre com o plano bidimensional, o baricentro (ou o centro de gravidade) de um triângulo no espaço é dada pela média aritmética das coordenadas dos pontos de seus vértices. Dessa maneira, seja os pontos $P(x_p, y_p, z_p)$, $Q(x_q, y_q, z_q)$ e $R(x_r, y_r, z_r)$ vértices de um triângulo, seu baricentro $G(x_g, y_g, z_g)$ é dado por:

$$G(x_g, y_g, z_g) = \begin{cases} x_g = \dfrac{x_p + x_q + x_r}{3} \\ y_g = \dfrac{y_p + y_q + y_r}{3} \\ z_g = \dfrac{z_p + z_q + z_r}{3} \end{cases}$$

Para demonstrar essa fórmula, siga os mesmos passos da demonstração do baricentro de um triângulo no plano bidimensional na subseção 13.3.9 do volume 2.

Exemplo: Calcule o baricentro de um triângulo de vértices $P(1,0,3)$, $Q(5,3,2)$ e $R(0,-6,4)$.

Solução:

$$G(x_g,y_g,z_g)=\begin{cases} x_g=\dfrac{x_p+x_q+x_r}{3}=\dfrac{1+5+0}{3}=2 \\ y_g=\dfrac{y_p+y_q+y_r}{3}=\dfrac{0+3+(-6)}{3}=-1 \\ z_g=\dfrac{z_p+z_q+z_r}{3}=\dfrac{3+2+4}{3}=3 \end{cases} \Rightarrow G(2,-1,3).$$

EXERCÍCIOS 22.1

1)Represente os pontos no plano cartesiano tridimensional e diga em que octante se encontra.

a) $A(1,1,2)$

b) $B(-1,3,2)$

c) $C(-1,-2,4)$

d) $D(-3,-2,-1)$

2)Calcule a distância entre os pontos:

a) $P(2,0,6)$ e $Q(-2,0,3)$

b) $P(-1,-4,-2)$ e $Q(-2,-1,0)$

3)Calcule o valor de x para que a distância entre os pontos $P(1,2,1)$ e $Q(-1,x,1)$ seja $2\ u.c$.

4)Qual a equação de uma esfera de centro na origem e raio $R=2$?

5)Qual a equação de uma esfera de centro $C(-3,-1,1)$ e raio $R=1$?

6)Qual a equação de uma esfera que passa pelos pontos $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ e $(0,0,3)$?

7)Calcule o ponto médio entre os pontos:

a) $P(0,0,4)$ e $Q(-6,0,2)$

b) $P(-1,5,-2)$ e $Q(-1,-1,-1)$

8)Calcule o baricentro do triângulo de vértices:

a) $P(0,0,3)$, $Q(3,0,0)$ e $R(0,3,0)$

b) $P(-1,2,7)$, $Q(10,0,-2)$ e $R(0,7,1)$

9)Quanto a mede a mediana do triângulo de vértices $P(-1,3,8)$, $Q(7,7,6)$ e $R(3,-7,2)$ relativa ao lado $\overline{PQ}$?

22.6. Vetor no espaço

As mesmas definições, teoremas e propriedades de vetores que estudamos na seção 13.3 (no volume 2) em um plano cartesiano xy, podem ser estendidas ao espaço tridimensional xyz. A diferença apenas é que o vetor terá um componente a mais.

Definição 22.6.1: Sejam dois pontos $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ do espaço, o vetor $\overrightarrow{AB}$ é definido por:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Exemplo: $A(2,2,1)$ e $B(-5,4,3)$, o vetor $\overrightarrow{AB} = (-5-2, 4-2, 3-1) = (-7,2,2)$. A representação desse vetor no espaço está na figura 22.6.1.

Definição 22.6.2: Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ dois vetores de um espaço, então:

- $|\vec{u}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}$ (módulo de um vetor);
- $\vec{u'} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ (versor: vetor unitário na direção e sentido de $\vec{u}$);
- $k.\vec{u} = (kx_1, ky_1, kz_1)$ (multiplicação de um vetor por um escalar);
- $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ (soma de vetores);
- $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ (subtração de vetores);
- $\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$
- $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha$
- $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90° \ (ortogonais)$

} (produto escalar $\vec{u}.\vec{v}$).

Podemos também representar um vetor no espaço usando os vetores unitários canônicos $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ do sistema de coordenadas. Da seguinte maneira,

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}.$$

Onde $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$ e $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$, representados na figura 22.6.2.

Exemplo: Sendo $\vec{u} = (1,3,4)$ e $\vec{v} = (-1,0,1)$, vamos calcular:

a) $|\vec{u}|$

$$|\vec{u}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$$

b) $|\vec{v}|$

$$|\vec{v}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

c) Um versor de $\vec{v}$

$$\vec{v'} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

d) $3.\vec{u}$

$3.\vec{u} = 3.(1,3,4) = (3,9,12)$ ou $3i + 9j + 12k.$

e) $\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{u} + \vec{v} = (1,3,4) + (-1,0,1) = (0,3,5)$ ou $3j + 5k.$

f) $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 1.(-1) + 3.0 + 4.1 = -1 + 0 + 4 = 3.$

g) O ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.cos\alpha \Rightarrow cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|} = \frac{3}{\sqrt{26}.\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \alpha = arccos\left(\frac{3\sqrt{13}}{26}\right).$$

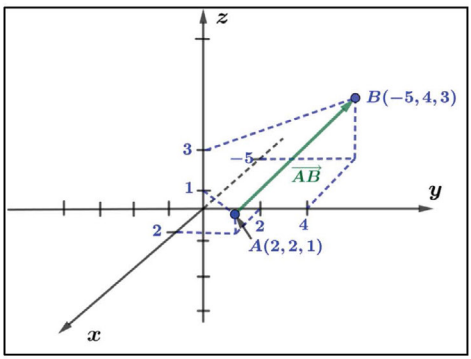


Figura 22.6.1

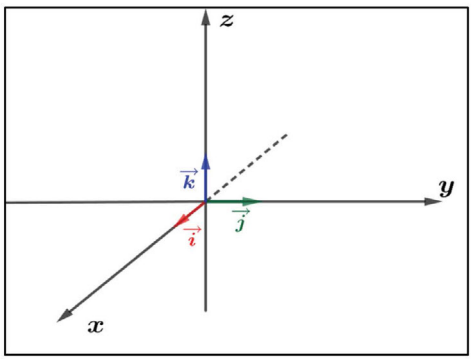


Figura 22.6.2

22.6.1. Produto vetorial

Enquanto o produto escalar tem como resultado um número, o produto vetorial tem como resultado um vetor.

Definição 22.6.1.1: Sejam dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \times \vec{v} = (b_1.c_2 - c_1.b_2\ , -a_1.c_2 + c_1.a_2, a_1.b_2 - b_1.a_2)$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = (b_1.c_2 - c_1.b_2\ )\boldsymbol{i} - (a_1.c_2 - c_1.a_2)\boldsymbol{j} + (a_1.b_2 - b_1.a_2)\boldsymbol{k}.$$

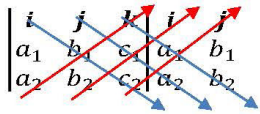
Onde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ são os vetores unitários canônicos do sistema de coordenadas.

Não é fácil memorizar essa definição, por isso utilizamos por praticidade o determinante da seguinte matriz:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \vec{u} \\ \leftarrow \vec{v} \end{matrix}$$

Para calcular esse determinante usaremos a regra de Sarrus (seção 14.1.6 – volume 3). Vamos relembrar!

Primeiro, repetimos a 1ª e a segunda coluna ao lado da matriz. Em seguida, multiplicamos os valores que estão nas diagonais (que possuem três informações) subindo e descendo, segundo as setas a seguir. O resultado das diagonais que sobem troca de sinal e o resultado das diagonais que descem mantém o sinal.



Ao final, somamos os resultados.

Exemplo: Sendo os vetores $\vec{u} = (0,-1,2)$ e $\vec{v} = (-2,1,3)$, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ e $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

Solução:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \vec{u} \\ \leftarrow \vec{v} \end{matrix}$$

$$-2k - 2i + 0 \leftarrow \textit{trocam de sinal}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$-3i - 4j + 0$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -2k - 2i - 3i - 4j \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -5i - 4j - 2k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + z_1^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{25 + 16 + 4} = \sqrt{45} \Rightarrow \boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = 9\sqrt{5}}.$$

Ainda nesse exemplo, vamos calcular o produto vetorial de forma inversa $\vec{v} \times \vec{u}$ e verificar se a propriedade comutativa é verdadeira, ou seja, se $\vec{u} \times \vec{v}$ é igual a $\vec{v} \times \vec{u}$.

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \vec{v} \\ \leftarrow \vec{u} \end{matrix}$$

$$0 + 3i + 4j \leftarrow \textit{trocam de sinal}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$2i + 0 + 2k$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = 3i + 4j + 2i + 2k \Rightarrow \boxed{\vec{v} \times \vec{u} = 5i + 4j + 2k}.$$

A propriedade comutativa não é verdadeira, mas o vetor $\vec{u} \times \vec{v} = -5i - 4j - 2k$ é oposto ao vetor $\vec{v} \times \vec{u} = 5i + 4j + 2k$ (veja a inversão dos sinais), mas isso não é coincidência. Vimos em matrizes que ao trocar uma linha pela outra, o determinante da nova matriz terá o mesmo valor do determinante da matriz original, porém, com sinal trocado (ver seção 14.1.8 – volume 3). Desse modo,

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}).}$$

Nessa ocasião, já sabemos calcular o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ e seu comprimento (módulo), falta verificar sua direção e sentido. Para isso, vamos calcular o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ e em seguida entre $\vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ e analisar os resultados.

Sejam dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ definido por $\vec{u} \times \vec{v} = (b_1.c_2 - c_1.b_2\ , -a_1.c_2 + c_1.a_2, a_1.b_2 - b_1.a_2)$.

$$\vec{u}\ .\ (\vec{u} \times \vec{v}) = (a_1, b_1, c_1).\ (b_1.c_2 - c_1.b_2\ , a_1.c_2 - c_1.a_2, a_1.b_2 - b_1.a_2)$$

$$\vec{u}\ .\ (\vec{u} \times \vec{v}) = \cancel{a_1.b_1.c_2} - \cancel{a_1.c_1.b_2} - \cancel{b_1.a_1.c_2} + \cancel{b_1.c_1.a_2} + \cancel{c_1.a_1.b_2} - \cancel{c_1.b_1.a_2}$$

$$\boxed{\vec{u}\ .\ (\vec{u} \times \vec{v}) = 0} \Rightarrow \text{os vetores } \vec{u} \text{ e } \vec{u} \times \vec{v} \text{ são ortogonais.}$$

$$\vec{v}\ .\ (\vec{u} \times \vec{v}) = (a_2, b_2, c_2).\ (b_1.c_2 - c_1.b_2\ , -a_1.c_2 + c_1.a_2, a_1.b_2 - b_1.a_2)$$

$$\vec{v}\ .\ (\vec{u} \times \vec{v}) = \cancel{a_2.b_1.c_2} - \cancel{a_2.c_1.b_2} - \cancel{b_2.a_1.c_2} + \cancel{b_2.c_1.a_2} + \cancel{c_2.a_1.b_2} - \cancel{c_2.b_1.a_2}$$

$$\boxed{\vec{v}\ .\ (\vec{u} \times \vec{v}) = 0} \Rightarrow \text{os vetores } \vec{v} \text{ e } \vec{u} \times \vec{v} \text{ também são ortogonais.}$$

Portanto, $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, isto é, ortogonal ao plano que contem $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Para saber o sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ usamos uma regra denominada **regra da mão direita**. Essa regra consiste em apontar com o **dedo indicador** na direção do **primeiro vetor** $\vec{u}$ do produto e, concomitantemente, apontar o **dedo médio** na direção do **segundo vetor** $\vec{v}$ desse produto. O sentido do produto $\vec{u} \times \vec{v}$ será o sentido apontado pelo polegar. Veja a ilustração da mão direita na figura 22.6.1.1.

Nas figuras 22.6.1.2 e 22.6.1.3 a seguir, estão duas representações para o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$. Enquanto nas figuras 22.6.1.4 e 22.6.1.5 estão a representação do vetor $\vec{v} \times \vec{u}$ (em vermelho) no sentido oposto de $\vec{u} \times \vec{v}$. Use a regra da mão direita e constate que o vetor do produto vetorial resultante, está na direção e sentidos corretos.

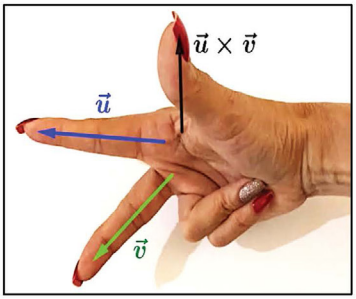


Figura 22.6.1.1

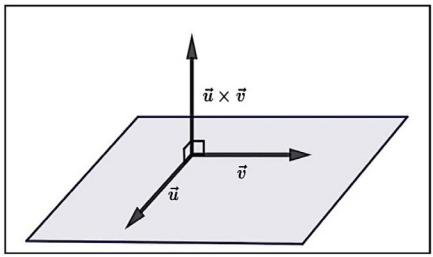


Figura 22.6.1.2

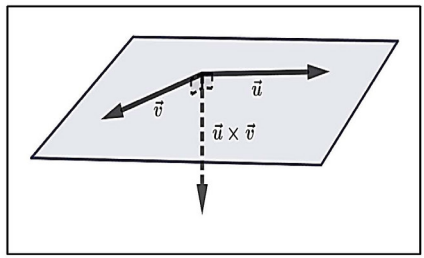


Figura 22.6.1.3

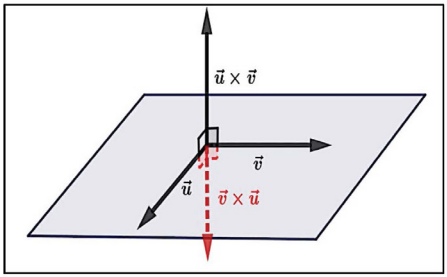


Figura 22.6.1.4

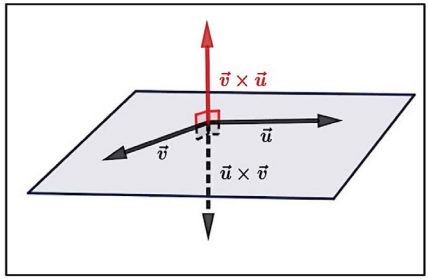


Figura 22.6.1.5

22.6.2. Relação entre o produto vetorial e o produto interno

Sejam dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ em um plano conforme a figura 22.6.2.1. A área do paralelogramo é dada por

$$A = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\alpha. \quad (1)$$

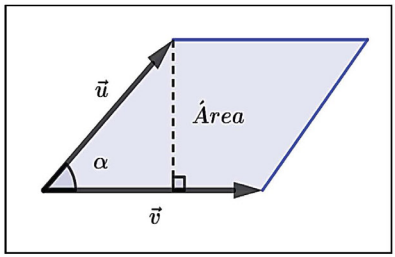


Figura 22.6.2.1

Elevando ao quadrado:

$$A^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.sen^2\alpha$$

$$A^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.(1 - cos^2\alpha)$$

$$A^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2.cos^2\alpha$$

$$A^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2. \quad (2)$$

Substituindo os componentes de cada vetor:

$$A^2 = (a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2).(a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2) - (a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2)^2$$

$$A^2 = \underbrace{(a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2).(a_2{}^2 + b_2{}^2 + c_2{}^2)}_{1^a\ parte} - \underbrace{(a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2)^2}_{2^a\ parte}$$

$$1^{a}\,parte = a_1{}^2.a_2{}^2 + a_1{}^2.b_2{}^2 + a_1{}^2.c_2^2 + b_1{}^2.a_2{}^2 + b_1{}^2.b_2{}^2 + b_1{}^2.c_2{}^2 + c_1{}^2.a_2{}^2 + c_1{}^2.b_2{}^2 + c_1{}^2.c_2{}^2$$

$$2^{a}\,parte = a_1{}^2.a_2{}^2 + b_1{}^2.b_2{}^2 + c_1{}^2.c_2^2 + 2.a_1.a_2.b_1.b_2 + 2.b_1.b_2.c_1.c_2 + 2.a_1.a_2.c_1.c_2.$$

Eliminando expressões iguais de ambas as partes, temos

$$A^2 = a_1{}^2.b_2{}^2 + a_1{}^2.c_2^2 + b_1{}^2.a_2{}^2 + b_1{}^2.c_2{}^2 + c_1{}^2.a_2{}^2 + c_1{}^2.b_2{}^2 - 2.a_1.a_2.b_1.b_2 - 2.b_1.b_2.c_1.c_2 - 2.a_1.a_2.c_1.c_2.$$

Se $\vec{u} \times \vec{v} = (b_1.c_2 - c_1.b_2\,, -a_1.c_2 + c_1.a_2,\ a_1.b_2 - b_1.a_2)$, então

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = (b_1.c_2 - c_1.b_2)^2 + (-a_1.c_2 + c_1.a_2)^2 + (a_1.b_2 - b_1.a_2)^2$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = b_1{}^2.c_2{}^2 - 2.c_1.b_2.b_1.c_2 + c_1{}^2.b_2{}^2 + a_1{}^2.c_2^2 - 2.\ a_1.c_2.c_1.a_2 + c_1{}^2.a_2{}^2 + a_1{}^2.b_2{}^2 - 2.a_1.b_2.b_1.a_2 + b_1{}^2.a_2{}^2.$$

Concluímos que: A^2 e $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$ são equivalentes, logo

$$\boxed{A = |\vec{u} \times \vec{v}|.} \qquad (3)$$

O módulo do produto vetorial $|\vec{u}\,\mathbf{x}\,\vec{v}|$ tem como valor a área do paralelogramo representado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Como (1) é igual a (3), temos

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|.sen\alpha.}$$

E como (2) é igual (3), provamos uma igualdade denominada de **identidade de Lagrange**[16] que relaciona o produto interno com o produto vetorial:

$$\boxed{|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2.}$$

Exemplo: Sendo os vetores $\vec{u} = (-3, 1, -1)$ e $\vec{v} = (-1, -1, 0)$ calcule:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

b) $\vec{v} \times \vec{u}$;

c) A área do paralelogramo representado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

d) O vetor unitário na direção de $\vec{u} \times \vec{v}$;

e) Um vetor direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ que tenha módulo 4.

f) Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

Solução:

a)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \vec{u} \\ \leftarrow \vec{v} \end{matrix}$$

[16] Joseph Louis Lagrange (1736-1813)

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$k - i + 0 \leftarrow$ *trocam de sinal*

$0 + j + 3k$

$$\vec{u} \times \vec{v} = k - i + j + 3k \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -i + j + 4k}$$

b) $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}) = i - j - 4k$

c) $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} \Rightarrow \boxed{A = 3\sqrt{2}\ u.a}$.

Outra solução para o cálculo da área utilizando a identidade de Lagrange:

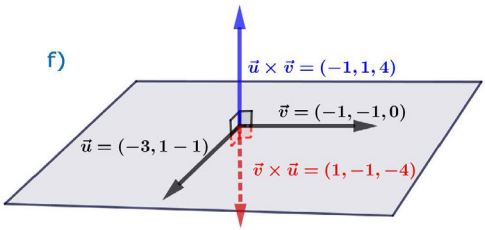
$$|\vec{u}|^2 = (-3)^2 + 1^2 + (-1)^2 = 11$$
$$|\vec{v}|^2 = (-1)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$$
$$\vec{u}.\vec{v} = -3.(-1) + 1.(-1) - 1.0 = 3 - 1 = 2$$
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2$$
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 11.2 - (2)^2$$
$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = 18 \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{18} \Rightarrow \boxed{A = 3\sqrt{2}\ u.a}.$$

d) O vetor unitário na direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ é dada por $\dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$. Assim,

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{-i+j+4k}{3\sqrt{2}} = \boxed{\frac{-\sqrt{2}}{6}i + \frac{\sqrt{2}}{6}j + \frac{2\sqrt{2}}{3}k}.$$

e) Basta multiplicar o vetor unitário por 4: $\boxed{\frac{-2\sqrt{2}}{3}i + \frac{2\sqrt{2}}{3}j + \frac{8\sqrt{2}}{3}k}$.

f)



2º exemplo: Dados os pontos $A(0,-1,0)$, $B(0,-2,3)$ e $C(2,4,-2)$. Calcule:

a) A área do triângulo ABC;

b) A altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Solução:

a) Sabemos que a área de paralelogramo pode ser dado por: $|\vec{u} \times \vec{v}|$. Como a área de um triângulo é a metade da área de um paralelogramo, basta fazer $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e área será dada por $A = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2}$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0-0, -2-(-1), 3-0) = (0,-1,3)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{BC} = (2-0, 4-(-2), -2-3) = (2,6,-5)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$2k - 18i - 0 \leftarrow$ *trocam de sinal*

$5i + 6j + 0$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 5i + 6j + 2k - 18i \Rightarrow \boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -13i + 6j + 2k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-13)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{209}$$

$$A = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\sqrt{209}}{2}\, u.a}.$$

b) O lado $\overline{BC}$ mede:

$$\overline{BC} = D_{B,C} = \sqrt{(2-0)^2 + (4-(-2))^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{4 + 36 + 25} = \sqrt{65}.$$

Uma vez que a área de um triângulo pode ser dada por: $A = \frac{base \times altura}{2}$ podemos obter a altura h da seguinte forma:

$$\frac{\sqrt{209}}{2} = \frac{\overline{BC}.h}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{209}}{\sqrt{65}} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{209}{65}}\, u.c \Rightarrow \boxed{h \cong 1{,}8\, u.c}.$$

EXERCÍCIOS 22.2

1) Sendo $\vec{u} = (-2, 0, 4)$ e $\vec{v} = (0, 3, -4)$, calcule:

a) $|\vec{u}|$;

b) $|\vec{v}|$;

c) O versor de $\vec{v}$;

d) $-2.\vec{u}$;

e) $\vec{u} - \vec{v}$;

f) $\vec{u}.\vec{v}$;

g) O ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2) Sendo os vetores $\vec{u} = (0, 3, 4)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 0)$ calcule:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

b) $\vec{v} \times \vec{u}$;

c) O vetor unitário na direção de $\vec{u} \times \vec{v}$;

d) A área do paralelogramo representado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

e) Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

3) Sendo os vetores $\vec{u} = i + j - 2k$ e $\vec{v} = i - j$ calcule:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

b) $\vec{v} \times \vec{u}$;

c) O vetor unitário na direção de $\vec{u} \times \vec{v}$;

d) Um vetor direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ que tenha módulo 2.

e) A área do paralelogramo representado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

f) Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$.

4) Sendo os vetores $\vec{u} = -2j$ e $\vec{v} = -j + \sqrt{3}k$ calcule:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$;

b) $\vec{v} \times \vec{u}$;

c) O vetor unitário na direção de $\vec{u} \times \vec{v}$;

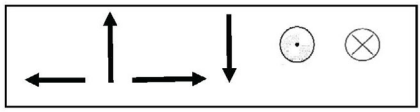
d) Um vetor direção de $\vec{u} \times \vec{v}$ que tenha módulo 5.

e) A área do paralelogramo representado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

f) O ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

g) Represente os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ no espaço.

5) Utilizando as ilustrações: $\odot$ para vetor saindo ortogonal ao papel e $\otimes$ para vetor entrando ortogonal ao papel. Informe a seta ou o símbolo que está abaixo para representar o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ em cada caso.



a) $\vec{u}$ $\otimes$ $\vec{v}$

b) $\vec{u}$ $\otimes$ $\vec{v}$

c) $\vec{u}$ $\otimes$ $\vec{v}$

d) $\vec{u}$ $\odot$ $\vec{v}$

e) $\vec{u}$ $\vec{v}$

f) $\vec{u}$ $\vec{v}$

6) Demonstre as seguintes propriedades.

a) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$;

b) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = \vec{0}$;

c) $k.(\vec{u} \times \vec{v}) = k.\vec{u} \times \vec{v}$;

d) $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}| \Rightarrow \vec{u}$ e $\vec{v}$ ortogonais.

7) Calcule o produto vetorial entre os seguintes vetores unitários.

a) $\vec{\imath} \times \vec{k}$. b) $\vec{\imath} \times \vec{\jmath}$. c) $\vec{\jmath} \times \vec{k}$.

8) Calcule um vetor ortogonal a ambos os vetores $\vec{u} = -10i - 20j + 5k$ e $\vec{v} = -5j + 15k$.

9) Dados os pontos $A(2,-1,0)$, $B(0,-2,5)$ e $C(2,4,0)$. Calcule:

a) A área do triângulo ABC;

b) A altura relativa ao vértice B.

22.6.3. Produto misto de vetores

Definição 22.6.3.1: O produto misto entre vetores é definido pelo produto escalar de um vetor $\vec{w}$ pelo produto vetorial de outros dois vetores $\vec{u} \times \vec{v}$.

$$\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v}).$$

Na prática, basta calcular o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ e em seguida o produto escalar $\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v})$. Entretanto, vamos ver um artifício ainda mais prático.

Sejam dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ e $\vec{w} = (a_3, b_3, c_3)$, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por

$$\vec{u} \times \vec{v} = (b_1.c_2 - c_1.b_2)\boldsymbol{i} - (a_1.c_2 - c_1.a_2)\boldsymbol{j} + (a_1.b_2 - b_1.a_2)\boldsymbol{k}$$

ou

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

Ao multiplicar por $\vec{w}$, encontramos

$$\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v}) = a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

De acordo com o teorema 14.1.7.1 (teorema de Laplace), o resultado será um número calculado pelo determinante de

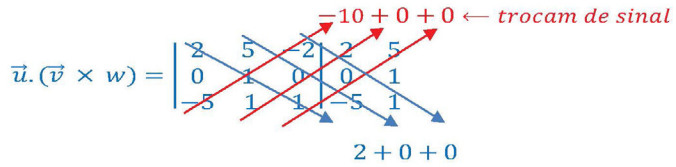
$$\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

É imediato perceber que $\vec{u}.(\vec{v} \times w)$ e $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$ são equivalentes, pois as duas matrizes tem todas as linhas apenas permutadas entre si, não alterando o seu determinante (ver propriedades de determinantes subseção 14.1.8 - volume 3).

Exemplo: Sendo os vetores $\vec{u} = (2,5,-2)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ e $\vec{w} = (-5,1,1)$, calcule $\vec{u}.(\vec{v} \times w)$ e $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$.

Solução:

$$\vec{u}.(\vec{v} \times w) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



$$\vec{u}.(\vec{v} \times w) = -10 + 2 \Rightarrow \boxed{\vec{u}.(\vec{v} \times w) = -8}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w} = \vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$0 - 10 + 0$

$0 + 0 + 2$

$$\boxed{\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v}) = -8} \leftarrow Como\ previsto.$$

Intepretação geométrica: Geometricamente, o módulo do produto misto $\vec{w}.(\vec{u} \times \vec{v})$ equivale ao volume de um paralelepípedo, cujas arestas são formadas pelos três vetores envolvidos.

Demonstração:

O volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base por sua altura. A área da base entre os vetores $\vec{w}$ e $\vec{v}$ é dado por $|\vec{v} \times \vec{w}|$. Sua altura h é a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} \times \vec{w}$, ou seja, $h = |\vec{u}|.cos\theta$ (ver figura 22.6.3.1). Nesse sentido, o volume do paralelepípedo é dado por:

$V = área\ da\ base \times altura = |\vec{v} \times \vec{w}|.|\vec{u}|.cos\theta.$

O que equivale ao módulo do produto interno entre dois vetores:

$$V = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})|.$$

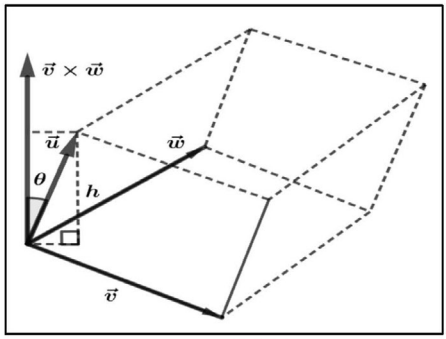


Figura 22.6.3.1

Exemplo: Considerando os vetores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,-3,-1)$ e $\vec{w} = (-3,0,-1)$, arestas de um paralelepípedo.

a) Calcule o seu volume.

Solução:

$$\vec{u}.(\vec{v} \times w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{u}.(\vec{v} \times w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$-9 + 0 + 0 \leftarrow trocam\ de\ sinal$

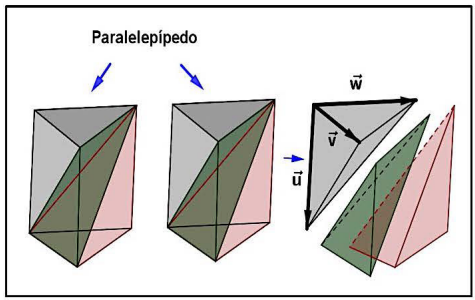
$-3 + 0 + 0$

$$V = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})| = |-9 - 3| \Rightarrow \boxed{\vec{u}.(\vec{v} \times w) = 12\ u.v}.$$

b) Considerando esses vetores como arestas de um tetraedro, calcule o seu volume.

Conforme foi visto em geometria espacial, um paralelepípedo pode ser dividido em dois prismas congruentes e, esses dois prismas por sua vez, em 3 tetraedros também congruentes. Assim, para calcular o volume do tetraedro, basta dividir o volume do paralelepípedo por 6.

$$V = \frac{12}{6} \Rightarrow \boxed{V = 2u.v}.$$



2º exemplo: Considerando os vetores $\vec{u} = (1,0,5)$, $\vec{v} = (3,2,17)$ e $\vec{w} = (-2,0,-10)$, arestas de um paralelepípedo, vamos calcular $\vec{u}.(\vec{v} \times w)$.

Solução:

$$\vec{u}.(\vec{v} \times w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 17 \\ -2 & 0 & -10 \end{vmatrix}$$

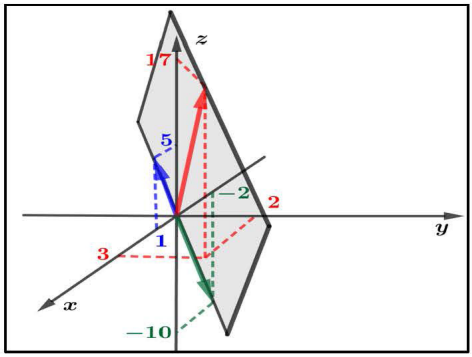
$$\vec{u}.(\vec{v} \times w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 17 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -10 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$20 + 0 + 0 \leftarrow$ *trocam de sinal*

$-20 + 0 + 0$

$$V = |\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})| = |9 - 20| \Rightarrow \boxed{\vec{u}.(\vec{v} \times w) = 0\ u.v}.$$

Significa, geometricamente, que esses três vetores são coplanares (estão no mesmo plano, ver figura ao lado), conforme o teorema a seguir.



Teorema 22.6.3.1: Três vetores são coplanares se, e somente se, $|\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w})| = 0$.

Demonstração: Se três vetores são coplanares, então um vetor é combinação linear dos outros (o fato de serem múltiplos está aqui incluindo). Se uma fila (linha ou coluna) de uma matriz é combinação linear de outra, então o determinante é zero, conforme a 7ª propriedade da subseção 14.1.8 - volume 3.

Por outro lado, se $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais. Como $\vec{v} \times \vec{w}$ é um vetor ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, isso acarreta a $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ coplanares.

EXERCÍCIOS 22.3

1) Calcule $\vec{u}.(\vec{v} \times w)$ em cada caso:

a) $\vec{u} = (2,10,-7)$, $\vec{v} = (-5,3,\ 2)$ e $\vec{w} = (15,-10,0)$;

b) $\vec{u} = (0,\ 4,12)$, $\vec{v} = (1,4,7)$ e $\vec{w} = (3,2,1)$;

c) $\vec{u} = -j + 2k$, $\vec{v} = 2j - k$ e $\vec{w} = -i - j - k$;

d) $\vec{u} = i$, $\vec{v} = j$ e $\vec{w} = k$.

2)Demonstre que

a) $\vec{y}.(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{y}.(\vec{u} \times \vec{w}) + \vec{y}.(\vec{v} \times \vec{w})$;

b) $k.\vec{v}(\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{v}.(k\vec{u} \times \vec{w})$.

3)Calcule o volume de um paralelepípedo cujas arestas são os vetores:

a) $\vec{u} = (4,4,4)$, $\vec{v} = (1,-1,1)$ e $\vec{w} = (2,3,4)$;

b) $\vec{u} = (0,2,1)$, $\vec{v} = (2,7,5)$ e $\vec{w} = (0,-3,-5)$;

c) $\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ e $\vec{w} = (0,0,1)$.

4)Qual o volume de um tetraedro cujas arestas são os vetores:

a) $\vec{u} = (3,-1,4)$, $\vec{v} = (2,0,1)$ e $\vec{w} = (-2,1,5)$;

b) $\vec{u} = (0,1,1)$, $\vec{v} = (1,0,1)$ e $\vec{w} = (0,1,2)$.

5)Verifique se os vetores são coplanares:

a) $\vec{u} = (0,1,3)$, $\vec{v} = (0,1,2)$ e $\vec{w} = (2,-1,0)$;

b) $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (-1,2,1)$ e $\vec{w} = (3,2,5)$.

6)Qual deve ser o valor de k para que os vetores $\vec{u} = (1,2,5)$, $\vec{v} = (0,3,2)$ e $\vec{w} = (5,k,1)$ sejam:

a) Coplanares;

b) Arestas de um paralelepípedo de área 10 u.v.

7)Qual deve ser o valor de k para que o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u} = 3i + 2j + k$, $\vec{v} = -i + j + k$ e $\vec{w} = ki + 1j$ seja 6 u.v.

8) Se o produto vetorial $\vec{u}.(\vec{v} \times \vec{w}) = 0$, é certo que:

a) ( ) $\vec{u}$ é perpendicular a $\vec{v}$;

b) ( ) $\vec{v}$ é ortogonal a $\vec{w}$;

c) ( ) $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais;

d) ( ) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares;

e) ( ) $\vec{v}$ é paralelo a $\vec{w}$.

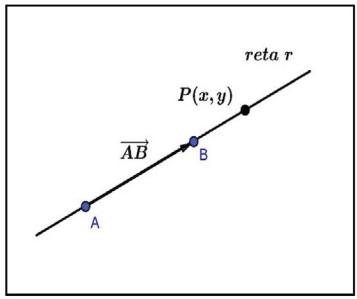
22.7. Equação da reta no espaço

Se uma reta passa pelos pontos A, B e um ponto genérico $P(x, y, z)$, então ela tem mesma direção do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja, $\overrightarrow{AP}$ ou $\overrightarrow{BP}$ são múltiplos de $\overrightarrow{AB}$. Assim,

$$\overrightarrow{AP} = t.\overrightarrow{AB}.$$

Denominando $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, temos

$$P = A + t.\vec{v}.$$



Essa é a **equação vetorial ou paramétrica de uma reta no espaço**.

Sendo $P = (x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c)$, temos

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t.(a, b, c).$$

Comumente escrevemos

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Exemplo: Calcular a equação vetorial da reta que passa pelo ponto A $(-1,1,-2)$ e é paralela ao vetor $\vec{u} = (2,0,5)$.

Solução: O vetor diretor é o próprio $\vec{u}$.

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t.(a, b, c)$$
$$(x, y, z) = (-1, 1, -2) + t.(2, 0, 5)$$
$$Equação\ vetorial: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 \\ z = -2 + 5t \end{cases}.$$

Outra forma de escrever a equação de uma reta é resolvendo o parâmetro t:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Essa forma é conhecida como **equação simétrica da reta**.

Se algum dos valores de a, b ou c for nulo, devemos escrever a equação correspondente isoladamente. Se $a = 0$, por exemplo, escrevemos

$$x = x_0, \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Essa equação diz que a reta pertence ao plano vertical $x = x_0$.

No exemplo anterior $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 \\ z = -2 + 5t \end{cases}$, a reta possui a seguinte equação simétrica:

$$\boxed{y = 1, \frac{x+1}{2} = \frac{z+2}{5}}.$$

2º exemplo: Calcular a equação vetorial e simétrica da reta que passa pelos pontos A $(-2,1,2)$ e B$(2,-1,1)$.

Solução: $\overrightarrow{AB} = B - A = (2,-1,1) - (-2,1,2) \Rightarrow \boxed{\vec{v} = (4,-2,-1)}$.

$$(x,y,z) = (x_A, y_A, z_A) + t.(a,b,c)$$

$$(x,y,z) = (-2,1,2) + t.(4,-2,-1)$$

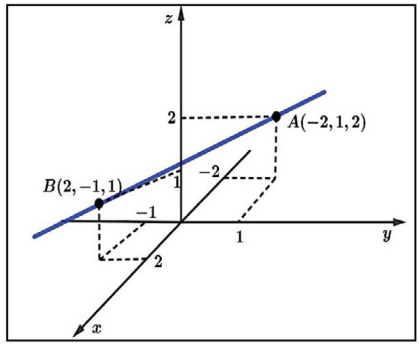
$$\textit{Equação vetorial:} \begin{cases} x = -2 + 4t \\ y = 1 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (1).$$

Outra equação vetorial pode ser encontrada utilizando o ponto B como ponto inicial:

$$(x,y,z) = (x_B, y_B, z_B) + t.(a,b,c)$$

$$(x,y,z) = (2,-1,1) + t.(4,-2,-1)$$

$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (2).$$



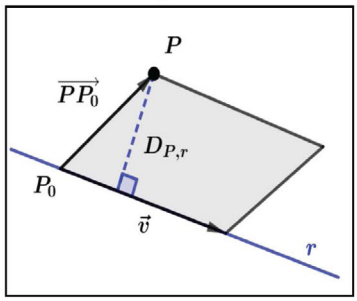
As equações vetoriais (1) e (2) são equivalentes, representam a mesma reta no espaço. Essa reta está representada na figura ao lado.

Isolando o parâmetro t na equação vetorial (1), encontramos a equação simétrica:

$$\boxed{\frac{x+2}{4} = \frac{-y+1}{2} = \frac{-z+2}{1}}.$$

22.8. Distância de ponto e reta

Consideremos uma reta r passa que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ na direção do vetor $\vec{v} = (a,b,c)$ e um ponto $P(x_p, y_p, z_p)$, conforme a figura ao lado.



A distância $D_{P,r}$ do ponto P à reta r corresponde a altura do paralelogramo, cuja área é $|(\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v})|$, assim,

$$D_{P,r} = \frac{|(\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v})|}{|\vec{v}|}.$$

Exemplo: Calcular a distância do ponto $P(2,2,3)$ à reta r: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

Solução: Pela equação da reta, a mesma passa pelo ponto $P_0 = (1,-1,2)$ e possui vetor diretor $\vec{v} = (2,3,-2)$. Desse modo,

$$\overrightarrow{PP_0} = (1-2,-1-2,2-3) = (-1,-3,-1).$$

$$\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$6k + 3i - 2j \leftarrow$ *trocam de sinal*

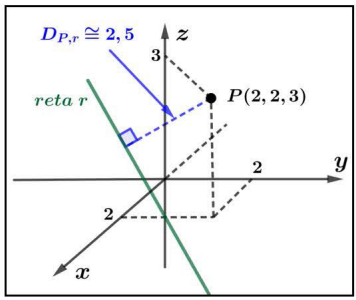
$6i - 2j - 3k$

$$\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v} = 9i - 4j + 3k$$

$$\left|\left(\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v}\right)\right| = \sqrt{9^2 + (-4)^2 + 3^2} = \sqrt{81 + 16 + 9} = \sqrt{106}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$$

$$D_{P,r} = \frac{\left|\left(\overrightarrow{PP_0} \times \vec{v}\right)\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{106}}{\sqrt{17}} \Rightarrow \boxed{D_{P,r} \cong 2{,}5\ u.c}.$$



EXERCÍCIOS 22.4

1)Calcule a equação vetorial (paramétrica) e simétrica da reta que passa pelo ponto A e na direção do vetor $\vec{v}$, respectivamente, em cada caso.

a) A $(-1,0,2)$ e $\vec{v} = (0,1,-3)$;
b) A $(1,1,1)$ e $\vec{v} = (1,1,1)$;
c) A $(-2,2,-2)$ e $\vec{v} = (0,-1,-1)$;
d) A $(0,0,1)$ e $\vec{v} = (1,0,0)$.

2)Calcular a equação vetorial (paramétrica) e simétrica da reta que passa pelos pontos:

a) A $(0,1,2)$ e B$(2,1,0)$;
b) A $(-2,1,5)$ e B$(3,-1,2)$;
c) A $(5,15,20)$ e B$(-5,-15,-20)$;
d) A $(1,0,1)$ e B$(1,1,0)$.

3)Calcule a distância dos pontos às respectivas retas:

a) $P(1,0,1)$ à r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases}$;

b) $P(-1,2,-1)$ à r: $\boxed{x = \frac{y+1}{2} = z - 1}$.

4)Verifique se as retas são paralelas, coincidentes, concorrentes ou reversas.

a) r: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = t \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = 2t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = -t' \end{cases}$

b) r: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 - 4t \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = 1 - 2t' \\ y = -t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$

c) r: $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = 1 + 3t' \\ y = -1 + 6t' \\ z = 4 - 3t' \end{cases}$

d) r: $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}$ e s: $\begin{cases} x = -1 + 2t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = -1 + 2t' \end{cases}$

22.9. Equação do plano

Sejam P e Q dois pontos pertencente a um plano e o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ normal a esse plano, conforme a figura 22.9.1. E seja ainda um vetor genérico $\overrightarrow{PQ}$ em que $P(x_0, y_0, z_0)$ é fixo e $Q(x, y, z)$ é variável. Como o vetor $\overrightarrow{PQ}$ é perpendicular à normal $\vec{n}$, temos que o produto escalar entre eles é zero. Assim,

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.$$

Como $-ax_0 - by_0 - cz_0$ é constante denominaremos de coeficiente d, e dessa maneira a **equação geral de um plano** pode ser dada por

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0.}$$

Onde $\vec{n} = (a, b, c)$ é o vetor normal a esse plano.

Exemplo: Vamos calcular a equação geral de um plano que possui vetor normal $\vec{n} = (-1, 2, 4)$ e ponto $Q(0, 1, -1)$?

Solução:

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$
$$(-1, 2, 4).(x - 0, y - 1, z + 1) = 0$$
$$-x + 2y - 2 + 4z + 4 = 0$$
$$\boxed{-x + 2y + 4z + 2 = 0.}$$

Equação paramétrica de um plano: Sejam $P(x_0, y_0, z_0)$ e $Q(x, y, z)$ dois pontos pertencentes a um plano. Seja ainda, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, dois vetores distintos e paralelos a esse plano (ou pertencentes ao plano). O vetor genérico $\overrightarrow{PQ}$ da figura 22.9.2 é dado pela soma

$$\overrightarrow{PQ} = t.\vec{u} + h.\vec{v} \Rightarrow Q - P = t.\vec{u} + h.\vec{v} \Rightarrow \boxed{Q = P + t.\vec{u} + h.\vec{v}}.$$

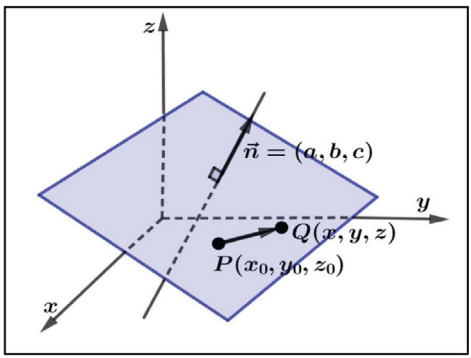


Figura 22.9.1

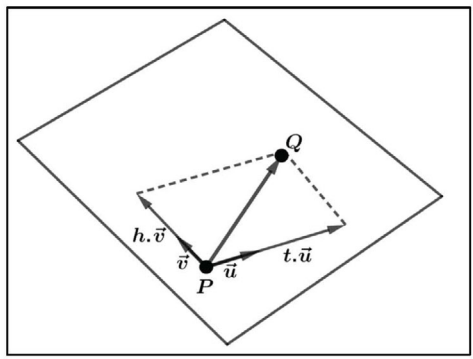


Figura 22.9.2

Substituindo as informações dos pontos e dos vetores, temos a **equação paramétrica de um plano:**

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t.(a_1, b_1, c_1) + h.(a_2, b_2, c_2).$$

Exemplo: Qual a equação paramétrica de um plano paralelo aos vetores $\vec{u} = (0,1,2)$ e $\vec{v} = (0,-1,1)$ sabendo que o ponto $(5,2,1)$ pertence a esse plano?

Solução:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t.(a_1, b_1, c_1) + h.(a_2, b_2, c_2)$$

$$\boxed{(x, y, z) = (5,2,1) + t.(0,1,2) + h.(0,-1,1)}.$$

2º exemplo: Qual a equação paramétrica e geral de um plano que passa pelos pontos $A(2,1,0)$, $B(1,0,2)$ e $C(1,3,2)$?

Solução:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1-2, 0-1, 2-0) = \boxed{\overrightarrow{AB} = (-1,-1,2)}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (1-1, 3-0, 2-2) = \boxed{\overrightarrow{BC} = (0,3,0)}$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t.\overrightarrow{AB} + h.\overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{(x, y, z) = (2,1,0) + t.(-1,-1,2) + h.(0,3,0)}.$$

Para encontrar a equação geral precisamos de um vetor normal $\vec{n} = (a, b, c)$ a esse plano. Para isso, vamos utilizar o produto vetorial:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow \overrightarrow{AB}. \\ \leftarrow \overrightarrow{BC} \end{matrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{n} = -6i - 3k}.$$

$0 - 6i + 0 \leftarrow$ *trocam de sinal*

$0 + 0 - 3k$

Escolhendo o ponto $A(2,1,0)$, dispomos de

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(-6,0,-3).(x-2, y-1, z-0) = 0$$

$$\boxed{-6x - 3z + 12 = 0}\ \textit{equação geral.}$$

Para mostrar que o ponto escolhido poderia ter sido qualquer um, faremos com o ponto $B(1,0,2)$:

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(-6,0,-3).(x-1, y-0, z-2) = 0$$

$$-6x + 6 - 3z + 6 = 0$$

$$\boxed{-6x - 3z + 12 = 0}.$$

Esse plano está na figura 22.9.3.

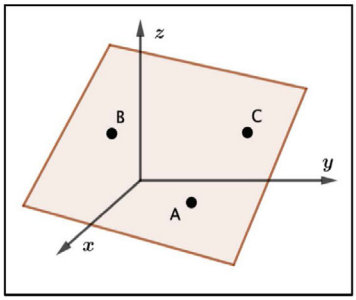


Figura 22.9.3

3º exemplo: Dados os planos: $\alpha: -x - y + 3z + 1 = 0$ e $\beta: -2x + 3y + z - 1 = 0$. Calcule a equação da reta de interseção desses planos.

Solução: O vetor diretor $\vec{v}$ da reta é ortogonal aos vetores normal $\vec{n_1}$ e $\vec{n_2}$ de cada plano. Assim, vamos calcular esse vetor diretor.

$$\vec{n_1} = (-1,-1,3) \text{ e } \vec{n_2} = (-2,3,1) \Rightarrow \vec{n} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$-2k - 9i + j \leftarrow$ *trocam de sinal*

$-i - 6j - 3k$

$$\vec{n} = -2k - 9i + j - i - 6j - 3k \Rightarrow \boxed{\vec{n} = -10i - 5j - 5k}.$$

Precisamos de um ponto inicial que pertença aos dois planos, para isso vamos fazer $z = 0$, nos dois planos e resolver o sistema.

$$\alpha: -x - y + 3z + 1 = 0 \Rightarrow -x - y + 3.0 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$-x - y = -1 \Rightarrow \boxed{x + y = 1}.$$
$$\beta: -2x + 3y + z - 1 = 0 \Rightarrow \beta: -2x + 3y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{-2x + 3y = 1}.$$
$$\begin{cases} x + y = 1 \quad (\times 2) \\ -2x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow 5y = 3 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{5}}.$$
$$x + y = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{5}}.$$

Com isso, a equação da reta é

$$(x,y,z) = \left(\frac{2}{5},\frac{3}{5},0\right) + t.(-10,-5,-5) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = \frac{2}{5} - 10t \\ y = \frac{3}{5} - 5t \\ z = -5t \end{cases}}.$$

Uma solução alternativa, seria resolver o sistema que envolve os planos, uma vez que a reta de interseção é comum a esses planos. Da seguinte forma,

$$\begin{cases} -x - y + 3z + 1 = 0 \\ -2x + 3y + z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{x + y - 1}{3} = 2x - 3y + 1 \Rightarrow$$
$$\frac{x + y - 1}{3} = 2x - 3y + 1 \Rightarrow -5x + 10y - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2y - \frac{4}{5}}.$$
$$z = \frac{x + y - 1}{3} = \frac{2y - \frac{4}{5} + y - 1}{3} \Rightarrow \boxed{z = y - \frac{3}{5}}.$$

Utilizando y como parâmetro t', obtemos

$$\boxed{\begin{cases} x = -\frac{4}{5} + 2t' \\ y = t' \\ z = -\frac{3}{5} + t' \end{cases}}.$$

Para se certificar que essa equação de reta equivale a calculada anteriormente, faça:

$$t' = \frac{3}{5} - 5t$$

22.10. Ângulo entre dois planos

A mesma concepção aplicada ao cálculo do ângulo entre retas, pode ser aplicada ao ângulo entre planos. O módulo do cosseno do ângulo entre os planos tem o mesmo valor do módulo do cosseno entre os vetores normais de cada plano (ver figura 22.10.1).

Sendo assim, dados dois planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: a'x + b'y + c'z + d' = 0$ e suas respectivas normais $\overrightarrow{n_1} = (a, b, c)$ e $\overrightarrow{n_2} = (a', b', c')$, o ângulo entre os dois planos é dado por

$$|cos\alpha| = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|}.$$

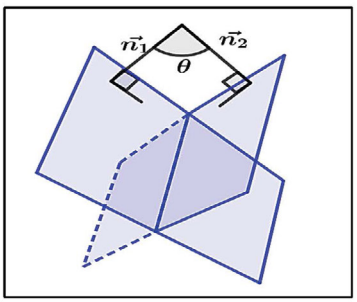


Figura 22.10.1

Exemplo: Vamos calcular o ângulo entre os planos anteriores: $\alpha: -x - y + 3z + 1 = 0$ e $\beta: -2x + 3y + z - 1 = 0$.

Solução:

Como $\overrightarrow{n_1} = (-1, -1, 3)$ e $\overrightarrow{n_2} = (-2, 3, 1)$ são as normais de cada plano, temos

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} \Rightarrow \sqrt{11}$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} \Rightarrow \sqrt{14}$$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = -1.(-2) - 1.3 + 3.1 = 2$$

$$|cos\alpha| = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow |cos\alpha| = \frac{2}{\sqrt{11}.\sqrt{14}} \cong 0{,}16 \Rightarrow \boxed{\alpha \cong 80{,}5°}.$$

2º exemplo: Dados os planos: $\alpha: -x - 2y - 5z + 5 = 0$ e $\beta: -2x - 4y - 10z + 13 = 0$. Vamos calcular:

a) A equação paramétrica da reta interseção desses planos;

Solução: $\overrightarrow{n_1} = (-1, -2, -5)$ e $\overrightarrow{n_2} = (-2, -4, -10)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} == \begin{vmatrix} i & j & k & i & j \\ -1 & -2 & -5 & -1 & -2 \\ -2 & -4 & -10 & -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$-4k - 20i - 10j$

$20i + 10j - 4k$

$$\vec{n} = -4k - 20i - 10j + 20i + 10j - 4k \Rightarrow \boxed{\vec{n} = 0}.$$

Significa que os planos em questão são paralelos e não existe reta de interseção.

b) O ângulo entre os planos.

Solução:

Já sabemos que os planos são paralelos e portanto, o ângulo entre eles é nulo. Entretanto, vamos aos cálculos para a confirmação dessa informação.

Os vetores normais de cada plano são $\overrightarrow{n_1} = (-1, -2, -5)$ e $\overrightarrow{n_2} = (-2, -4, -10)$. Logo,

$$|\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} \Rightarrow \sqrt{30}$$

$$|\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-10)^2} \Rightarrow \sqrt{120}$$

$$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = -1.(-2) + (-2).(-4) + (-5).(-10) = 60$$

$$|cos\alpha| = \frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} \Rightarrow |cos\alpha| = \frac{60}{\sqrt{30}.\sqrt{120}} = \frac{60}{60} = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0°}.$$

22.11. Distância entre dois planos

Sejam dois planos $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ e $\beta: ax + by + cz + d' = 0$, representados na figura 22.11.1 (planos em perfil). Seja uma reta r perpendicular aos planos que passa pela origem.

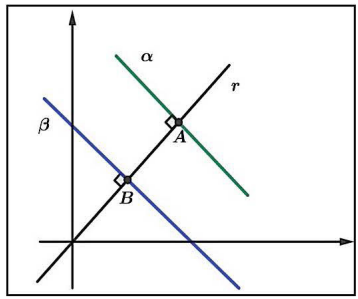


Figura 22.11.1

A equação da reta r é dada por

$$r: \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases}.$$

O ponto A é dado pela interseção entre a reta r e o plano α. Desse modo,

$$ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow aat + bbt + cct + d = 0 \Rightarrow$$
$$a^2t + b^2t + c^2t + d = 0 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)t = -d \Rightarrow$$
$$\boxed{t = -\frac{d}{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

$$A = \left(\frac{-ad}{(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{-bd}{(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{-cd}{(a^2 + b^2 + c^2)}\right).$$

O ponto B é dado pela interseção entre a reta r e o plano β, como os cálculos são análogos, temos

$$B = \left(\frac{-ad'}{(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{-bd'}{(a^2 + b^2 + c^2)}, \frac{-cd'}{(a^2 + b^2 + c^2)}\right).$$

A distância do ponto A ao ponto B é a distância entre os planos, assim

$$D_{\alpha,\beta} = D_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

$$D_{\alpha,\beta} = \sqrt{\left(\frac{-ad'}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{-ad}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{-bd'}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{-bd}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{-cd'}{a^2 + b^2 + c^2} - \frac{-cd}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2}$$

$$D_{\alpha,\beta} = \sqrt{\left(\frac{a(d - d')}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{b(d - d')}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(\frac{c(d - d')}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2}$$

$$D_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)(d-d')^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}} \Rightarrow D_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{(d-d')^2}{(a^2+b^2+c^2)}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{D}_{\alpha,\beta} = \left|\frac{(d-d')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.}$$

Exemplo: Vimos na seção anterior que os planos $\alpha: -x-2y-5z+5=0$ e $\beta: -2x-4y-10z+13=0$ são paralelos. Como β equivale a $\beta: -x-2y-5z+13/2=0$, a distância entre eles é

$$D_{\alpha,\beta} = \left|\frac{(d-d')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \Rightarrow$$

$$D_{\alpha,\beta} = \left|\frac{(5-13/2)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-10)^2}}\right| \Rightarrow D_{\alpha,\beta} = \left|\frac{(-3/2)}{\sqrt{105}}\right| \Rightarrow \boxed{D_{\alpha,\beta} = \frac{3\sqrt{105}}{2} u.c}.$$

22.12. Distância entre ponto e plano

Podemos utilizar a fórmula da distância entre dois planos anterior e demonstrar a fórmula para o cálculo de distância entre ponto e plano. Fazendo um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertencente ao plano β, temos

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d' = 0 \Rightarrow d' = -ax_0 - by_0 - cz_0.$$

Substituindo em (1), encontramos

$$D_{\alpha,\beta} = \left|\frac{(d-d')}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right| \Rightarrow D_{\alpha,\beta} = \left|\frac{(d-(-ax_0-by_0-cz_0))}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|.$$

Dessa maneira, sejam um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ e um plano $\alpha: ax+by+cz+d=0$, a distância de P à α, pode ser dado por

$$\boxed{\mathrm{D}_{P,\alpha} = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|}$$

Perceba a similaridade dessa fórmula com a fórmula da distância de um ponto à uma reta no plano bidimensional:

$$\mathrm{D}_{P,r} = \left|\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|.$$

Exemplo: Calcule a distância do ponto $P(1,-1,0)$ ao plano $\alpha: 3x+4y+z-5=0$.

Solução:

$$D_{P,\alpha} = \left|\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$$

$$D_{P,\alpha} = \left|\frac{3.1+4.(-1)+1.0-5}{\sqrt{3^2+4^2+1^2}}\right| = \left|\frac{3-4-5}{\sqrt{26}}\right| = \left|\frac{-6}{\sqrt{26}}\right| = \frac{6}{\sqrt{26}} \Rightarrow \boxed{D_{P,\alpha} = \frac{3\sqrt{26}}{13} u.c}.$$

EXERCÍCIOS 22.5

1)Qual a equação geral de um plano que possui vetor normal $\vec{n} = (1, -1, 2)$ e ponto $Q(5, 1, -3)$?

2)Qual a equação paramétrica de um plano paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, 1, -2)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ sabendo que o ponto $(1, 0, 0)$ pertence a esse plano?

3)Calcule a equação paramétrica e geral do plano que passa pelos pontos:

a) $A(1,1,2)$, $B(5,0,1)$ e $C(-1,0,4)$

b) $A(0,1,0)$, $B(0,0,1)$ e $C(-1,0,1)$

c) $A(5,7,9)$, $B(-1,2,-3)$ e $C(-2,1,2)$

d) $A(1,1,-1)$, $B(-7,1,-7)$ e $C(3,3,3)$.

4)Dados os planos: $\alpha: -3x - 4y + 5z + 2 = 0$ e $\beta: -x - y + z - 1 = 0$. Calcule:

a) A equação paramétrica da reta de interseção dos dois planos;

b) O ângulo entre os dois planos.

5)Dados os planos: $\alpha: 5x + 12y + 20z + 10 = 0$ e $\beta: 10x + 15y + 20z + 12 = 0$. Calcule:

a) A equação paramétrica da reta de interseção dos dois planos;

b) O ângulo entre os dois planos.

6)Calcule a distância entre os planos:

a) $\alpha: x + y + z + 1 = 0$ e $\beta: x + y + z - 2 = 0$;

b) $\alpha: 2x - 2y + z + 8 = 0$ e $\beta: -6x + 6y - 3z - 33 = 0$.

7)Calcule a distância entre os respectivos ponto P e plano α, em cada caso.

a) $P(0,0,0)$ ao plano $\alpha: x + y + z - 1 = 0$.

b) $P(-1,0,2)$ ao plano $\alpha: 2x + 3y + z - 7 = 0$.

c) $P(10,10,5)$ ao plano $\alpha: 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.

8)Encontre as equações paramétrica e geral do plano determinado pelas seguintes retas concorrentes.

a) $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 - 2t' \\ z = t' \end{cases}$.

b) $r: \begin{cases} x = -4t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x = 4t' \\ y = 1 - t' \\ z = 5 - 3t' \end{cases}$.

9)Encontre a equação geral do plano que é paralelo ao plano $\alpha: -x + 2y - 7z + 12 = 0$ e passa pelo ponto $P(2,4,6)$.

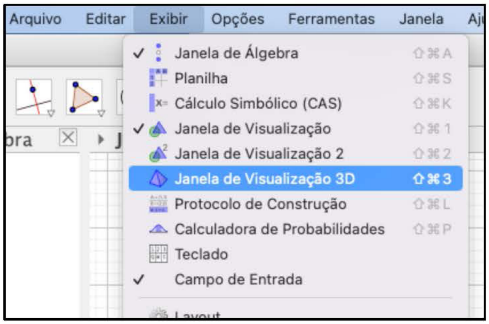
10) Encontre a equação paramétrica de dois planos distintos cuja interseção é a reta $x = 1 - 3t$, $y = 5 - 7t$ e $z = 3 + 4t$.

11) Encontre a equação geral de um plano tangente à esfera $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 10$ no ponto $(2,3,6)$.

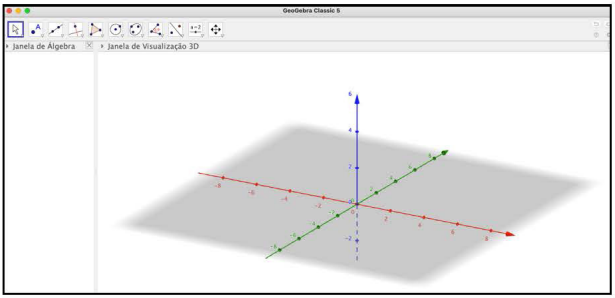
22.13. Objetos matemáticos no geogebra 3D

Nesta seção, vamos aprender a visualizar objetos matemáticos como: ponto, vetor, reta, plano e esfera, no geogebra 3D.

Para exibir a janela de visualização 3D do software, clique em "exibir" em seguida em "janela de visualização 3d", conforme a figura a seguir.



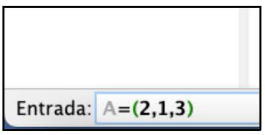
Em seguida, feche a "janela de visualização" para ficar somente a "janela de visualização 3D":



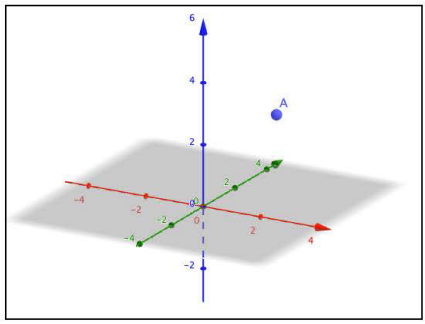
O eixo em vermelho representa o eixo x, em verde o eixo y e em azul o eixo z. As cores desses eixos podem ser alterados nas preferências do software.

22.13.1. Ponto no espaço no geogebra

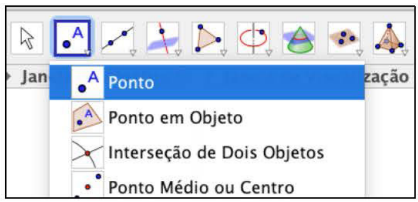
Para representar um ponto no espaço, digite no campo entrada uma letra maiúscula seguida de "=" e as coordenadas do ponto. Veja um exemplo na ilustração a seguir.



O software mostrará o ponto A no espaço tridimensional.



Outra forma é utilizar a ferramenta "ponto", ilustrado a seguir. Posteriormente, basta clicar livremente na janela de visualização ou no local escolhido.



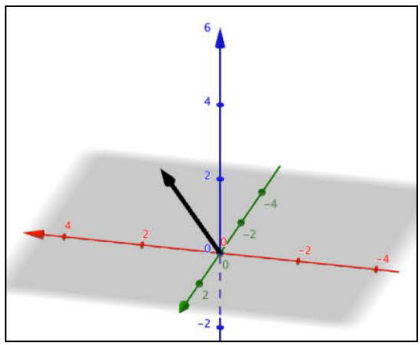
22.13.2. Vetor no espaço no geogebra

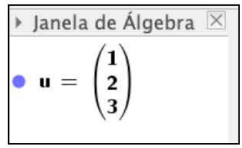
Para representar um vetor, digite no campo entrada a palavra "vetor" e o software apresentará várias opções, dentre elas: "Vetor(<Ponto>)" e "Vetor(<Ponto Inicial>, <Ponto Final>)".

- "Vetor(<Ponto>)"

Selecionando essa opção, o software construirá um vetor posicional com a ponta (do vetor) no ponto.

Exemplo: "Vetor((1,2,3))", o software mostrará um vetor que inicia na origem e finaliza no ponto (1,2,3). Veja a ilustração a seguir.



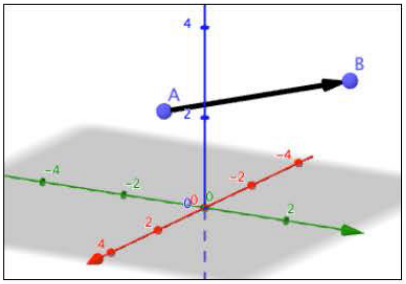


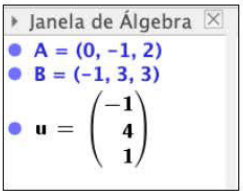
Outra forma de representar esse vetor é escrevendo uma letra minúscula acompanhada de "=" e dos componentes do vetor entre parênteses. Exemplo: "u=(1,2,3)".

- "Vetor(<Ponto Inicial>, <Ponto Final>)".

Selecionando essa opção, o software construirá um vetor partindo do ponto inicial e finalizando no ponto final.

Exemplo: Com dois pontos A e B já representado, escreva: "vetor (A, B) e o software mostrará o vetor. Veja a ilustração a seguir para os pontos: A =(0,-1,2) e B = (-1,3,3):





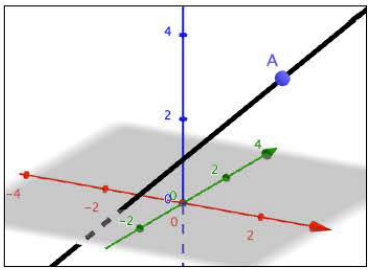
22.13.3. Reta no espaço no geogebra

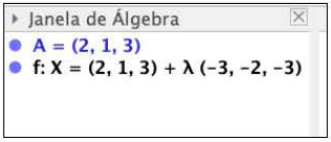
Para representar uma reta no espaço, digite no campo entrada a palavra "reta" e o software apresentará as três opções:

- "Reta(<Ponto>, <Ponto>)"

Selecionando essa opção, o software construirá a reta a partir de dois pontos.

Exemplo: "Reta(A, (-1,-1,0))", o software mostrará uma reta que passa pelo ponto A (que já está representado) e pelo ponto (-1,-1,0). A janela de álgebra mostrará a equação paramétrica dessa reta. A seguir estão as ilustrações desse exemplo.





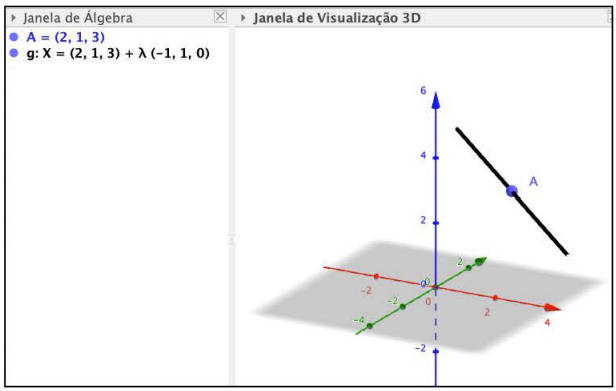
- "Reta(<Ponto>, <Reta Paralela>)"

Selecionando essa opção, o software construirá a reta a partir de um ponto e uma reta já representada.

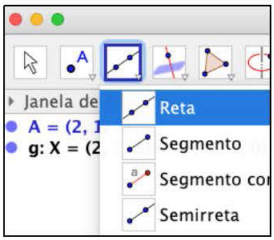
- "Reta(<Ponto>, <Vetor Diretor>)"

Ao selecionar essa última opção, o software construirá a reta a partir de um ponto e um vetor diretor. Caso esse vetor já esteja representado, por "u" por exemplo, basta escrever: "Reta (A,u)". Caso contrário, pode-se digitar o vetor diretor desejado.

Exemplo: "Reta(A, (1,2,3))", o software mostrará uma reta que passa pelo ponto A (que já está representado), segundo a direção do vetor (1,2,3). Veja a ilustração desse exemplo a seguir.



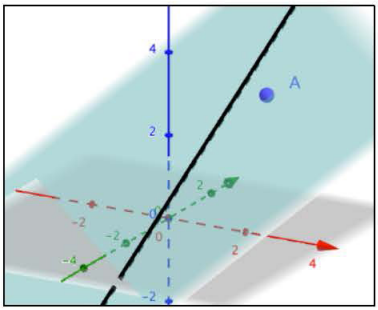
Uma forma de desenhar uma reta livremente é utilizando a opção ilustrada a seguir. Ao selecionar, clique em dois pontos (ou lugares) no espaço e software mostrará a reta.

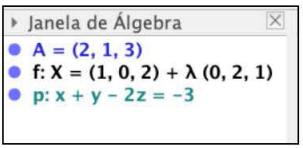


22.13.4. Plano no espaço no geogebra

Para representar um plano no espaço, digite no campo entrada a palavra "plano" e o software apresentará várias opções. As opções são intuitivas e seguem o mesmo rito da reta. Como exemplo faremos o comando "Plano(<Ponto>, <Reta>)".

Ao digitar "Plano(A, f)", com o ponto A e a reta f já representados, o software mostrará o plano:

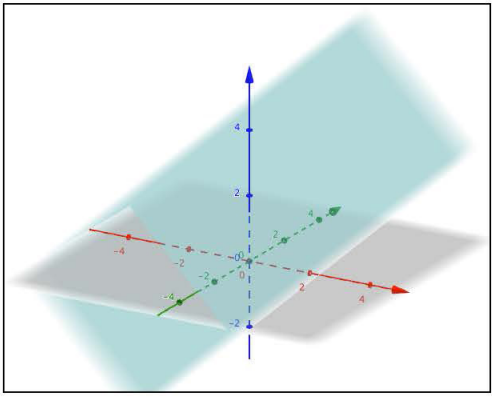


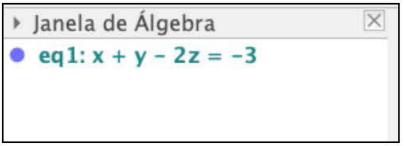


Outras opções além dos comandos citados, estão listada na figura a seguir.

Além disso é possível também digitar a equação geral no campo de entrada do software.

Exemplo: No campo de entrada digite a equação: "x + y - 2z + 3 = 0" e o software mostrará o plano que representa essa equação.



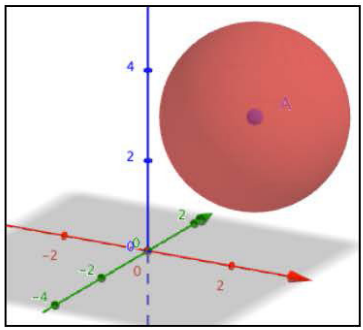


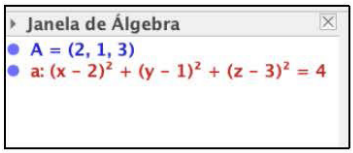
22.13.5. Esfera no geogebra

Para representar uma esfera, digite no campo entrada a palavra "esfera" e o software apresentará duas opções: "Esfera(<Ponto>, <Raio>)" e "Esfera(<Ponto>, <Ponto>)".

Com o ponto A já representado, basta digitar "Esfera (A, 2)" e o software

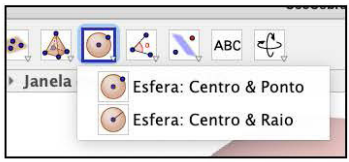
mostrará uma esfera de raio 2 e a janela de álgebra mostrará a equação dessa esfera.





Se preferir com dois pontos A e B já representados, use o comando: "Esfera(A, B)" e o software mostrará uma esfera de centro em A que passa em B.

Outra forma também de construir uma esfera está nas duas ferramentas na opção ilustrada a seguir. Intuitivamente segue os mesmos passos dos comandos anteriores.



CAPÍTULO

23

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS (DERIVADAS PARCIAIS)

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS (DERIVADAS PARCIAIS)

23. FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS (DERIVADAS PARCIAIS)

Existem muitas fórmulas, expressões ou funções em que uma variável não depende exclusivamente de outra variável, mas sim de duas ou mais. Por exemplo, a média aritmética de n números reais, a área de uma figura plana (base x altura), o volume, a produtividade de um cultivo, etc. Nesse estudo, vamos abordar funções com duas ou mais variáveis em que se aplicam esses casos.

23.1. Gráfico de funções com duas variáveis

Enquanto as funções $y = f(x)$ tem seus gráficos representados pelo sistema de coordenadas cartesianas no plano xy (bidimensional), como uma sequência de pontos representados pelo par ordenado (x, y), as funções com duas variáveis, que denotamos por $z = f(x, y)$, tem seu gráfico representado no espaço xyz (tridimensional), em uma sequência de pontos representados pela terna ordenada (x, y, z).

23.1.1. Gráfico de uma superfície plana

Uma das funções de duas variáveis mais simples é a função na forma

$$f(x, y) = Ax + By + C.$$

Essa função possui uma superfície plana (ou um plano) como sendo sua representação no espaço, pois

$$\underbrace{f(x,y)}_{z} \times D = (Ax + By + C) \times D \Rightarrow \underbrace{DA}_{a} x + \underbrace{DB}_{b} y + \underbrace{DC}_{d} \underbrace{-D}_{c} z = 0$$

é um plano na forma: $ax + by + cz + d = 0$.

Para representar essa função no espaço, há alguns casos a considerar. Na ausência de duas variáveis, o plano será paralelo ao plano das variáveis ausentes, pois, nesse caso, essas variáveis assumem qualquer valor do espaço.

Exemplos:

• O plano representado pela função $z = 1$ é paralelo ao plano xy (ver figura 23.1.1.1). Pois, as variáveis ausentes são x e y.

• O plano representado pela função $y = 2$ é paralelo ao plano zx (ver figura 23.1.1.2). Uma vez que, as variáveis ausentes são x e z.

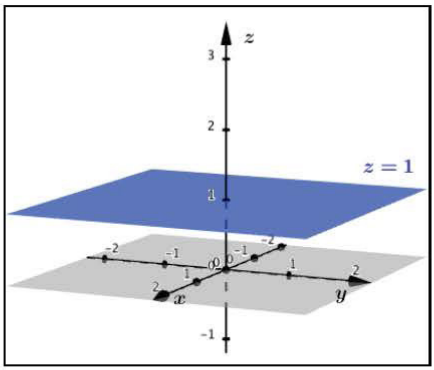


Figura 23.1.1.1

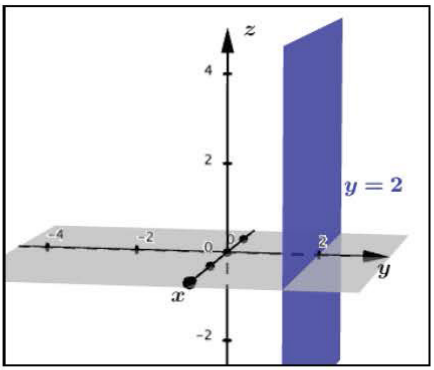


Figura 23.1.1.2

Na ausência de apenas uma variável, o plano será paralelo ao eixo da variável ausente, pois essa variável assume qualquer valor do espaço.

Exemplos:

• O plano representado pela função $x + y = 2$ é paralelo ao eixo z. Veja na figura 23.1.1.3 que o plano secciona o plano xy exatamente na reta $x + y = 2$.

• O plano representado pela função $2x - 3z = 1$ é paralelo ao eixo y conforme figura 23.1.1.4.

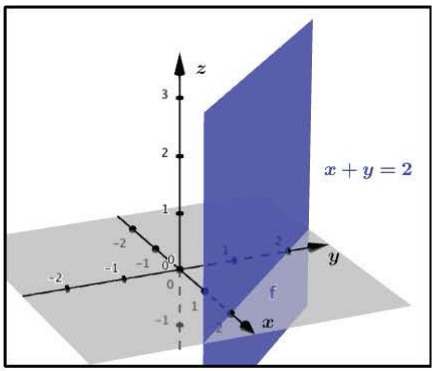


Figura 23.1.1.3

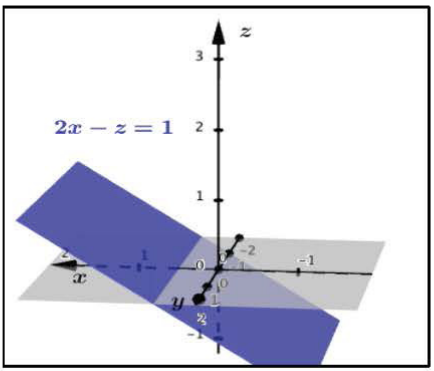


Figura 23.1.1.4

Quando não há ausência de variável, significa que o plano não é paralelo a nenhum dos eixos x, y ou z. Uma dica para melhor visualização desse tipo plano, é atribuir um valor nulo para cada variável e desenhar as retas nos planos das variáveis presentes.

Exemplos:

- O plano representado pela função $3x - y + 3z = 3$.

Fazendo $y = 0$, temos $3x + 3z = 3 \Rightarrow \boxed{x = -z + 1}$ (uma reta) e o plano da função seccionará o plano xz exatamente nessa reta.

Fazendo $z = 0$, o plano da função seccionará o plano xy na reta $3x - y = 3 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 3}$.

E sendo $x = 0$, temos $-y + 3z = 3 \Rightarrow \boxed{y = 3z - 3}$ e o plano da função seccionará o plano yz exatamente nessa reta.

O plano da função está na figura 23.1.1.5 e na figura 23.1.1.6 está apenas a parte do plano delimitada pelas retas calculadas.

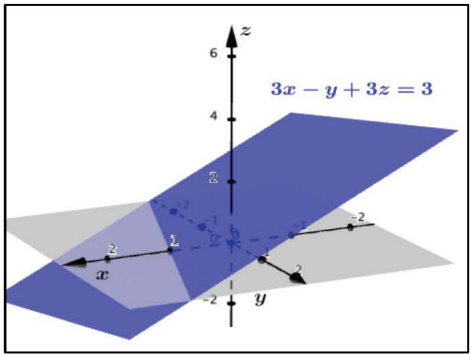


Figura 23.1.1.5

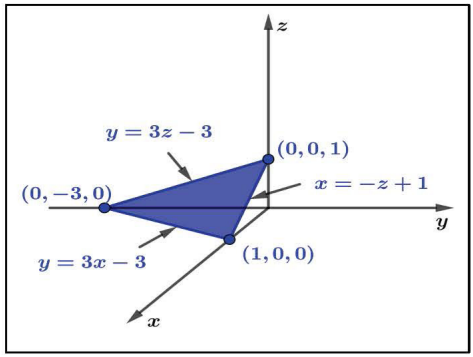


Figura 23.1.1.6

- O plano representado pela função $f(x, y) = 1 - y - x$.

Fazendo $y = 0$, temos

$z = 1 - y - x \Rightarrow \boxed{x = -z + 1}$.

Para $z = 0$:

$z = 1 - y - x \Rightarrow \boxed{y = -x + 1}$.

E para $x = 0$, encontramos

$z = 1 - y - x \Rightarrow \boxed{y = -z + 2}$.

O plano que representa essa função está na figura 23.1.1.7 somente com a parte do plano delimitada por essas retas.

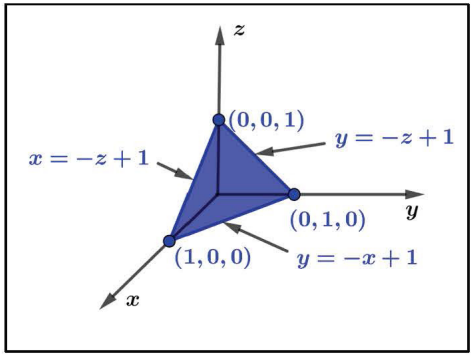


Figura 23.1.1.7

A subseção 22.13.4 sobre planos no espaço, mostra como visualizar um plano utilizando o geogebra.

Qualquer outra função diferente do padrão $f(x, y) = Ax + By + C$, terá sua representação no espaço em forma de superfície não plana, conforme veremos nos próximos itens.

23.1.2. Gráfico de superfícies cilíndricas

Definição 23.1.2.1: Denominamos de cilíndrica toda superfície constituída de retas (denominadas de geratrizes) paralelas a um dos eixos e perpendicular à uma curva plana.

A superfície cilíndrica ocorre quando há ausência de uma variável na função. Nesse tipo de superfície, as retas geratrizes são paralelas ao eixo da variável ausente e se estendem perpendicularmente ao longo da curva dada, no plano das variáveis presentes. Exemplos:

- A superfície gerada pela função $z = e^{-x}$ possui retas geratrizes paralelas ao eixo y (que é a variável ausente) e perpendiculares a curva exponencial no plano xz (plano das variáveis presentes). O gráfico dessa superfície está na figura 23.1.2.1 e as ilustrações da curva e das retas geratrizes estão na figura 23.1.2.2.
- A superfície da função $z = y^2$ possui retas geratrizes paralelas ao eixo x (variável ausente) e perpendiculares à parábola no plano yz. Ver figura 23.1.2.3.
- A função $y = x^3$ possui retas geratrizes paralelas ao eixo z (variável ausente) e perpendiculares à função cúbica $y = x^3$ no plano yx. Ver figura 23.1.2.4.

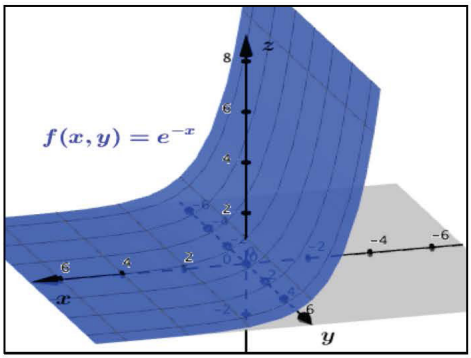


Figura 23.1.2.1

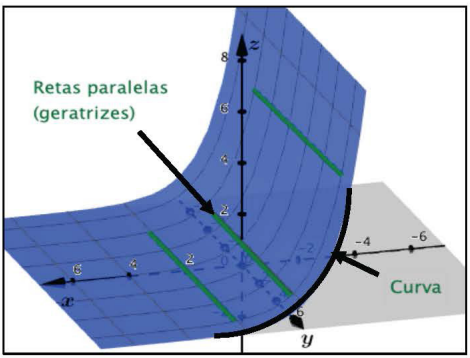


Figura 23.1.2.2

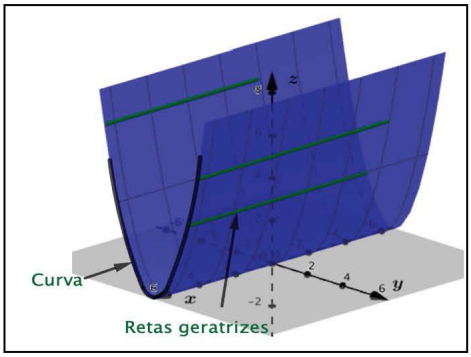


Figura 23.1.2.3

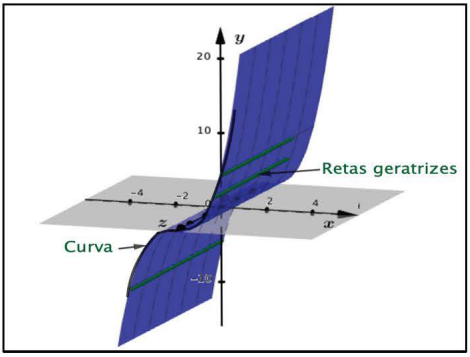


Figura 23.1.2.4

23.1.3. Gráfico de superfícies quádricas

Definição 23.1.3.1: Denominamos de quádrica toda superfície gerada a partir da equação do 2º grau

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde pelo menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F é diferente zero.

As superfícies quádricas são superfícies que apresentam cônicas (elipse, hipérbole ou parábola) quando seccionadas por planos (que denominados de **traços**) paralelos ao planos coordenados xy, xz e yz.

A seguir estão dois exemplos de superfícies quádricas, um elipsoide na figura 23.1.3.1 e um paraboloide na figura 23.1.3.2. Ambos com um traço mostrando a cônica gerada em cada caso.

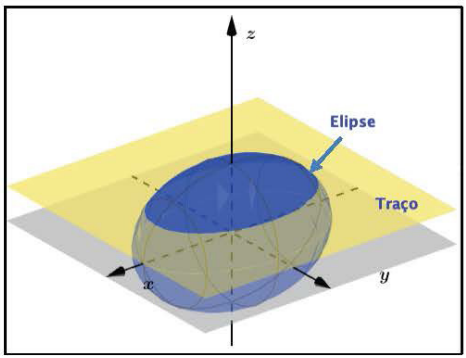


Figura 23.1.3.1

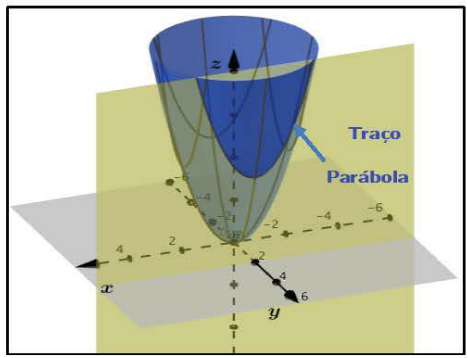


Figura 23.1.3.2

Podemos inclusive utilizar esses traços para construir a superfície (o gráfico) da função. Para isso, atribuímos um valor k arbitrário para uma variável escolhida e analisamos qual o tipo de curva que se dá no plano das outras variáveis para quaisquer valores de k.

Exemplo: $z = y - x^2$

Solução: Fazendo $y = k$, temos $z = -x^2 + k$. Como k assume qualquer valor, dispomos de parábolas com concavidade para baixo nos traços paralelos ao plano xz. Ao fazer $z = k$, temos $y = x^2 + k$ e para qualquer valor de k, encontramos parábolas com concavidade para cima nos traços paralelos ao plano xy. Por fim, adotando $x = k$ dispomos de $z = y - k^2$ e para qualquer valor de k, temos retas nos traços paralelos ao plano zy. O gráfico dessa superfície está na figura 23.1.3.3 com um exemplo de traço $z = k$.

2º exemplo: $f(x,y) = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

Solução: Fazendo $z = k$, obtemos: $k = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$. Os traços paralelos ao plano xy

são hipérboles. Fazendo $y = k$ ou $x = k$, dispomos de parábolas. A primeira com concavidade para baixo e a segunda com concavidade para cima, respectivamente, em traços paralelos aos planos zx e zy. Constate essa informação no gráfico dessa superfície na figura 23.1.3.4 que possui um exemplo de traço $y = k$.

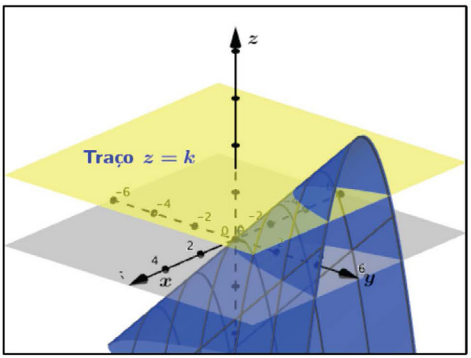


Figura 23.1.3.3

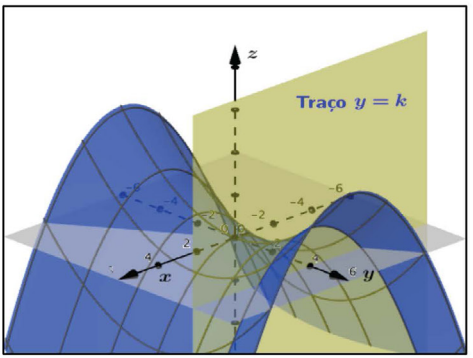


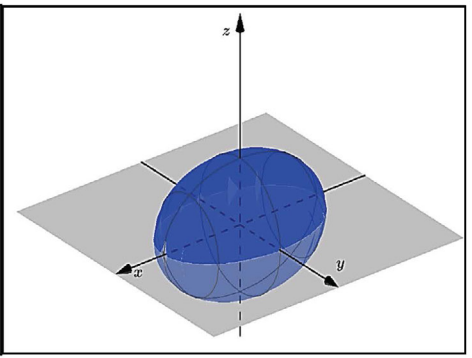
Figura 23.1.3.4

As superfícies quádricas mais comuns estão representadas a seguir com seus respectivos nomes, equações e características.

Nome: **Elipsoide**

Equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

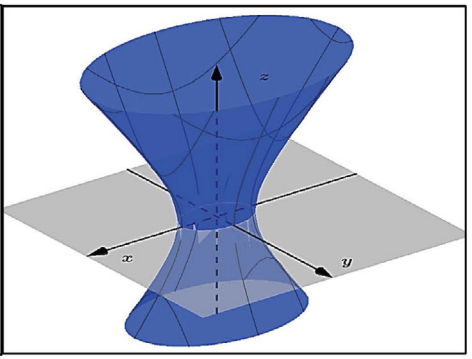
Característica: Os traços paralelos a qualquer plano dos eixos coordenados $(xy, xz \text{ ou } yz)$, são elipses. Para $a = b = c = r$, temos uma esfera de raio r.



Nome: **Hiperboloide de uma folha**

Equação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

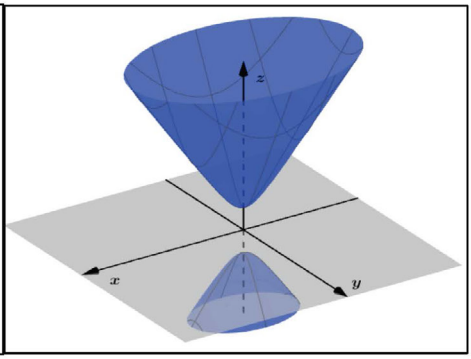
Característica: Os traços paralelos aos eixos coordenados xy, são elipses. Os traços paralelos ao eixo xz e yz, que intersectam a superfície, são hipérboles, com exceção, dos próprios planos xz e yz, que são pares de retas concorrentes.



Nome: **Hiperboloide de duas folhas**

Equação: $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

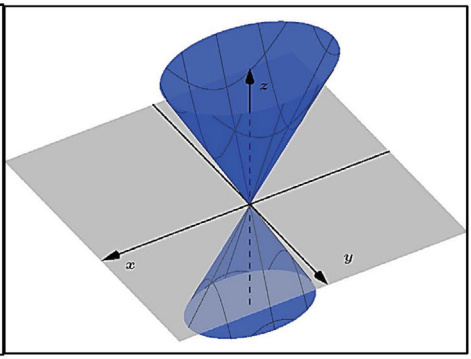
Característica: Não há superfície no plano xy (não há traço). Os traços paralelos ao plano xy, são elipses. Os traços paralelos ao eixo xz e yz, são hipérboles.



Nome: **Cone elíptico**

Equação: $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

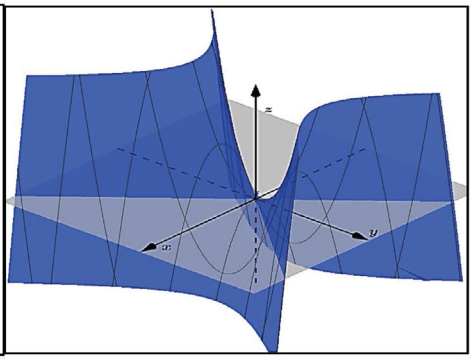
Característica: O plano xy é um ponto. Os traços paralelos ao plano xy, são elipses. Os traços paralelos ao eixo xz e yz, são hipérboles, com exceção, dos próprios planos xz e yz, que são pares de retas que se intersectam na origem.



Nome: **Paraboloide hiperbólico**

Equação: $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

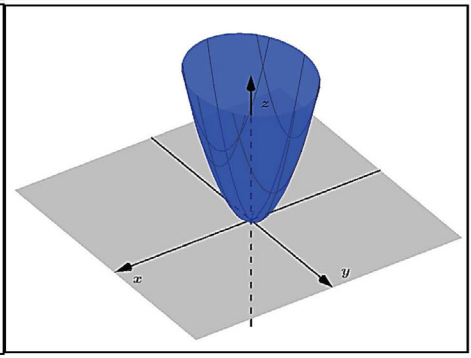
Característica: O plano xy que intersecta a superfície, são pares de retas que se cruzam na origem, já os traços paralelos a esse plano, são hipérboles. Os traços paralelos a xz e yz, são parábolas.



Nome: **Paraboloide elíptico**

Equação: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

Característica: O plano xy é um ponto (origem). Os traços paralelos ao plano xy, são elipses. Os traços paralelos a xz e yz que intersectam a superfície, são parábolas.



23.1.4. Gráfico de superfícies gerais (uso do geogebra)

Existem outras infinitas funções de duas variáveis cuja superfície representativa não se enquadra em plana, cilíndrica ou quádrica.

Exemplos: $f(x,y)=y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$, $f(x,y)=y^3+x^3$ e $f(x,y)=log(x^2+y)$.

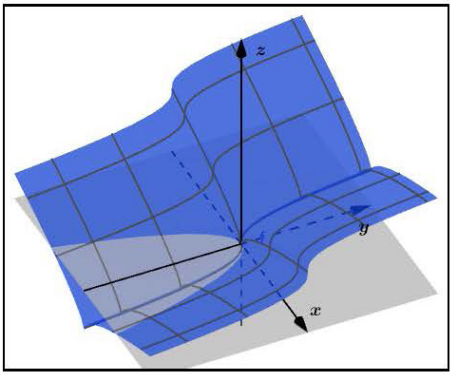
A construção do gráfico dessas superfícies, mesmo utilizando os traços, é geralmente complicada. O que nos obriga a utilizar os recursos tecnológicos.

Para utilizar o geogebra, digite no campo de entrada:

"f(x,y)=y^(1/3)+x^(2/3)".

Ao teclar "enter", o software mostrará conforme a figura ao lado, a superfície que representa a primeira função do exemplo anterior: $f(x,y)=y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}$.

Como exercício, visualize no software o gráfico de todas as funções de todos os exemplos dessa seção.



EXERCÍCIOS 23.1

1) Construa os planos a seguir no espaço tridimensional.

a) $z=-2$

b) $x+y=0$

c) $2x-y-z=0$

d) $2x-z+4y=4$

2) Informe quais os tipos de curvas cônicas: elipse, hipérbole ou parábola se formam ao longo dos traços indicados em cada item.

a) $z-x-y^2=0\ para\ x=k.$

b) $z^2-x^2-y^2=0\ para\ y=k.$

c) $z=\sqrt{x^2+y^2}\ \ para\ z=k.$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1\ para\ y=k.$

e) $x^2+y^2+z^2=4\ para\ x=k.$

f) $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\ para\ y=k.$

3) Classifique as superfícies a seguir em planas, cilíndricas, quádricas ou gerais.

a) $x+y-z=0$

b) $x-y=0$

c) $x-z^2=0$

d) $x^2+y^2-z^2=0$

e) $f(x,y)=y^4+x^4$

f) $2x-7y+4z-12=0$

g) $z=e^{x^2}$

h) $f(x,y)=sen(y^2+x^2)$

4) Visualize as superfícies do item anterior no geogebra e confirme suas respostas.

23.2. Curvas de nível (ou de contorno)

As curvas de nível são usadas para representar a variação da elevação de um terreno, e são desenhadas em mapas topográficos para indicar a altitude de diferentes pontos no terreno. Essas curvas ajudam a visualizar as variações de altura e a identificar áreas planas, inclinadas ou montanhosas. Além disso, as curvas de nível também são utilizadas em estudos de drenagem, planejamento de estradas, projetos de construção, entre outros. Esse mesmo processo pode ser aplicado em uma superfície, conforme a denominação a seguir.

Seja uma função $f(x,y)$ cujo gráfico é uma superfície tridimensional e k uma constante real, denominamos de **curvas de nível**, as projeções bidimensionais no plano xy de uma família de curvas (ou de contornos), obtidas a partir da variação de uma altura k dessa superfície, em um intervalo convenientemente escolhido.

Exemplo: Na figura 23.2.1 está a superfície da função $f(x,y) = (x^2 + y - 12)^2 + (y^2 - x^2 + 1)^2$ e duas curvas de nível (contorno) para $k = 100$ e $k = 200$. Na figura 23.2.2 estão todas as curvas de nível dessa superfície no intervalo $k = 10$ à $k = 200$ produzidas pelo software geogebra.

2º exemplo: Vamos construir as curvas de nível do paraboloide elíptico de função $f(x,y) = \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9}$.

Solução: Fazendo: $z = k$, temos $\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = k$.

Para $k < 0$, não existe curva e para $k = 0$ só há um ponto $(0,0)$.

Para $k > 0$, as curvas são elipses na forma $\frac{y^2}{4k} + \frac{x^2}{9k} = 1$ que vão aumentando de tamanho, conforme o valor de k aumenta. Veja na figura 23.2.3, um exemplo para $k = 3$ e $k = 5$.

Na figura 23.2.4, estão todas as curvas de nível de $k = 0$ à $k = 5{,}5$ em intervalos de 0,5.

Uma superfície quádrica pode estar também rotacionada segundo um ângulo $\emptyset$ dos eixos originais, e assim, ser expressa na forma $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$.

Identificamos o tipo de curva de nível de acordo com os valores de $B^2 - 4AC$:

- Se $B^2 - 4AC > 0$, as curvas de nível representam hipérboles;
- Se $B^2 - 4AC = 0$, as curvas de nível representam parábolas;
- Se $B^2 - 4AC < 0$, as curvas de nível representam elipses.

Exemplo: Vamos verificar que tipos de curvas de nível representam a superfície gerada pela função $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 2xy + 1$.

Solução: $B^2 - 4AC = (-2)^2 - 4.2.3 = 4 - 24 = -20 < 0$, então as curvas de nível dessa superfície são elipses.

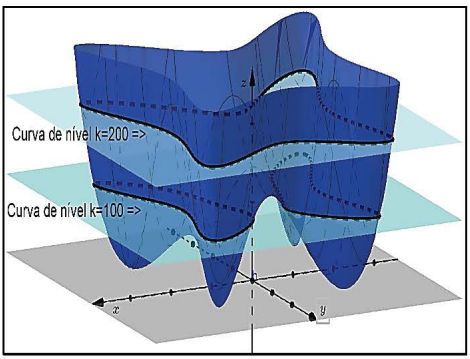


Figura 23.2.1

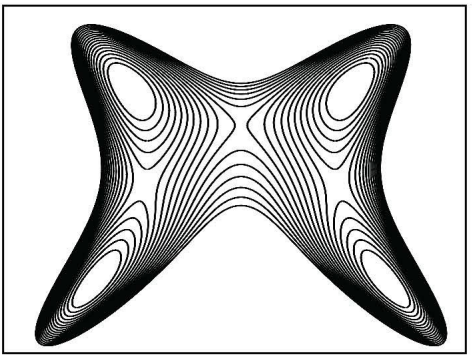


Figura 23.2.2

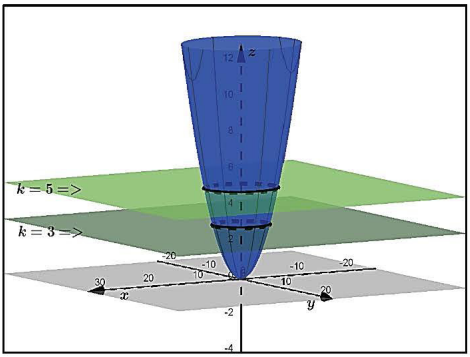


Figura 23.2.3

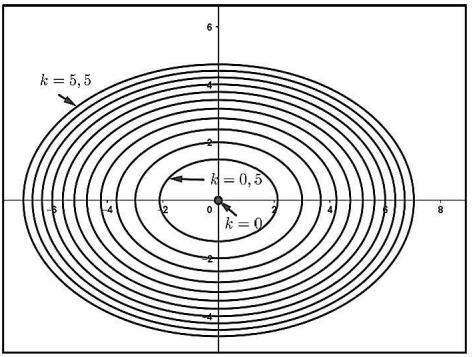


Figura 23.2.4

23.3. Curvas de nível no geogebra

Ao abrir o geogebra, selecione no menu opções a janela de visualização 3D.

No campo de entrada digite "f(x,y)=y²/36-x²/25" e tecle "enter". O software mostrará o paraboloide elíptico.

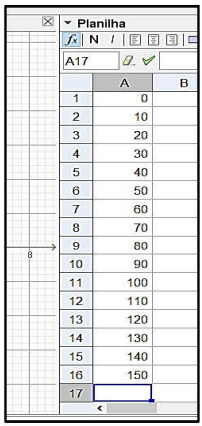
Caso necessário, role o scroll do mouse para cima ou para baixo para uma melhor visualização da superfície.

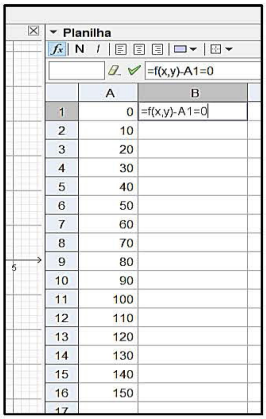
Em seguida, feche a janela de visualização 3D e abra a "janela de visualização" no mesmo menu "opções".

Mais uma vez no menu opções, selecione a opção planilha. A ilustração da planilha está na figura a seguir.

Nessa planilha digite na coluna A os valores de 0 à 150 (ou a quantidade que desejar) e na primeira célula da coluna B a fórmula "= f(x,y)-A1=0". É preciso fazer

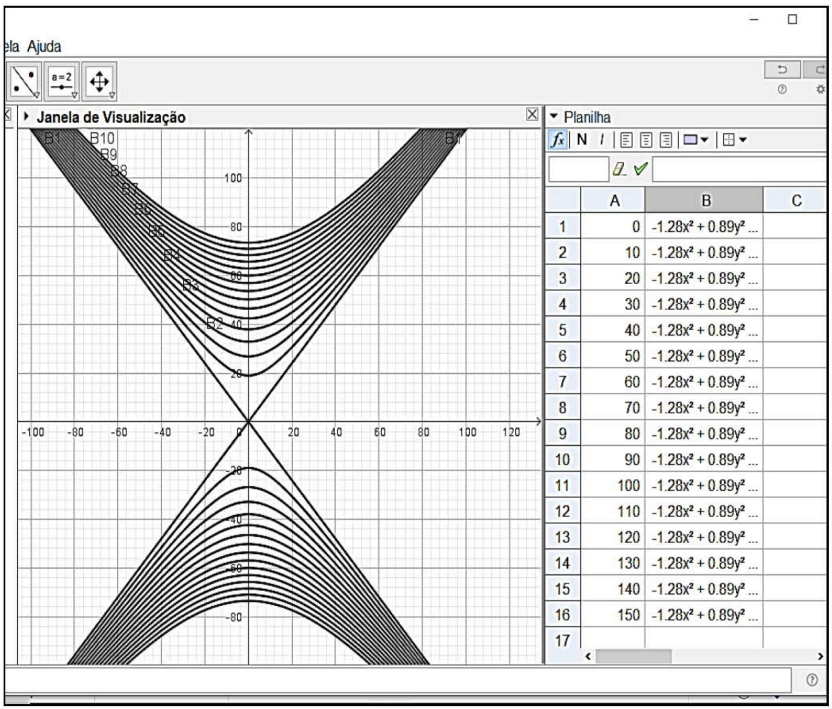
isso em todas as células da coluna B, para isso, selecione essa célula e arraste até o valor 150 (último valor) ou copie e cole em todas as células.





A justificativa para o uso da planilha, é que a mesma constrói várias curvas de nível sem precisar digitar uma a uma.

Diminua o zoom da janela de visualização (use o scroll do mouse) se for preciso. O software mostrará as curvas de nível da imagem a seguir.



Como exercício, visualize no programa as curvas de nível das demais quádricas conhecidas.

23.4. Domínio de uma função de duas ou mais variáveis

Consoante as funções de uma variável, as funções de duas ou mais variáveis também podem estar restritas a algum conjunto D, que denominamos de domínio da função, conforme definição a seguir.

Uma função f de duas variáveis x e y, é uma regra que associa a cada par ordenado (x,y) *de um conjunto D, um único valor real que denotamos por f(x,y).*

Uma função f de três variáveis x, y e z é uma regra que associa a cada trio ordenado (x,y,z) *de um conjunto D, um único valor real que denotamos por f(x,y,z).*

No caso de funções de duas variáveis, o conjunto D é formado pelo pares (x,y) ambos pertencentes a $\mathbb{R}$, denotamos o domínio D de uma função de duas variáveis como

$$\boxed{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | condição\ de\ existência\ da\ função\ (x,y)\}}.$$

Para funções de três variáveis, o conjunto D é formado pelo trio (x,y,z) todos pertencentes a $\mathbb{R}$, denotamos o domínio D de uma função de três variáveis como

$$\boxed{D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | condição\ de\ existência\ da\ função\ (x,y,z)\}}.$$

Essa definição pode ser estendida a mais variáveis.

1º exemplo: Seja $f(x,y) = \sqrt{y^3+1} + ln\,x$ vamos encontrar o valor de $f(e,2)$ e calcular o domínio D dessa função.

Solução:

Substituindo $x = e$ e $y = 2$ na função, obtemos

$$f(x,y) = \sqrt{y^3+1} + ln(x) \Rightarrow$$

$$f(e,2) = \sqrt{2^3+1} + ln\,e = 3 + 1 = 4 \Rightarrow \boxed{f(e,2) = 4}.$$

A função $f(x,y)$ existe se $y^3 + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq -1$ e $x > 0$, portanto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq -1 \text{ e } x > 0\}.$$

Esse domínio está representado pelo retângulo em azul na figura 23.4.1 a seguir.

2º exemplo: Seja $f(x,y) = \frac{x-2}{x-4y+1}$, vamos encontrar o valor de $f(-1,1)$, $f(3,1)$ e calcular o domínio D dessa função.

Solução:

Para calcular o valor $f(-1,1)$ devemos substituir $x=-1$ e $y=1$ na função. Assim,

$$f(x,y)=\frac{x-2}{x-4y+1}\Rightarrow f(-1,1)=\frac{-1-2}{-1-4.1+1}=\frac{3}{4}\Rightarrow \boxed{f(-1,1)=\frac{3}{4}}.$$

Para $f(3,1)$ devemos fazer $x=3$ e $y=1$ na função, logo

$$f(3,1)=\frac{3-2}{3-4.1+1}=\frac{1}{0}\Rightarrow \text{Não existe } f(3,1).$$

Quanto ao domínio, a função $f(x,y)$ existe se $x-4y+1\neq 0\Rightarrow x\neq 4y-1$, ou seja, a função $f(x,y)$ existe para qualquer ponto não pertencente a reta $x=4y-1$, o que nos dá

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\neq 4y-1\}.$$

O gráfico desse domínio está na figura 23.4.2 seguinte. O domínio engloba todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ menos os pontos pertencentes à reta $x=4y-1$.

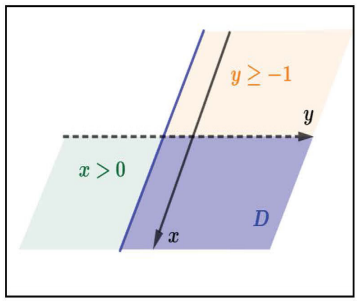


Figura 23.4.1

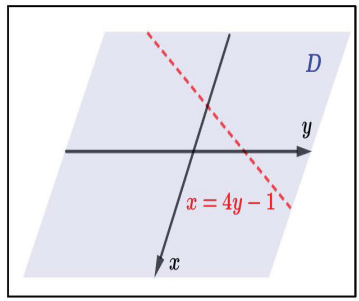


Figura 23.4.2

3º exemplo: Seja $f(x,y,z)=\sqrt{x^2-1}+\frac{z}{x.y}$, vamos encontrar o valor de $f(1,1,1)$, $f(0,1,2)$, $f(3,2,1)$ e calcular o domínio D dessa função.

Solução:

Para calcular o valor $f(1,1,1)$ devemos substituir $x=1$, $y=1$ e $z=1$ na função. Assim,

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2-1}+\frac{z}{x.y}\Rightarrow f(1,1,1)=\sqrt{1^2-1}+\frac{1}{1.1}\Rightarrow \boxed{f(1,1,1)=1}.$$

Para calcular o valor $f(0,1,2)$ devemos fazer $x=0$, $y=1$ e $z=2$ na função. Logo,

$$f(0,1,2)=\sqrt{0^2-1}+\frac{2}{0.1}\Rightarrow \boxed{\nexists f(0,1,2)}.$$

Para $f(3,2,1)$ devemos fazer $x=3$, $y=2$ e $z=1$ na função, o que nos dá

$$f(3,2,1)=\sqrt{3^2-1}+\frac{1}{3.2}\Rightarrow \boxed{f(3,2,1)=2\sqrt{2}+\frac{1}{6}}.$$

Quanto ao domínio a função $f(x,y,z)$ existe para $x^2-1\geq 0\Rightarrow x\geq 1\ ou\ x\leq -1, x\neq 0\ e\ y\neq 0$. Dessa maneira,

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x\geq 1\ ou\ x\leq -1\ e\ y\neq 0\}.$$

23.5. Limite e continuidade de funções de duas ou mais variáveis

Nesta seção, apresentaremos noções básicas de limite e continuidade sobre funções de duas ou mais variáveis, sem entrar em detalhes e sem demonstrações matemáticas. O objetivo é fornecer uma compreensão geral dos conceitos, uma vez que as demonstrações e detalhes sobre esses tópicos exigem conhecimentos avançados de cálculo, que estão além do escopo dessa obra.

23.5.1. Limite de funções de duas ou mais variáveis

Nas funções de uma variável estudadas na unidade 18, o limite lateral à esquerda e à direita de uma função era aplicável, pois a aproximação de um valor x apresentava apenas uma direção e esses dois sentidos. Nas funções de duas ou mais variáveis, esse conceito de aproximação em uma única direção não se aplica, uma vez que na superfície, as direções e os sentidos não são únicos.

No entanto, um conceito similar pode ser aplicado em uma região limitada dessa superfície, ou seja, em uma vizinhança próxima de um ponto. Considere tal vizinhança como sendo um disco D composto por todos os pontos do espaço bidimensional próximos (tão próximo quanto se deseje, mas não igual) ao ponto (x_0, y_0), em que a função $f(x,y)$ esteja definida. Essas condições nos permitem anunciar a seguinte definição.

Definição 23.5.1.1: Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (x_0, y_0). O limite de $f(x,y)$ quando (x,y) tende a (x_0, y_0) é L e escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L.$$

Se para todo $\varepsilon > 0$ houver um número correspondente $\delta > 0$, tal que, se $(x,y) \in D$ e $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, então $|f(x,y) - L| < \varepsilon$.

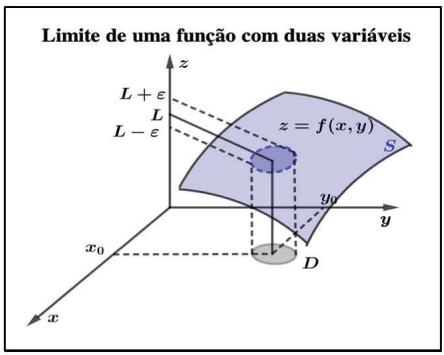


Figura 23.5.1.1

A definição anterior afirma que a distância entre $f(x,y)$ e L será arbitrariamente pequena, se tomarmos a distância de (x,y) para (x_0,y_0), dentro de um disco aberto D (veja que $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$), suficiente pequena (mais não nula). E se o limite existe, deve-se aproximar de L independentemente da direção adotada. Isso significa, que ao adotar direções diferentes para a aproximação e obtermos valores para L diferentes, o limite em questão não existirá.

Exemplo: Vamos mostrar que o limite de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

Solução: Inicialmente observe que a função não existe no ponto (0,0), mas isso não significa que necessariamente o limite não existe.

Para verificar a existência do limite, precisamos adotar algumas direções (ou caminhos) de aproximação ao ponto $(0,0)$ e analisar os resultados dos limites.

Supondo que a aproximação seja feita ao longo do eixo x. Para qualquer valor de x tem-se y igual a zero, e isso nos dá

$$\frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{2x^2-0^2}{x^2+0^2}=\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

Então, $f(x,y)\to 2$ quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo do eixo x.

Supondo agora que a aproximação seja feita ao longo do eixo y, para qualquer valor de y tem-se x igual a zero. Substituindo na função, encontramos

$$\frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{2.0^2-y^2}{0^2+y^2}=\frac{-y^2}{y^2}=-1.$$

Assim, $f(x,y)\to -1$ quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo do eixo y.

Como $f(x,y)$ apresenta valores diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$ não existe.

A explicação geométrica para não existência do limite pode ser visualizada na figura 23.5.1.2. As retas em vermelho mostram que a função em questão se aproxima de valores diferentes nas duas direções destacadas.

2º exemplo: Vamos mostrar que o limite de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ não existe.

Solução: Supondo que a aproximação seja feita pelo eixo x. Para qualquer valor de x tem-se y igual a zero. Fazendo $y=0$ na função, obtemos

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2x.0}{x^2+0^2}=\frac{0}{x^2}=0.$$

Isso significa que, $f(x,y)\to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo do eixo x.

Supondo agora que a aproximação seja feita pelo eixo y. Para qualquer valor de y tem-se x igual a zero, o que nos dá

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2.0.y}{0^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0.$$

Então, $f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo do eixo y.

Será que o limite dessa função é zero quando $(x,y) \to (0,0)$? Vamos fazer a aproximação ao longo da parábola $y = x^2$. Substituindo $y = x^2$ na função, temos

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x.x^2}{x^2+x^4} = \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2.0}{1+0^2} = 0.$$

$f(x,y) \to 0$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da parábola $y = x^2$.

Poderíamos cair no erro ao conjecturar que o limite dessa função é zero quando $(x,y) \to (0,0)$. Porém, ao adotar a reta $y = x$ como aproximação, encontramos

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x.x}{x^2+x^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1.$$

Isso quer dizer que, $f(x,y) \to 1$ quando $(x,y) \to (0,0)$ ao longo da reta $y = x$.

Portanto, o $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ não existe.

A explicação geométrica para não existência do limite dessa função pode ser visualizada na figura 23.5.1.3 a seguir. As retas em vermelho mostram que a função em questão se aproxima de valores diferentes segundo as direções destacadas.

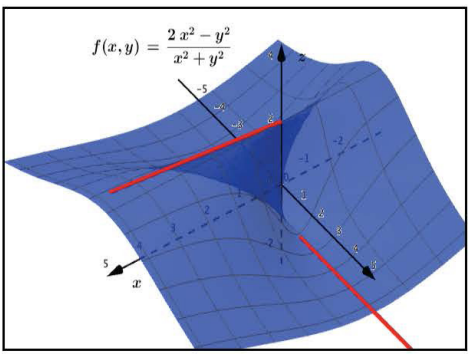


Figura 23.5.1.2

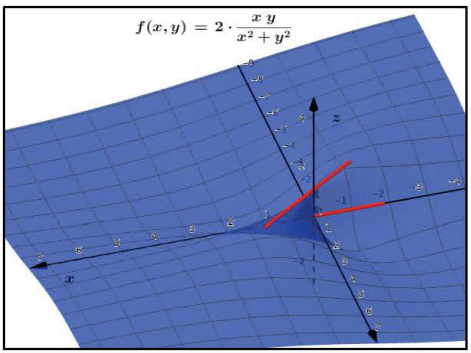


Figura 23.5.1.3

Esses dois exemplos deixam claro um inconveniente: para mostrar que um limite de uma função não existe em um ponto, é preciso escolher várias direções (caminhos) de aproximação a esse ponto e encontrar algum valor para a função diferente dos demais. Porém, essas direções de aproximação pelos eixos, retas, parábolas, etc., são infinitas, e não podemos afirmar com certeza sobre a existência ou não do limite da função nesse ponto, se a igualdade dos valores persistir mesmo em uma quantidade considerável de tentativas.

Diante dessa incerteza, vamos aos casos em que o limite da função existe, e para isso, aplicaremos o conceito de continuidade de uma função, que vem a seguir.

23.5.2. Continuidade de funções de duas ou mais variáveis

Todos os teoremas e propriedades como o teorema do confronto, o limite da soma é a soma dos limites, o limite do produto é o produto dos limites, o limite do quociente é o quociente dos limites, etc., se aplicam também de forma similar à funções de duas variáveis, assim como a definição de **continuidade** que está a seguir.

Definição 23.5.2.1: Uma função f de duas variáveis é dita contínua em (x_0, y_0), se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$. Afirmamos que f é contínua em seu domínio D, se for contínua em todo ponto $(x_0, y_0) \in D$.

Além disso, também valem para as funções contínuas com duas variáveis, as seguintes propriedades:

- A composição de soma, diferença ou produto de funções contínuas de duas variáveis, são funções contínuas;
- O quociente de funções contínuas de duas variáveis é uma função contínua, exceto nos pontos onde o denominador for zero;
- Toda função polinomial de duas variáveis é contínua em $\mathbb{R}^2$.

No caso da função de duas variáveis, uma função é dita **polinomial** quando possuir uma soma de termos na forma ax^py^q, em que a é constante p e q são inteiros não negativos.

Exemplos:

- $f(x,y) = 5x^4y^2 + 3x^2y - x^2 + 2$
- $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2y^2 - 7y^2 - 2x + 1$
- $f(x,y) = x^2 - y^2$

Como o limite de funções contínuas de duas variáveis em um ponto equivale ao ser valor numérico, podemos utilizar essa informação para calcular limites.

Exemplo: Calcule, se existir, o limite de $\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^4y^2 - x^2$.

Solução: Como se trata de limite de uma função polinomial de duas variáveis (contínua em $\mathbb{R}^2$), o resultado será o seu valor numérico.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} x^4y^2 - x^2 = 1^4 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3.$$

2º exemplo: Para que valores a função $f(x,y) = \frac{x^2y - 2y^2 - 3x}{x - y^2}$ é contínua?

Solução: O quociente de funções de contínuas é contínua, exceto nos pontos onde o denominador é zero, ou seja, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y^2$.

Eventualmente, pode ocorrer uma indeterminação possível de ser solucionada, seguindo os mesmos preceitos já conhecidos e aplicados em limites de uma variável. Veja o exemplo a seguir.

3º exemplo: Calcule, se existir, o limite de $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \frac{x+y-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-y}}$.

Solução: Substituindo o valor numérico, obtemos

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-y}} = \frac{0+2-2}{\sqrt{0}-\sqrt{2-0}} = \frac{0}{0} \ (uma\ intederminação).$$

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-y}} = \frac{x+y-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-y}}.\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{2-y}} = \frac{(x+y-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2-y})}{x+y-2} = \sqrt{x}+\sqrt{2-y}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \frac{x+y-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-y}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \sqrt{x}+\sqrt{2-y} = \lim_{(x,y)\to(0^+,2^-)} \sqrt{0}+\sqrt{2-2} = 0.$$

4º exemplo: Calcule, se existir, o limite de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2.(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$.

Solução: Substituindo o valor numérico, obtemos

$$\frac{e^{2.(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} (uma\ intederminação).$$

Usando a substituição $x^2+y^2=u$, temos $(x,y)\to(0,\ 0)\Rightarrow u\to 0$. Dessa maneira,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{2u}-1}{u}.$$

Aplicando a regra de L'Hôspital, encontramos

$$\lim_{u\to 0} \frac{2.e^{2u}}{1} = \frac{2.e^{2.0}}{1} = 2 \Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2} = 2}.$$

A mesma noção de limite aplicada às funções de duas variáveis, pode ser estendida a funções de três variáveis (e similarmente a mais variáveis), conforme a definição a seguir.

Definição 23.5.1.2: Seja f uma função de três variáveis cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (x_0,y_0,z_0). O limite de $f(x,y,z)$ quando (x,y,z) tende a $(x_0,\ y_0,z_0)$ é L e escrevemos: $\lim\limits_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z)=L$, se para todo $\varepsilon>0$ houver um número correspondente $\delta>0$, tal que, se $(x,y,z)\in D$ e $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$, então $|f(x,y,z)-L|<\varepsilon$.

Como se trata de função de três variáveis, a aproximação arbitrariamente pequena de (x_0,y_0,z_0) se dá no espaço dentro de uma bola (ou esfera) aberta B: $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$.

Exemplo: Calcule, se existir, o limite de $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{sen(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Solução: Usando a substituição $x^2+y^2+z^2=u$, temos $(x,y,z)\to(0,\ 0,\ 0)\Rightarrow u\to 0$. Assim,

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{sen(x^2+y^2+z^2)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \lim_{u\to 0} \frac{sen\,u}{\sqrt{u}}.\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}} = \overbrace{\lim_{u\to 0} \frac{sen\,u}{u}}^{1}.\lim_{u\to 0}\sqrt{u} = 0.$$

EXERCÍCIOS 23.2

1) Verifique que tipos de cônica (elipse, parábola ou hipérbole) formam as curvas de nível das seguintes superfícies quádricas. Em seguida, visualize usando o geogebra.

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4$

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy - 3y^2 + x - y + 1$

c) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + x$

2) Seja $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}$, calcule:

a) $f(-1,1)$

b) $f(-3,1)$

c) O maior subconjunto possível para o domínio D dessa função.

3) Seja $f(x,y) = \frac{2x-3y}{x+y}$, calcule:

a) $f\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$

b) $f(0,1)$

c) O maior subconjunto possível para o domínio D dessa função.

4) Seja $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$, calcule:

a) $f(1,0,1)$

b) $f(4,-2,0)$

c) O maior subconjunto possível para o domínio D dessa função.

5) Calcule o maior subconjunto possível para o domínio das seguintes funções definidas por:

a) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x-y^2+1}$

b) $f(x,y) = \sqrt{x-y}.ln\,(x+y)$

c) $f(x,y,z) = ln(z^2 - y)$

d) $f(x,y,z) = \sqrt{-x^2 - y^2 + z^2}$

e) $f(x,y,z) = cos(x + y + z)$

6) Calcule os limites, se existir. Caso contrário, mostre que o limite não existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} y^2 - x^2$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} 3x^3 - 2yx^2$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} 2y^2x^3 - yx^2 + 3$

d) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \left(z.y^2x^3 - 2z.x.y\right)$

e) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,2,2)} \left(\frac{xz-y}{z^2-y^2-x^2}\right)$

f) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$

g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+y^2}{x^2-y^2}$

h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2-y^2}{2x-y}$

i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2+y^2}{4x^2+y^2}$

j) $\lim_{(x,y)\to(e,e)} ln\left(\frac{x^3y-xy^3}{x-y}\right)$

k) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x+y}{\sqrt{x+y+1}-1}\right)$

l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)$

m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{e^{-y-x}-1}{y+x}\right)$

n) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left(\frac{tg(x^2+y^2-z^2)}{x^2+y^2-z^2}\right)$

7) Verifique para que valores as funções a seguir são contínuas.

a) $f(x,y) = x^2y^2$

b) $f(x,y) = \sqrt{1-xy}$

c) $f(x,y) = ln(x-y+1)$

d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

e) $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

f) $f(x,y) = \frac{1}{1-e^{x-y}}$

8) Verifique se as funções a seguir são contínuas no ponto (0,0).

a) $f(x,y) = \begin{cases} (1+x^2-y^2)/(x^2+y^2) & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2-y^2)/(1+x^2+y^2) & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$

9) Assinale a única afirmação verdadeira:

a) Se $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 1$, então $f(1,2) = 1$;

b) Se $f(1,2) = 1$, então $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 1$;

c) Se $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = f(1,2)$, então a função é contínua em (1,2);

d) Se uma função $f(x,y)$ é contínua em um ponto, então o limite da função nesse ponto não existe;

e) Se $f(a,b)$ não existe, então o $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.

10) Utilizando o geogebra, verifique e explique por que o limite existe ou não existe, se for o caso.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+2x+y^2}{x^2+y^2}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos\,(x+y)-1}{x+y}$

d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{2x-y}-1}{2x-y}$

23.6. Derivadas parciais

Nesta seção, estudaremos as aplicações e os conceitos de derivadas em funções de duas ou mais variáveis.

Situação problema: Um fazendeiro precisa adubar uma área para o plantio de um cultivo utilizando uma mistura de adubo orgânico e adubo mineral. A tabela a seguir, fornecida por um fabricante, mostra os preços dos adubos já misturados de acordo com a quantidade, em kg, de cada adubo.

kg		Adubo mineral				
		10	20	30	40	50
Adubo orgânico	5	R$67,50	R$127,50	R$187,50	R$247,50	R$307,50
	10	R$75,00	R$135,00	R$195,00	R$255,00	R$315,00
	15	R$82,50	R$142,50	R$202,50	R$262,50	R$322,50
	20	R$90,00	R$150,00	R$210,00	R$270,00	R$330,00
	25	R$97,50	R$157,50	R$217,50	R$277,50	R$337,50

Vamos calcular a taxa de variação média do adubo orgânico (x) para 30 kg de adubo mineral (y), usando o intervalo de 15 à 20:

$$\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x,30)-f(x,30)}{\Delta x}=\frac{f(20,30)-f(15,30)}{20-15}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{210{,}00-202{,}50}{5}=1{,}5.$$

Agora, a taxa de variação média do adubo mineral (y) para 10 kg de adubo orgânico (x), no intervalo de 40 à 50:

$$\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=\frac{f(10,50)-f(10,40)}{50-40}=\frac{315{,}00-255{,}00}{10}=6.$$

Como neste exemplo a função adubo *versus* preço é linear (fixando uma das variáveis), significa então que o preço do quilo do adubo orgânico é R$ 1,50 e do adubo mineral é R$ 6,00, ou seja, o preço total é dado por $f(x,y)=1{,}5x+6y$.

Observe que as taxas de variação acima foram calculadas fixando uma das grandezas e variando apenas a outra. Essa é a mesma concepção de derivadas parciais, onde fixa-se uma variável e calcula-se a taxa de variação instantânea (a derivada) da função em relação as demais variáveis, conforme a definição a seguir.

Definição 23.6.1: Seja f uma função de duas variáveis e (x_0,y_0) um ponto do seu domínio. A **derivada parcial de f em relação à x** (f_x) é a derivada de f que resulta quando $y=y_0$ for mantido fixo e a x for permitido variar. Essa derivada é dada por $f_x(x,y)$:

$$f_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

A **derivada parcial de f em relação à y** (f_y) é a derivada de f que resulta quando $x = x_0$ for mantido fixo e a y for permitido variar. Essa derivada é dada por $f_y(x,y)$:

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

Assim, sendo $Z = f(x,y)$ uma função de duas variáveis, a sua derivada parcial:

- $f_x(x,y_0)$ representa a taxa de variação instantânea de z na direção do eixo x;
- $f_y(x_0,y)$ representa a taxa de variação instantânea de z na direção do eixo y.

As derivadas parciais podem ser denotadas simplesmente por f_x e f_y, ou $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$, ou ainda, por $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ (onde se lê: "del f del x" e "del f del y", respectivamente).

Exemplo: Seja $f(x,y) = 3x^2y$ vamos calcular $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(0,1)$ e $f_y(-1,1)$.

Solução:

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(x+\Delta x)^2.y - 3x^2y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2y + 6.x.y\Delta x + (\Delta x)^2y - 3x^2y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6.x.y + \Delta xy \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = 6xy}.$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2(y+\Delta y) - 3x^2y}{\Delta y} \Rightarrow$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2y + 3x^2\Delta y - 3x^2y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x^2\Delta y}{\Delta y} \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = 3x^2}.$$

Logo: $f_x(0,1) = 6.0.1 \Rightarrow \boxed{f_x(0,1) = 0}$.

A taxa de variação instantânea da função na direção do eixo x, no ponto (0, 1), é zero.

$f_y(-1,1) = 3.(-1)^2 \Rightarrow \boxed{f_y(-1,1) = 3}$.

A taxa de variação instantânea da função na direção do eixo y, no ponto (-1, 1), é três.

O cálculo de derivadas parciais segundo a definição 23.6.1 anterior, se torna penoso para funções de duas ou mais variáveis mais complexas. Nesse cenário, é aconselhável utilizar as regras de derivação já conhecidas, derivando a função em relação a uma variável e mantendo fixas todas as demais variáveis (ou seja, considerando-as como constantes), da seguinte maneira.

Seja uma função de duas variáveis $f(x,y)$:

- Para calcular $f_x(x,y)$ basta considerar y constante e derivar a função em relação a x;

- Para calcular $f_y(x,y)$ basta considerar x constante e derivar a função em relação a y.

O mesmo entendimento se estende à uma função de três variáveis $f(x,y,z)$ e similarmente para mais variáveis:

- Para calcular $f_x(x,y,z)$ basta considerar y e z constantes e derivar a função em relação a x.
- Para calcular $f_y(x,y,z)$ basta considerar x e z constantes e derivar a função em relação a y.
- Para calcular $f_z(x,y,z)$ basta considerar x e y constantes e derivar a função em relação a z.

As derivadas parciais medem as taxas de variações instantâneas de crescimento ou decrescimento de uma função segundo a direção do eixo de uma variável, mantendo as demais variáveis constantes.

Vamos calcular as derivadas parciais da função $f(x,y) = 3x^2y$ do exemplo anterior, usando agora, as regras de derivação.

A derivação parcial em relação a x, temos

$$f(x,y) = \underbrace{3}_{constante} \cdot \underbrace{x^2}_{deriva\ em\ relação\ a\ x} \cdot \underbrace{y}_{constante} \Rightarrow f_x(x,y) = 3.2x.y \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = 6xy}.$$

Agora, em relação a y, encontramos

$$f(x,y) = \underbrace{3}_{constante} \cdot \underbrace{x^2}_{constante} \cdot \underbrace{y}_{deriva\ em\ relação\ a\ y} \Rightarrow f_y(x,y) = 3x^2.1 \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = 3x^2}.$$

2º exemplo: Seja $f(x,y) = y^3 - 3xy$, vamos calcular $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(0,1)$ e $f_y(-1,1)$.

Solução: Para calcular $f_x(x,y)$, devemos considerar y como uma constante e derivar a função em relação a x. Como a derivada da soma é a soma das derivadas, temos

$$f_x(x,y) = 0 - 3y \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = -3y}$$

$$f_x(0,1) = -3.1 \Rightarrow \boxed{f_x(0,1) = -3}.$$

A taxa de variação instantânea da função nesse ponto e na direção do eixo x é -3.

Para calcular $f_y(x,y)$, devemos considerar x como uma constante e derivar a função em relação a y, da seguinte forma:

$$f_y(x,y) = 3y^2 - 3x \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = 3y^2 - 3x}.$$

$$f_y(-1,1) = 3.1^2 - 3.(-1) = 3 + 3 \Rightarrow \boxed{f_y(-1,1) = 6}.$$

A taxa de variação instantânea da função nesse ponto e na direção do eixo y é 6.

3º exemplo: Seja $f(x,y) = 2xy^2 - lny + e^{x.y}$ vamos calcular $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$, $f_x(0,1)$ e $f_y(1,2)$.

Solução: Para calcular $f_x(x,y)$, devemos considerar y como uma constante e derivar a função em relação a x, observando que é preciso utilizar a regra da cadeia no termo $e^{x.y}$, da seguinte maneira:

$$f_x(x,y) = 2y^2 - 0 + y.e^{x.y} \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = 2y^2 + y.e^{x.y}}.$$

$$f_x(0,1) = 2.1^2 + 1.e^{0.1} \Rightarrow \boxed{f_x(0,1) = 3}.$$

Para calcular $f_y(x,y)$, devemos considerar x como uma constante e derivar a função em relação a y, atentando-se mais uma vez, à aplicação da regra da cadeia no termo $e^{x.y}$.

$$f_y(x,y) = 4xy - \frac{1}{y} + x.e^{x.y} \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = 4xy - \frac{1}{y} + x.e^{x.y}}.$$

$$f_y(1,2) = 4.1.2 - \frac{1}{2} + 1.e^{1.2} = 8 - \frac{1}{2} + e^2 \Rightarrow \boxed{f_y(1,2) = \frac{15}{2} + e^2}.$$

4º exemplo: Calcular as derivadas parciais de $f(x,y) = xy.ln(xy)$.

Solução: Derivada da 1ª — Derivada da 2ª

$$f_x(x,y) = \boxed{y}.ln(xy) + \boxed{\frac{1}{xy}.y}.xy = yln(xy) + y \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = y(ln(xy) + 1)}.$$

$$f_y(x,y) = x.ln(xy) + \frac{1}{xy}.x.xy = xln(xy) + x \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = x(ln(xy) + 1)}.$$

5º exemplo: Seja $f(x,y,z) = x^2yz + sen(y^2.z)$, vamos calcular $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$, $f_x(0,1,1)$, $f_y\left(0,1,\frac{\pi}{6}\right)$ e $f_z\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)$.

Solução: Para calcular $f_x(x,y,z)$, devemos considerar y e z como constantes e derivar a função em relação a x. Desse modo

$$\boxed{f_x(x,y,z) = 2yzx}.$$

$$f_x(0,1,1) = 2.1.1.0 \Rightarrow \boxed{f_x(0,1,1) = 0}.$$

Para calcular $f_y(x,y,z)$, devemos considerar x e z como constantes e derivar a função em relação a y, o que nos dá

$$\boxed{f_y(x,y,z) = x^2.z + 2.z.y.cos(y^2z)}.$$

$$f_y\left(0,1,\frac{\pi}{6}\right) = 0^2.\frac{\pi}{6} + 2.\frac{\pi}{6}.1.cos\left(1^2.\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{f_y\left(0,1,\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}}.$$

Para calcular $f_z(x,y,z)$, devemos considerar x e y como constantes e derivar a função em relação a z. Assim,

$$\boxed{f_y(x,y,z) = x^2.y + y^2.cos(y^2z)}.$$

$$f_z\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right) = 1^2.1 + 1^2.cos\left(1^2.\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{f_z\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}}.$$

23.6.1. Interpretação geométrica das derivadas parciais

A interpretação geométrica das derivadas parciais é análoga a interpretação da derivada de uma função com uma variável, pois ao considerar em uma função $f(x,y)$, x ou y constante, essa pode ser entendida como de uma única variável. Nesse contexto:

- $f_x(x,y_0)$ é o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta tangente a superfície C no ponto (x_0,y_0) e na direção no eixo x. Essa reta é também perpendicular ao eixo y, já que essa variável é considerada constante. Ver figura 23.6.1.1.
- $f_y(x_0,y)$ é o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta tangente a superfície C no ponto (x_0,y_0) e na direção do eixo y. Tal reta é também perpendicular ao eixo x, uma vez que essa variável é considerada constante. Ver figura 23.6.1.2.

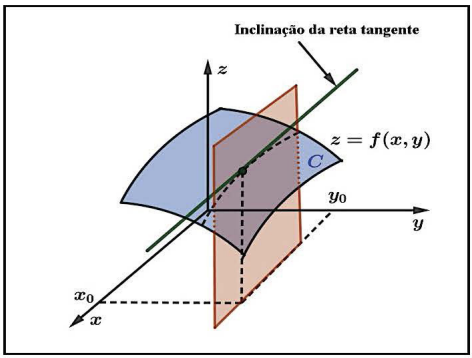


Figura 23.6.1.1

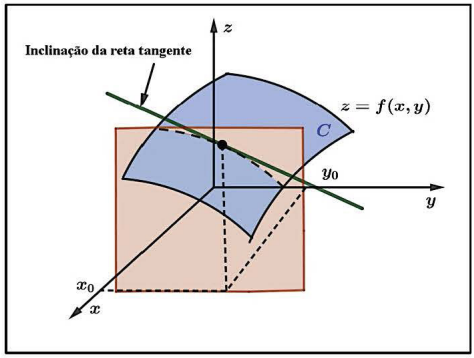


Figura 23.6.1.2

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2y + y^2$, determine.

a)A inclinação da reta tangente a essa superfície na direção x (ou perpendicular a y) no ponto $(1,1)$.

Solução: $f_x(x,y) = 2xy \Rightarrow f_x(1,1) = 2.1.1 = 2.$

Significa que o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta tangente à superfície, na direção do eixo x (ou perpendicular ao eixo y) e no ponto (1, 1) é 2. Veja na figura 23.6.1.3 essa reta tangente.

b) A inclinação da reta tangente a essa superfície na direção y (ou perpendicular a x) no ponto $(-1,2)$.

Solução: $f_y(x,y) = x^2 + 2y \Rightarrow f_y(-1,2) = (-1)^2 + 2.2 = 5.$

Significa que o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta tangente à superfície, na direção do eixo y (ou perpendicular ao eixo x) e no ponto (-1, 2) é 5. Veja na figura 23.6.1.4 essa reta tangente.

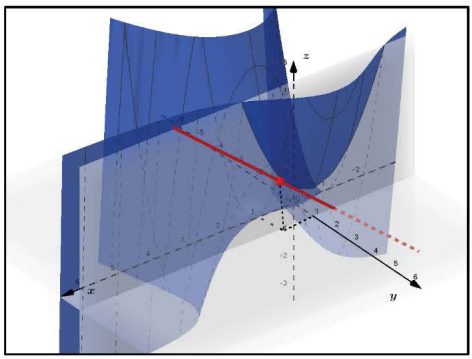


Figura 23.6.1.3

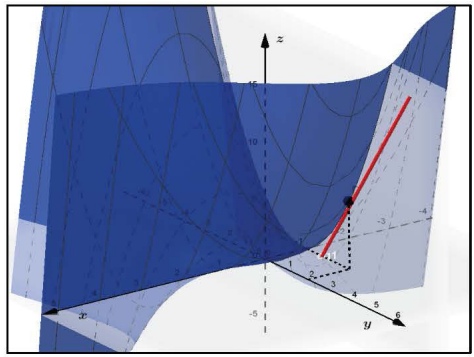


Figura 23.6.1.4

23.6.2. Reta tangente à superfície (visualização no geogebra)

Vimos no exemplo anterior que as derivadas parciais correspondem as inclinações das retas tangente à uma superfície em um ponto específico. Nesta subseção, iremos aprender a calcular as equações dessas retas e visualizá-las no software geogebra.

Para representar as retas no espaço utilizaremos a equação paramétrica (ver seção 22.7 desse volume) e para isso, precisamos inicialmente dos vetores diretores dessas retas.

Exemplo: Vamos encontrar as equações das retas tangentes do exemplo anterior.

a) Se a superfície é $f(x,y) = x^2y + y^2$, então o ponto de tangência em (1,1) é:

$$z = f(x,y) = x^2y + y^2 \Rightarrow z = f(1,1) = 1^2.1 + 1^2 = 2 \Rightarrow A(1,1,2).$$

Como $f_x(1,1) = 2$ e a inclinação da reta é $tg\theta = \frac{z}{x}$, temos

$$tg\theta = \frac{z}{x} \Rightarrow \quad 2 = \frac{z}{x} \Rightarrow \boxed{z = 2x}.$$

O vetor diretor é $\vec{u} = (x, 0, 2x)$, $y = 0$, pois a reta é perpendicular a y. Desse modo, $\vec{u} = (x, 0, 2x) = x(1, 0, 2)$. Utilizando x como o parâmetro t, temos que a equação paramétrica da reta no espaço é r: $(1, 1, 2) + t.(1, 0, 2)$.

b) Se a superfície é $f(x,y) = x^2y + y^2$, o ponto de tangência em (-1,2) é:

$$z = f(x,y) = x^2y + y^2 \Rightarrow z = f(-1,2) = (-1)^2.2 + 2^2 = 6 \Rightarrow B(-1,2,6).$$

Uma vez que $f_y(-1,2) = 5$ e a inclinação da reta é $tg\theta = \frac{z}{y}$, dispomos de

$$tg\theta = \frac{z}{y} \Rightarrow 5 = \frac{z}{y} \Rightarrow \boxed{z = 5y}.$$

O vetor diretor é $\vec{u} = (0, y, 5y)$, $x = 0$, pois a reta é perpendicular a x. Dessa maneira,

$\vec{u} = (0, y, 5y) = y.(0,1,5)$ e fazendo y como o parâmetro t, temos que a equação paramétrica da reta no espaço é $s: (-1,2,6) + t.(0,1,5)$.

Acompanhando os passos dessa resolução, podemos constatar que:

a) A equação da reta tangente à superfície $f(x,y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) e na direção do eixo x pode ser dado por

$$r: (x_0, y_0, z_0) + t.\big(1, 0, f_x(x_0, y_0)\big).$$

b) A equação da reta tangente à superfície $f(x,y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) e na direção do eixo y pode ser dado por

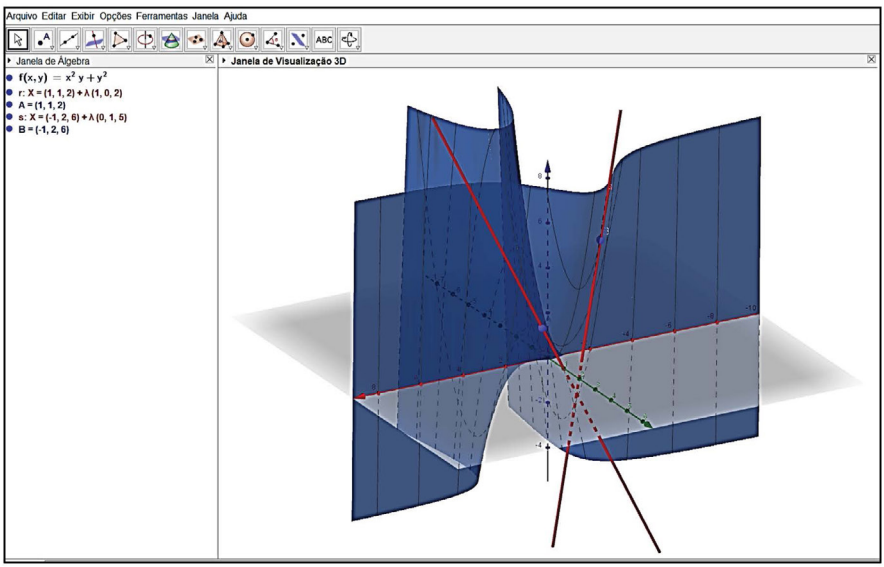
$$s: (x_0, y_0, z_0) + t.\big(0, 1, f_y(x_0, y_0)\big).$$

Para visualizar a superfícies e as retas no software geogebra, abra o programa e selecione a "janela de visualização em 3D". Em seguida, digite no campo de entrada:

- f(x,y) = x^2y+y^2
- $r: (1,1,2) + t \times (1,0,2)$
- $A = (1,1,2)$
- $B = (-1,2,6)$
- $s: (-1,2,6) + t.(0,1,5)$

Em caso de dúvidas quanto a representação de retas no espaço utilizando o geogebra, reveja a subseção 22.13.3.

O programa mostrará a imagem:



Rotacione a ilustração no software, clicando e segurando com o botão esquerdo do mouse. Caso necessário, para melhor visualização, aumente ou diminua o zoom da tela rolando o "scroll" do mouse para cima ou para baixo.

2º exemplo: Calcule as equações da reta tangente à esfera $x^2+y^2+z^2=1$, perpendiculares ao eixo x e ao eixo y, no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Solução: Utilizando a derivação implícita.

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow 2x+2z.\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Rightarrow 2z.\frac{\partial z}{\partial x}=-2x \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2z} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z}}.$$

Observe que o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ está no primeiro octante, assim podemos considerar somente o hemisfério superior da esfera e utilizar:

$$z^2=1-x^2-y^2 \Rightarrow z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Substituindo na derivada parcial, encontramos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Para o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

A equação da reta tangente à esfera nesse ponto e na direção do eixo x (ou perpendicular a y) é

$$r:(x_0,y_0,z_0)+t.(1,0,f_x(x_0,y_0)) \Rightarrow \boxed{r:\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+t.\left(1,0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

Utilizando a derivação parcial implícita para $\frac{\partial z}{\partial y}$, encontramos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{z}=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

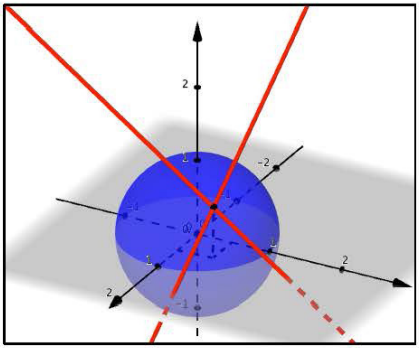
Para o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

A equação da reta tangente à esfera nesse ponto e na direção do eixo y (ou perpendicular a x) é

$$r: (x_0, y_0, z_0) + t.\left(0, 1, f_y(x_0, y_0)\right) \Rightarrow \boxed{r: \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t.\left(0,1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

As retas r e s estão na figura ao lado. Use o geogebra para uma melhor visualização.



23.6.3. Derivadas parciais de ordens superiores

Assim como as derivadas de função de uma variável, as derivadas parciais também possuem derivadas de ordens superiores. A seguir estão exemplificadas derivadas de 2ª ordem com suas respectivas notações equivalentes.

- Derivando duas vezes em relação a x:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}.$$

- Derivando duas vezes em relação a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}.$$

- Derivando primeiramente em relação a x, em seguida em relação a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}.$$

- Derivando primeiramente em relação a x, em seguida em relação a y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}.$$

As duas últimas são denominadas de **derivadas parciais mistas**, observando que a notação na forma $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ representa derivação da direita para esquerda. Para melhor entendimento, eventualmente, usa-se os parênteses: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$.

Exemplo: Seja $f(x,y) = x^2 y + xy^2$, determine as derivadas parciais de segunda ordem.

Solução:

$$f_x(x,y) = 2xy + y^2 \text{ e } f_y(x,y) = x^2 + 2yx$$
$$f_{xx}(x,y) = 2y \text{ e } f_{yy}(x,y) = 2x$$
$$f_{xy}(x,y) = 2x + 2y \text{ e } f_{yx}(x,y) = 2x + 2y.$$

2º exemplo: Seja $f(x,y) = e^x y + x$, determine as derivadas parciais de segunda ordem.

Solução:

$$f_x(x,y) = e^x y + 1 \text{ e } f_y(x,y) = e^x$$
$$f_{xx}(x,y) = e^x y \text{ e } f_{yy}(x,y) = 0$$
$$f_{xy}(x,y) = e^x \text{ e } f_{yx}(x,y) = e^x.$$

O leitor já deve ter percebido que as derivadas parciais mistas (f_{xy} e f_{yx}) foram iguais nos dois exemplos anteriores. O que não é coincidência! O teorema a seguir nos garante isso mediante uma condição.

Teorema 23.6.3.1 (Teorema de Clairaut[17]-Schwarz[18]): Seja f uma função de duas variáveis, se f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em algum círculo C aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$.

As derivadas de terceira ordem (ou qualquer ordem) segue o mesmo padrão de notação e como consequência do teorema anterior, temos que: $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ e $f_{xxy} = f_{yxx} = f_{xyx}$ e claro, se essas forem, obviamente, contínuas em algum círculo C aberto.

Exemplo: Seja $f(x,y) = e^{x^2 y}$, determine as derivadas parciais de terceira ordem.

Solução:

$\boxed{f_x(x,y) = e^{x^2y}.2xy}$ e $\boxed{f_y(x,y) = e^{x^2y}.x^2}$.

$f_{xx}(x,y) = e^{x^2y}.2xy.2xy + 2y.e^{x^2y} \Rightarrow \boxed{f_{xx}(x,y) = e^{x^2y}(4x^2y^2 + 2y)}$.

$f_{yy}(x,y) = x^2.e^{x^2y}.x^2 \Rightarrow \boxed{f_{yy}(x,y) = x^4.e^{x^2y}}$.

$f_{xy}(x,y) = e^{x^2y}.x^2.2xy + 2x.e^{x^2y} \Rightarrow \boxed{f_{xy}(x,y) = e^{x^2y}.(2x^3y + 2x)}$.

$f_{yyy}(x,y) = x^4.e^{x^2y}.x^2 \Rightarrow \boxed{f_{yyy}(x,y) = x^6.e^{x^2y}}$.

$f_{xxx}(x,y) = e^{x^2y}.2xy.(4x^2y^2 + 2y) + (8xy^2).e^{x^2y} \Rightarrow \boxed{f_{xxx}(x,y) = e^{x^2y}(8x^3y^3 + 10xy^2)}$.

$$f_{xyx}(x,y) = 2xy.e^{x^2y}.(2x^3y + 2x) + (6x^2y + 2).e^{x^2y} \Rightarrow$$
$$\boxed{f_{xyx}(x,y) = e^{x^2y}.(4x^4y^2 + 10x^2y + 2)}.$$

$f_{yyx}(x,y) = 4x^3.e^{x^2y} + e^{x^2y}.2xy.x^4 \Rightarrow \boxed{f_{yyx}(x,y) = e^{x^2y}.(4x^3 + 2yx^5)}$.

[17] Alexis Claude de Clairaut (1713-1765)
[18] Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

EXERCÍCIOS 23.3

1) Calcule as derivadas parciais das seguintes funções:

a) $f(x,y) = x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy$

b) $f(x,y) = (2x^2y^2 - y^3)^2 + xy^2$

c) $f(x,y) = x^y$

d) $f(x,y) = xy^2.ln\,(xy)$

e) $f(x,y) = e^{xy}$

f) $f(x,y) = arctg\,(\frac{y}{x})$

g) $f(x,y) = x^2.cos(y^2 - x)$

h) $f(x,y,z) = xy^2z$

i) $f(x,y,z) = (x+y+z).ln\,(x+y+z)$

2) Seja $f(x,y) = 2xy^2 - 3x^2y - xy$, calcule:

a) $f_x(x,y)$

b) $f_x(1,1)$

c) $f_y(x,y)$

d) $f_y(0,0)$

e) $f_{xx}(x,y)$

f) $f_{yy}(x,y)$

g) $f_{xy}(x,y)$

h) $f_{yx}(x,y)$

3) Seja $f(x,y) = cos(y^2 + x)$, calcule:

a) $f_x(x,y)$

b) $f_y(x,y)$

c) $f_{xx}(x,y)$

d) $f_{yy}(x,y)$

e) $f_{xy}(x,y)$

f) $f_{yx}(x,y)$

4) Seja $f(x,y) = 2x^2y^3 - ln(xy)$, calcule:

a) $f_{xx}(x,y)$

b) $f_{yy}(x,y)$

c) $f_{xy}(x,y)$

d) $f_{yx}(x,y)$

5) Seja $z = x.e^{\sqrt{x.y}}$, calcule:

a) $\frac{\partial z}{\partial x}$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}$

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

6) Seja $f(x,y,z) = sen(2x + 2y - z)$, calcule:

a) $f_x(x,y,z)$

b) $f_y(x,y,z)$

c) $f_z(x,y,z)$

d) $f_{xyz}(x,y,z)$

7) Seja $f(x,y,z) = arctg(\frac{1}{xyz})$, calcule:

a) $f_x(x,y,z)$

b) $f_y(x,y,z)$

c) $f_z(x,y,z)$

d) $f_{yx}(x,y,z)$

8) Seja $w = ln(xyz)$, calcule:

a) $\frac{dw}{dx}$

b) $\frac{dw}{dy}$

c) $\frac{dw}{dz}$

d) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial z}$

9)Calcule as derivadas parciais de terceira ordem da função $f(x,y) = e^{xy}$.

10) Calcule $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ usando a derivação parcial implícita.

a) $x^2y^3 - y^2 + z^2 = 0$

b) $x^2z^2 - y^2x^3 + 1 = 0$

c) $ln(x^2 + y^2 + z^2) = xy$

d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$

11)Calcule a inclinação das retas tangentes nos pontos indicados e na direção indicada.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto (1,1,2) na direção do eixo x.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto (0,0,0) na direção do eixo y.

c) $f(x,y) = cos(y + x)$ no ponto $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0)$ perpendicular ao eixo x.

d) $f(x,y) = cos(y + x)$ no ponto $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, 0)$ perpendicular ao eixo y.

12)Calcule a equação das retas tangentes nos pontos indicados e na direção indicada. Em seguida, visualize essas retas usando o geogebra.

a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 5$ no ponto (1,1,3) perpendicular ao eixo x.

b) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 5$ no ponto (0,1,4) perpendicular ao eixo y.

c) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + x$ no ponto (1,1,5) perpendicular ao eixo x.

d) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + x$ no ponto (0,0,0) perpendicular ao eixo y.

e) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ no ponto (1, 1, e^2) na direção do eixo x.

f) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ no ponto (1, 1, e^2) na direção do eixo y.

13)Considerando a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, calcule:

a) A equação das retas tangentes a essa esfera e perpendiculares ao eixo x e ao eixo y, no ponto (1, 1, 4).

b) Explique geometricamente, porque não existe $f_x(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $f_y(\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

14)Calcule a equação das retas tangentes ao elipsoide $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$, no ponto $(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ na direção do eixo x e na direção do eixo y.

15)Um aluno calculou as seguintes derivadas parciais de uma função $f(x,y)$ e encontrou: $f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 4x$ e $f_y(x,y) = 2x^3y + 1$. Indique uma provável função para $f(x,y)$.

16)Determine as derivadas parciais de:

$a)\ f(x,y) = \int_1^{xy} e^{t^2}\, dt$ $\qquad$ $b) f(x,y) = \int_{\sqrt{2\pi}}^{y} cos\,(t^2)\, dt$

23.6.4. Plano tangente à uma superfície

Na subseção anterior, aprendemos a utilizar as derivadas parciais para calcular a equação da reta tangente à superfície, na direção do eixo x ou na direção do eixo y. Nesta subseção, aplicaremos os mesmos conceitos para calcular a equação do plano tangente a uma superfície em um determinado ponto do espaço.

Seja uma superfície S de equação $f(x,y)$ cujas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas. E sejam as retas t_1 e t_2 tangentes a essa superfície no ponto (x_0, y_0, z_0), e perpendiculares, respectivamente, aos eixos x e y, conforme figura 23.6.4.1.

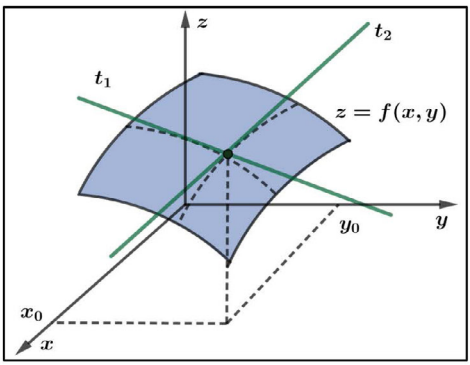


Figura 23.6.4.1

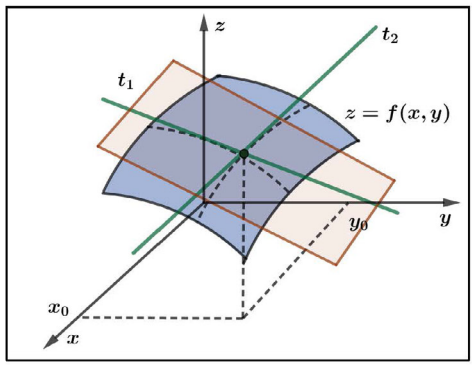


Figura 23.6.4.2

Analisemos a seguir a equação de um plano tangente a essa superfície no ponto (x_0, y_0, z_0) consoante a figura 23.6.4.2:

1) As retas t_1 e t_2 pertencem ao plano tangente e possui os seguintes vetores diretores:

$$(1, 0, f_x(x_0, y_0)) \text{ e } (0, 1, f_y(x_0, y_0)).$$

2) Um vetor normal ao plano pode dado pelo produto vetorial:

$$(1, 0, f_x(x_0, y_0)) \times \Big(0, 1, f_y(x_0, y_0)\Big) = \boxed{(-f_x(x_0, y_0), \quad (-f_y(x_0, y_0), 1)} \ (1).$$

3) A equação de um plano no espaço (vimos no início da seção 22.9) que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) é dado por:

$$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Substituindo (1), encontramos

$$(-f_x(x_0, y_0), (-f_y(x_0, y_0), 1) \,.(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}.$$

Isso demonstra o teorema a seguir.

Teorema 23.6.4.1: Se $f(x,y)$ possui derivadas parciais de primeira ordem contínuas no ponto (x_0, y_0), então o plano tangente a essa superfície nesse ponto é dado por:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemplo: Calcule a equação do plano tangente ao paraboloide elíptico $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto (1,1,2).

Solução: $f(1,1) = 1^2 + 1^2 \Rightarrow f(1,1) = 2$

$f_x(x,y) = 2x \Rightarrow \boxed{f_x(1,1) = 2}$.

$f_y(x,y) = 2y \Rightarrow \boxed{f_y(1,1) = 2}$.

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1) \Rightarrow \boxed{z = 2x + 2y - 2}$.

Esse plano está na figura 23.6.4.3.

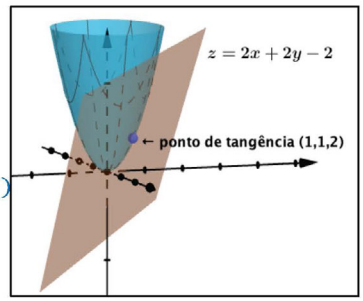


Figura 23.6.4.3

2º exemplo: Calcule a equação do plano tangente ao elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ no ponto (1,2,2).

Solução: Utilizando a derivação implícita, temos

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow 8x + 2z.\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2z.\frac{\partial z}{\partial x} = -8x \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-4x}{z}}.$$

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16 \Rightarrow 0 + 4y + 2z.\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2z.\frac{\partial z}{\partial y} = -4y \Rightarrow \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{z}}.$$

Como o ponto (1,2,2) está no primeiro octante, podemos considerar somente o hemisfério superior do elipsoide:

$z^2 = 16 - 4x^2 - 2y^2 \Rightarrow z = \sqrt{16 - 4x^2 - 2y^2}$.

Substituindo nas derivadas parciais, encontramos:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-4x}{\sqrt{16 - 4x^2 - 2y^2}}.$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{z} = \frac{-2y}{\sqrt{16 - 4x^2 - 2y^2}}.$$

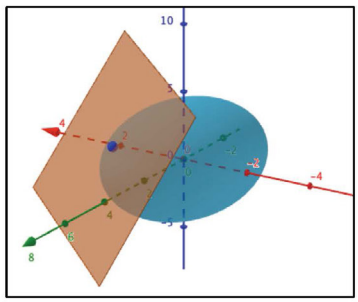


Figura 23.6.4.4

$$f_x(1,2) = \frac{-4x}{\sqrt{16 - 4x^2 - 2y^2}} = \frac{-4.1}{\sqrt{16 - 4.1^2 - 2.2^2}} = \frac{-4}{\sqrt{4}} \Rightarrow \boxed{f_x(1,2) = -2}.$$

$$f_y(1,2) = \frac{-2y}{\sqrt{16 - 4x^2 - 2y^2}} = \frac{-2.2}{\sqrt{16 - 4.1^2 - 2.2^2}} = \frac{-4}{\sqrt{4}} \Rightarrow \boxed{f_y(1,2) = -2}.$$

$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$z = 2 - 2.(x-1) - 2.(y-2) \Rightarrow z = 2 - 2x + 2 - 2y + 4 \Rightarrow \boxed{z = -2x - 2y + 8}$.

Esse plano está na figura 23.6.4.4.

23.6.5. Aproximação linear e diferencial de uma função

No 1º exemplo anterior, encontramos a equação do plano $z = 2x + 2y - 2$ tangente ao paraboloide elíptico $f(x,y) = x^2 + y^2$ no ponto (1,1,2). A partir desse plano podemos encontrar o valor da função $f(x,y)$ no ponto (1, 1) usando a equação do plano tangente em vez de usar $f(x,y)$. Veja:

$$z = 2x + 2y - 2 = 2.1 + 2.1 - 2 = 2.$$

Essa mesma ideia podemos aplicar para encontrar um valor aproximado de um ponto próximo a (1,1). Como exemplo, vamos calcular o valor da função no ponto (1,1;1,2), utilizando a equação do plano e a função original e comparar os resultados.

$$z = 2x + 2y - 2 = 2.(1{,}1) + 2.(1{,}2) - 2 = 2{,}6.$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = 1{,}1^2 + 1{,}2^2 = 2{,}65.$$

A diferença foi de apenas $2{,}65 - 2{,}6 = 0{,}05$.

Essa excelente aproximação obtida de forma mais simples utilizando a equação da tangente é denominada de **linearização de uma função de duas variáveis ou aproximação linear pela tangente**, isto é:

$$f(x,y) \cong f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

$$\boxed{f(x,y) - f(x_0,y_0) \cong f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)} \quad (1).$$

Os incrementos de 0,1 e 0,2 em x e y, vistos no exemplo anterior, são denominados de Δx e Δy. Esses incrementos concomitantes ocasionam um incremento Δz na função, pelo qual denominamos de **incremento total**.

Nesse contexto, podemos reescrever (1), utilizando esses incrementos $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ e Δz, conforme a figura 23.6.5.1, da seguinte forma:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) \cong f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \Rightarrow$$

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) \cong f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

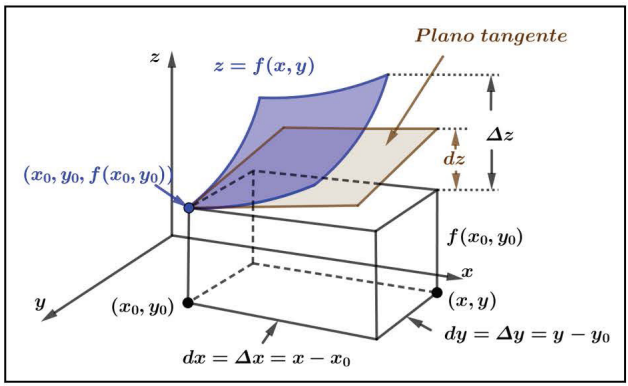


Figura 23.6.5.1

Podemos ainda, transformar essa aproximação em igualdade, adicionando os erros de aproximação ε_1 e ε_2 para os incrementos Δx e Δy, respectivamente:

$$\boxed{\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y} \Rightarrow com\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0\ quando\ (\Delta x, \Delta y) \to 0.$$

Como dx é a notação de $\Delta x \to 0$ e dy é a notação de $\Delta y \to 0$, temos que a **diferencial** df (ou diferenciação total df) de uma função de duas variáveis será dado por

$$df = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy.$$

O que implica em termos de função de diferencial em:

$$\boxed{df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy} \text{ ou } \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}.$$

Para três variáveis:

$$dw = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz.$$

Sabemos que as derivadas parciais medem as taxas de crescimento ou decrescimento de uma função segundo uma variável, mantendo as demais constante. A diferencial de uma função (ou diferenciação total de uma função) de duas ou mais variáveis mede os incrementos simultâneos das variáveis na função.

Exemplo: Seja a função $f(x,y) = y.e^{2xy}$. Calcule:

a) A diferencial df

Solução: $f(x,y) = y.e^{2xy} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = 2y^2.e^{2xy} \\ f_y(x,y) = e^{2xy} + 2xye^{2xy} \end{cases}$

$$\boxed{df = (2y^2.e^{2xy})dx + (e^{2xy} + 2xye^{2xy})dy}.$$

b) O incremento total Δz quando x varia de 0 para 0,1 e y varia de -1 para -1,1. Compare Δz com df.

Solução:

O ponto é (0, -1). E assim: $f(x_0,y_0) = f(0,-1) = -1.e^{2.0.(-1)} = -1$.

O incremento Δz é:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) = f(0{,}1\ ;\ -1{,}1) - f(0,-1)$$

$$\Delta z = f(0{,}1\ ;\ -1{,}1) - f(0;-1) = -0{,}88 - (-1) = 0{,}12 \Rightarrow \boxed{\Delta z = 0{,}12}.$$

$$f_x(x,y) = 2y^2.e^{2xy} \Rightarrow f_x(0,-1) = 2(-1)^2.e^{2.0.(-1)} \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = 2}.$$

$$f_y(x,y) = e^{2xy} + 2xy.e^{2xy} \Rightarrow \boxed{f_y(0,-1) = 1}.$$

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 2.\overbrace{0{,}1}^{\Delta x} + 1.\overbrace{(-0{,}1)}^{\Delta y} = 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}1 \Rightarrow \boxed{df = 0{,}1}.$$

É perceptível que $df \cong \Delta z$.

2º exemplo: Seja $f(x,y) = xy^2$ determine no ponto (1,3) o incremento total Δz e a diferencial df da função, se $\Delta x = 0{,}1$ e $\Delta y = 0{,}2$.

Solução: O incremento Δz é:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(0{,}1\ ;\ -1{,}1) - f(0,-1).$$

$$\Delta z = f(1{,}1\ ;\ 3{,}2) - f(1;3) = 11{,}264 - 9 = 2{,}26 \Rightarrow \boxed{\Delta z = 2{,}26}.$$

$$f_x(x,y) = y^2 \Rightarrow \boxed{f_x(1{,}2) = 9}.$$

$$f_y(x,y) = 2xy \Rightarrow f_y(1{,}2) = 2.1.3 \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = 6}.$$

$$df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy \Rightarrow f = 9.\overbrace{0{,}1}^{\Delta x} + 6.\overbrace{0{,}2}^{\Delta y} = 0{,}9 + 1{,}2 \Rightarrow \boxed{df = 2{,}1}.$$

Veja que $df \cong \Delta z$.

Como a diferencial df é mais fácil de calcular que Δz e $df \cong \Delta z$, podemos utilizá-la como cálculo de erro de medição.

Suponha que houve um erro na medição do ponto (1,3), do exemplo anterior, e os dados utilizados no cálculo foram (1,1 ; 3,2). Então, o erro total pode ser considerado como a diferencial da função ($df = 2{,}1$), dividido pelo valor real da função ($f(1{,}3) = 9$), ou seja: 2,1/9 = 0,2333... o que corresponde a 23,33%. Esse percentual diminuirá na medida que os incrementos Δx e Δy vão se aproximando de zero.

3º exemplo: Um funcionário de uma empresa precisou medir a capacidade de um tanque cilíndrico utilizado para armazenar combustíveis. O raio correto deveria ser de 1m e altura 3m, porém ao fazer as medições e os cálculos, usou 1,01m de raio e 3,03m de altura. Qual o percentual do erro em relação ao valor correto da capacidade desse tanque?

Solução:

$$V = f(r,h) = \pi r^2 h \Rightarrow Volume\ correto \Rightarrow V = 3{,}14.1^2.3 \Rightarrow \boxed{V = 9{,}42m^3}$$

$$f_r(r,h) = 2\pi rh \Rightarrow f_r(1{,}3) = 2.3{,}14.1.3 = 18{,}84.$$

$$f_h(r,h) = \pi r^2 \Rightarrow f_h(1{,}3) = 3{,}14.1^2 = 3{,}14.$$

$$df = f_r(r,h)dr + f_h(r,h)dh = 18{,}84.\overbrace{0{,}01}^{\Delta x} + 3{,}14.\overbrace{0{,}03}^{\Delta y} \Rightarrow \boxed{df = 0{,}2826m^3}.$$

O erro foi de aproximadamente 0,2826/9,42 = 3% da capacidade correta do tanque.

Em alguns casos, para manter o valor da função constante (inalterada), é preciso alterar uma variável e compensar a outra. Nesses casos, a diferencial da função é nula, ou seja, $df = 0$. Aplicando na definição:

$$f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{f_x}{f_y}}\ (2).$$

4º exemplo: Suponha que o funcionário do 3º exemplo anterior, errou o raio, em vez de 1, utilizou 1,01. Para qual valor deveria "errar" também a altura do

tanque, a fim de compensar o erro e manter a capacidade do tanque no valor correto?

Solução:

$$V = f(r,h) = \pi r^2 h \Rightarrow Volume\ correto \Rightarrow V = 3{,}14.1^2.3 \Rightarrow \boxed{V = 9{,}42m^3}.$$

$$f_r(r,h) = 2\pi rh \Rightarrow f_r(1{,}3) = 2\,.3{,}14\,.1\,.3 = 18{,}84.$$

$$f_h(r,h) = \pi r^2 \Rightarrow f_h(1{,}3) = 3{,}14\,.1^2 = 3{,}14.$$

$$\frac{dr}{dh} = -\frac{f_h}{f_r} \Rightarrow \frac{dr}{dh} = -\frac{3{,}14}{18{,}84} \Rightarrow \frac{dr}{dh} \cong -\frac{3{,}14}{18{,}84} \cong -0{,}16667.$$

A variação do raio em relação a altura deve ser de aproximadamente -0,17. Assim:

$$\frac{0{,}01}{dh} = -0{,}16667 \Rightarrow \boxed{dh = -0{,}06m}.$$

A altura do tanque deve ter medida reduzida para aproximadamente $3 - 0{,}06 = 2{,}94$.

Resposta: O funcionário deve utilizar uma altura de 2,94m.

Agora, vamos mostrar que a equação (2) é equivalente a derivação implícita de uma função, conforme o teorema a seguir.

Teorema 23.6.5.1: Se a equação $f(x,y) = c$ definir implicitamente como uma função diferenciável em x, e se $f_x \neq 0$, então:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{f_x}{f_y}} \ ou \ \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Demonstração: Dividindo ambos os membros de $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ por dx, obtemos: $\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$. Como $df = 0$, concluímos que:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{f_x}{f_y}}.$$

Exemplo: Calcule a derivada $\frac{dy}{dx}$ da função $2x^3 - y^2x - 1 = 0$ usando a equação acima e utilizando a derivação implícita.

Solução: $\begin{cases} f_x(x,y) = 6x^2 - y^2 \\ f_y(x,y) = -2yx \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - y^2}{-2yx}}$.

Utilizando a derivação implícita: $6x^2 - (2y.y'x + 1.y^2) - 0 = 0 \Rightarrow$

$6x^2 = 2y.y'x + 1.y^2 \Rightarrow 6x^2 - y^2 = 2y.y'x \Rightarrow \boxed{y' = \frac{6x^2 - y^2}{2yx}}$.

Para o caso de funções de três variáveis, a diferencial de uma função $w = f(x,y,z)$ é dada por:

$$dw = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

Exemplo: Um piscina retangular possui medidas 2m x 3m x 6m. Devido a um problema no instrumento de medição, ao calcular o volume dessa piscina, cada medida utilizada ficou com 1cm a menos. Utilize a diferencial dw para estimar o percentual de erro.

Solução: As dimensões de x, y e z, o volume da piscina é $V = x.y.z$. Dessa forma:

$$dV = f_x(x,y,z)dx + f_y(x,y,z)dy + f_z(x,y,z)dz$$

$$dV = y.z.dx + x.z.dy + x.y.dz.$$

$$dV = 3.6.(-0{,}01) + 2.6.(-0{,}01) + 2.3.(-0{,}01) = -0{,}18 - 0{,}12 - 0{,}06 = -0{,}36.$$

O erro foi de $0{,}36/(2.3.6) = 0{,}36/36 = 1\%$ do volume correto da piscina.

23.6.6. Regra da cadeia

A mesma regra da cadeia aplicada à funções com uma variável, pode ser aplicada à funções com duas ou mais variáveis.

Suponha que $f(x,y)$ seja diferenciável de x e y, em que $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então, f é uma função diferenciável de t e:

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}}$$

Exemplo: Se $f(x,y) = 2x^2 - 3y$, onde $x = cos3t$ e $y = sent$, calcule $\frac{df}{dt}$.

Solução:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{df}{dt} = 4x.(-3sen3t) + (-3).cost.$$

Substituindo $x = cos3t$:

$$\frac{df}{dt} = 4.cos3t.(-3sen3t) + (-3).cost \Rightarrow \boxed{\frac{df}{dt} = -12.cos3t.sen3t - 3.cost}.$$

Suponha que $f(x,y)$ seja diferenciável de x e y, em que $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ diferenciáveis de s e t. Então, f é uma função diferenciável de s e t, e:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t}}$$

Exemplo: Se $f(x,y) = x^2 + e^y$, onde $x = st$ e $y = s^2t$, calcule $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial s} = 2x.t + e^y.2st \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial s} = 2t(x + e^y.s)}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial t} = 2x.s + e^y.s^2}.$$

23.6.7. Diferenciabilidade e continuidade

Para encerrar essa seção, anunciaremos dois teoremas a seguir (sem demonstração), que podem ser úteis no entendimento de continuidade e diferenciabilidade de uma função de duas ou mais variáveis.

Teorema 23.6.7.1: Se todas as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem e forem contínuas em um ponto, então f será diferenciável nesse ponto.

Teorema 23.6.7.2: Se uma função for diferenciável em um ponto, então ela será contínua nesse ponto.

EXERCÍCIOS 23.4

1) Calcule a equação do plano tangente às superfícies nos pontos indicados.

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, no ponto (0,0,0).

b) $f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + 2xy$, no ponto (1,-1,3).

c) $f(x,y) = x^3 + y^3$, no ponto (1,0,1).

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, no ponto (3,4,5).

e) $f(x,y) = ln(x^2 - y)$, no ponto (2,3,0).

f) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, no ponto (3,0,4).

Use o software geogebra para confirmar a tangência dos planos à superfície nos pontos indicados.

2) Seja a função $f(x,y) = 1 + x.sen(\pi y)$, calcule o valor aproximado de $f(1{,}1; 0{,}9)$ utilizando a equação do plano tangente à função no ponto (1,1).

3) Seja a função $f(x,y) = x^3 - xy^2$, determine a diferencial df.

4) Seja a função $w(x,y,z) = x^2y + zxy + zy^2$, determine a diferencial dw.

5) Seja a função $f(x,y) = x^2 - 3xy + y^2$.

a) Determine a diferencial df.

b) Se x varia de 2 à 2,05 e y varia de 1 à 1,01 compare df e Δf.

6) Seja a função $f(x,y) = e^{x^2y}$ determine a diferencial df. Se x varia de 1 à 1,01 e y varia de 0 à 0,02, compare df e Δf.

7) Seja a função $w(x,y,z) = e^{xyz} - e^{-xyz}$ determine a diferencial dw. Se x varia de 1 à 1,01, y varia de 0 à 0,01 e z varia de 1 à 1,02. Calcule dw.

8) Um cone tem raio correto 50cm e altura 1m. Qual o percentual do erro em relação ao volume correto desse cone, se foram utilizadas medidas de 49,8 cm de raio e 1,02m de altura?

9)Seja a função $f(x,y) = 4x^3y^2 + xy$, se x varia de 3 à 3,05, para quanto deve variar y do ponto (3,7) para que a função fique inalterada.

10)Calcule a derivada implícita das seguintes funções usando derivadas parciais.

a) $6x^2 - yx = 0$

b) $2x^3 + yx^2 - 5 = 0$

c) $e^{xy} - 1 = 0$

d) $ye^x + xe^{xy} - 1 = 0$

11)Explique por que as funções abaixo não são diferenciáveis nos respectivos pontos:

a) $f(x,y) = \sqrt{4x - y}$, no ponto (1,4).

b) $f(x,y) = ln(2x - xy)$, no ponto (1,2).

12)Calcule $\frac{df}{dt}$ usando a regra da cadeia:

a) $f(x,y) = 2x^2 + xy$, sendo $x = cost$ e $y = 2sent$

b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$, sendo $x = e^{-t}$ e $y = e^t$

c) $f(x,y,z) = x.e^{yz}$, sendo $x = t$ e $y = t^2$ e $z = 1 + 2t$

d) $f(x,y,z) = arctg(xyz)$, sendo $x = e^{-t}$ e $y = e^t$ e $z = e^{t^2}$

13)Calcule $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ usando a regra da cadeia:

a) $f(x,y) = x^2y$, sendo $x = scost$ e $y = s^2.sent$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2x$, sendo $x = s + t$ e $y = st^2$

c) $f(x,y) = e^{y+2x}$, sendo $x = s.e^{-t}$ e $y = s.e^t$

d) $f(x,y) = tgy.senx$, sendo $x = 2 + st$ e $y = 5 - t$

14) Sejam uma função $f(x,y,z) = 0$ mostre que as derivadas parciais podem ser calculadas por:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}} \text{ e } \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}}.$$

15)Sendo $x^2 + 3xy + z^2x + z = 0$, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ usando a fórmula do item anterior.

16)Sendo $lnxy + yz^2 = z$, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ em função de z.

23.6.8. Derivadas direcionais e vetor gradiente

Vimos que as derivadas parciais permitem calcular a taxa de variação instantânea de uma função na direção dos eixos x e y. Neste tópico, abordaremos um conceito mais abrangente de derivada, em que nos permite calcular a taxa de variação instantânea de uma função, não somente nas direções mencionadas, mas em qualquer direção. Essa derivada é denominada de **derivada direcional**.

Suponha que queiramos calculá-la na direção de um vetor unitário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$, conforme a figura 23.6.8.1.

Para qualquer escalar h, temos $h\vec{u} = \langle ha, hb \rangle$, $x - x_0 = ha$ e $y - y_0 = hb$, então

$$\Delta z = f\big(x_0 + ha, y_0 + hb\big) - f\big(x_0, y_0\big).$$

Dividindo por h:

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Se tomarmos o limite, e ele existir, quando $h \to 0$, obteremos a taxa de variação instantânea de z na direção de $\vec{u}$, denotada por $D_u f(x_0, y_0)$ e denominada de derivada direcional de $f(x_0, y_0)$ na direção do vetor unitário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$:

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Observe que quando $\vec{u} = \langle 1, 0 \rangle$, temos a derivada parcial em relação a x e quando $\vec{u} = \langle 0, 1 \rangle$, temos a derivada parcial em relação a y, isto é, as derivadas parciais são casos particulares de derivada direcional.

Interpretação geométrica: A derivada direcional representa a inclinação da reta tangente à função $f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) e na direção do vetor unitário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$, conforme a figura 23.6.8.1. A equação dessa reta tangente é dado por:

$$r\colon (x_0, y_0, z_0) + t.(a, b, D_u f(x_0, y_0))$$

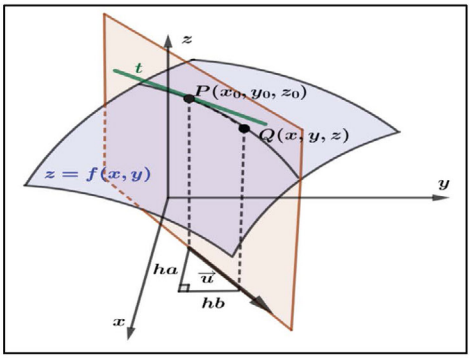


Figura 23.6.8.1

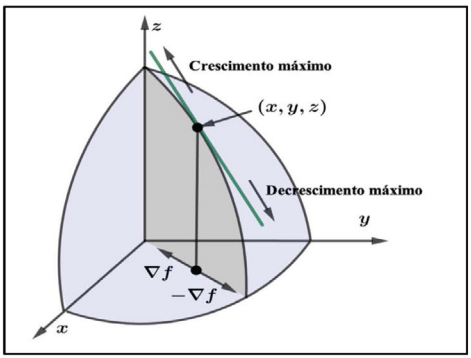


Figura 23.6.8.2

Teorema 23.6.8.1: Se f é uma função diferenciável de x e y, então a derivada direcional de f na direção do vetor unitário $\vec{u} = \langle a, b \rangle$ é dada por:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y).a + f_y(x,y).b$$

Demonstração: Ao definir $g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb)$, temos

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} = D_u f(x_0, y_0) \quad (1).$$

Fazendo $g(h) = f(x,y)$, então $x = x_0 + ha$ e $y = y_0 + hb$. Aplicando regra da cadeia, obtemos

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x}.\underbrace{\frac{dx}{dh}}_{a} + \frac{\partial f}{\partial y}.\underbrace{\frac{dy}{dh}}_{b} = f_x(x,y).a + f_y(x,y).b.$$

Para $h = 0$, tem-se $x = x_0, y = y_0$ e $g'(0) = f_x(x_0,y_0).a + f_y(x_0,y_0).b$, o que equivale a (1), demonstrando o teorema.

A derivada direcional pode ser escrita como um produto interno entre vetores:

$$D_u f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle . \langle a, b \rangle.$$

Em que o vetor $\langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle$ é definido como (vetor) **gradiente** de f e denotamos como ∇f:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Usando a notação de gradiente e produto interno de vetores, a derivada direcional de f pode ser expressa como:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}.$$

Visto que a derivada direcional nos dá a taxa de variação instantânea da função em todas as direções possíveis, qual a direção pela qual essa taxa é máxima ou mínima?

Pela fórmula do produto escalar entre vetores, podemos escrever a derivada direcional como:

$$D_u f(x,y) = \nabla f.\vec{u} = |\nabla f|.|\vec{u}|.cos\theta \quad (2).$$

Para que esse produto seja máximo é preciso que $\theta = 0°$, ou seja, o valor máximo (ou crescimento máximo) da derivada direcional ocorre quando o vetor $\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido do vetor gradiente ∇f. E contrariamente, o valor mínimo (ou crescimento mínimo) da derivada direcional, ocorre quando o vetor $\vec{u}$

tem a mesma direção do vetor gradiente ∇f, porém sentido contrário, isto é, quando $\theta = 180°$. Ver figura 23.6.8.2.

E além disso, de acordo com (2), uma vez que $|\vec{u}| = 1$, a taxa de variação instantânea máxima é dada por $|\nabla f|$ e mínima por $-|\nabla f|$.

Exemplo: Seja a função $f(x,y) = 3x^2y - 2x$ e o vetor $\vec{u} = \langle 2,1\rangle$.

a)Calcule a derivada direcional de f na direção do vetor $\vec{u}$.

Solução: Calculando incialmente o vetor unitário na direção de $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{u}' = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right\rangle.$$

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \langle 6xy - 2, 3x^2\rangle \Rightarrow vetor\ gradiente.$$

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}' \Rightarrow D_u f(x,y) = \langle 6xy-2, 3x^2\rangle.\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle \Rightarrow$$

$$D_u f(x,y) = (6xy-2).\frac{2\sqrt{5}}{5} + (3x^2).\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \boxed{D_u f(x,y) = \frac{\sqrt{5}}{5}(12xy + 3x^2 - 4)}.$$

b)Qual o valor de $\nabla f(1,1)$ e $D_u f(1,1)$?

Solução: $\nabla f(1,1) = \langle 6.1.1 - 2, 3.1^2\rangle \Rightarrow \boxed{\nabla f(1,1) = \langle 4,3\rangle}$.

$$D_u f(1,1) = \nabla f(1,1).\vec{u}' = \langle 4,3\rangle.\left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle = \frac{8\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \boxed{D_u f(1,1) = \frac{11\sqrt{5}}{5}}.$$

c) Em que direção, partindo do ponto $(1,1)$, f tem uma taxa de variação instantânea máxima e mínima? Calcule essas taxas.

Solução: A taxa de variação máxima (onde a função "cresce mais depressa") ocorre para um vetor $\vec{u}$ está na mesma direção e sentido de $\nabla f(1,1) = \langle 4,3\rangle$. Essa taxa de variação máxima é $|\nabla f| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$.

A taxa de variação mínima (ou decrescimento mínimo) ocorre para um vetor $\vec{u}$ está na mesma direção e sentido contrário de $\nabla f(1,1) = \langle 4,3\rangle$. Essa taxa é $-|\nabla f| = -5$.

d)Qual a equação da reta tangente à função no ponto $(1,1)$ e na direção de u?

Solução:

r: $(x_0, y_0, z_0) + t.(a, b, D_u f(x_0, y_0)) \Rightarrow$

r: $(1,1,1) + t.\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{11\sqrt{5}}{5}\right)$.

A reta tangente à superfície no ponto (1, 1, 1), bem como, os vetores $\nabla f(1,1) = \langle 4,3\rangle$ e $\vec{u}' = \left\langle \frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right\rangle$ estão representados na figura 23.6.8.3.

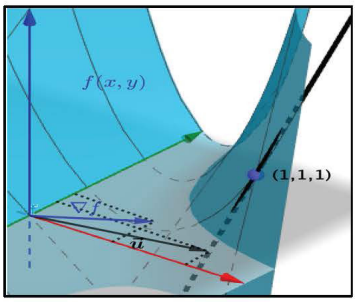


Figura 23.6.8.3

Outro fato interessante sobre o vetor gradiente de uma função $f(x,y)$, é que ele é sempre perpendicular a reta tangente à curva de nível $f(x,y)=k$. A demonstração vem a seguir.

Seja uma superfície $f(x,y)$, conforme a figura 23.6.8.4. A equação do plano tangente a essa superfície no ponto (x_0,y_0) é dado por:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

O vetor normal à esse plano no ponto (x_0,y_0,z_0) é:

$$\overrightarrow{n_t} = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1\right).$$

O vetor normal ao plano que representa a curva de nível $f(x,y)=k$ é:

$$\overrightarrow{n_k} = (0,0,1).$$

O produto vetorial $\overrightarrow{n_t} \times \overrightarrow{n_k}$ que equivale ao vetor diretor da reta de interseção dos dois planos é $\overrightarrow{n_d} = \left(-f_y(x_0,y_0), f_x(x_0,y_0), 0\right)$ (verifique!). E com isso:

$$\overrightarrow{n_d}.\nabla f = \left(-f_y(x_0,y_0), f_x(x_0,y_0), 0\right).\left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), 0\right) = 0.$$

O que comprova que o vetor gradiente é perpendicular à reta tangente à curva de nível $f(x,y)=k$, conforme a representação na figura 23.6.8.5.

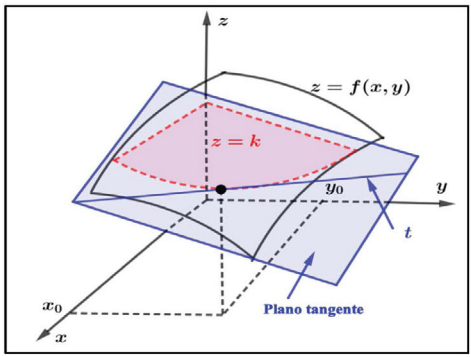


Figura 23.6.8.4

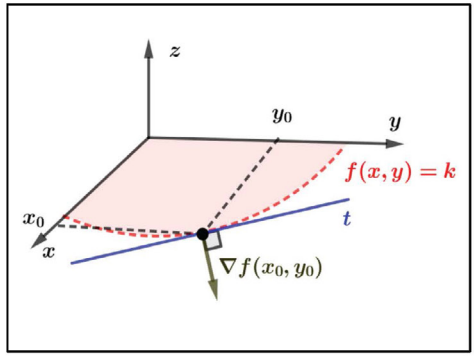


Figura 23.6.8.5

Estendendo as definições anteriores para funções de três variáveis, temos:

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Usando a notação de gradiente, a derivada direcional fica assim:

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).\vec{u}$$

Uma função de três variáveis não pode ser representada geometricamente, mas podemos representar o vetor gradiente $\nabla f(x,y,z)$ e a superfície de nível $\nabla f(x,y,z)=k$. As interpretações geométricas do vetor gradiente e da superfície de nível são análogas às de funções de duas variáveis, a diferença é que o vetor

gradiente passa a ser um vetor normal ao plano tangente à superfície de nível (e não mais curva de nível). Ver figura 23.6.8.6.

A taxa de variação máxima continua a ser dada por $|\nabla f|$ e mínima por $-|\nabla f|$, com as mesmas direções e sentidos, de crescimento máximo e mínimo.

Exemplo: Calcule a derivada direcional $D_u f(x,y,z)$ da função $f(x,y,z) = y^2 + xyz$, na direção do vetor $\vec{u} = \langle 2,1,2\rangle$. Qual o valor de $\nabla f(1,2,3)$, $D_u f(1,2,3)$ e taxa de variação máxima?

Solução: Inicialmente devemos calcular o vetor unitário na direção de $\vec{u}$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \vec{u}' = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle.$$

$$\nabla f(x,y,z) = \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle \Rightarrow \boxed{\nabla f(x,y,z) = \langle yz, 2y+xz, xy\rangle}.$$

$$D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).\vec{u}' = \langle yz, 2y+xz, xy\rangle.\left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle = \boxed{\frac{2yz+2y+xz+2xy\rangle}{3}}.$$

$$\nabla f(1,2,3) = \langle 2.3, 2.2+1.3, 1.2\rangle = \langle 6,7,2\rangle.$$

$$D_u f(1,2,3) = \langle 6,7,2\rangle.\left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle = 4 + \frac{7}{3} + \frac{4}{3} = \frac{23}{3} \Rightarrow \boxed{D_u f(1,2,3) = \frac{23}{3}}.$$

A taxa de variação máxima é $|\nabla f| = \sqrt{6^2+7^2+2^2} = \sqrt{89}$.

A partir do entendimento da figura 23.6.8.6, podemos anunciar um caso particular de uma função de três variáveis na forma $f(x,y,z) = c$. Nesse caso, o plano tangente pode ser dado por:

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Como z será dado implicitamente, temos:

$$-f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0).$$

O que implica em equação de plano tangente igual a:

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0.$$

E um vetor normal $\vec{n}$ ao plano tangente igual a:

$$\vec{n} = \left\langle f_x(x_0,y_0,z_0), f_y(x_0,y_0,z_0), f_z(x_0,y_0,z_0)\right\rangle.$$

Exemplo: Vamos encontrar a equação do plano tangente ao elipsoide $y^2 + x^2 + 2z^2 = 10$ no ponto (1, 1, 2) e o vetor normal à esse plano.

Solução: Inicialmente devemos calcular o vetor unitário na direção de $\vec{u}$.

$f_x(x,y,z) = 2x$; $f_y(x,y,z) = 2y$ e $f_z(x,y,z) = 4z$.

$f_x(1,1,2) = 2$; $f_y(1,1,2) = 2$ e $f_z(1,1,2) = 8 \Rightarrow \boxed{\vec{n} = \langle 2,2,8\rangle}$.

$2(x-1) + 2(y-1) + 8(z-2) = 0 \Rightarrow \boxed{x+y+4z = 10}$.

O paraboloide, o plano tangente e o vetor normal, estão na figura 23.6.8.7. Use o geogebra para melhor visualização.

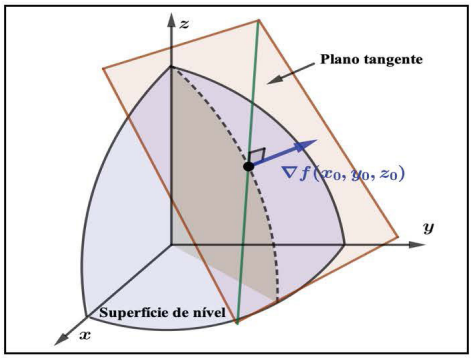


Figura 23.6.8.6

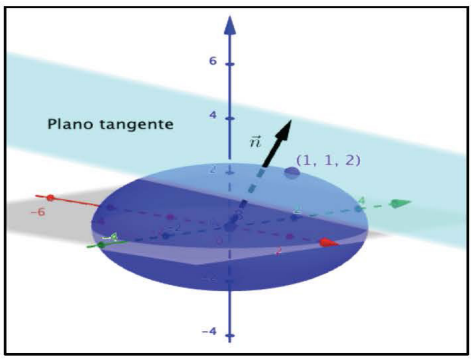


Figura 23.6.8.7

EXERCÍCIOS 23.5

1) Calcule a derivada direcional $D_u f$ e o vetor gradiente ∇f das funções a seguir no ponto e na direção dos vetores indicados. Aponte um vetor pelo qual a taxa de variação instantânea da função é máxima, nesse ponto, e calcule essa taxa.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, ponto (0,0) e $\vec{u} = \langle -1, 2 \rangle$

b) $f(x,y) = x^2y^3 - x^3y^2$, ponto (1,1) e $\vec{u} = \langle 4, 3 \rangle$

c) $f(x,y) = y.e^{xy}$, ponto (0,1) e $\vec{u} = \langle -1, 0 \rangle$

d) $f(x,y) = cos\,(yx)$, ponto $(1, \frac{\pi}{2})$ e $\vec{u} = \langle 1, 1 \rangle$

e) $f(x,y) = e^x.sen(xy)$, ponto $(1, \pi)$ e $\vec{u} = \langle -1, -1 \rangle$

f) $f(x,y,z) = e^{xyz}$, ponto (0,1,2) e $\vec{u} = \langle 1, 2, 2 \rangle$

g) $f(x,y,z) = ln\,(x + y + z)$, ponto (1, 1, 0) e $\vec{u} = \langle 1, -2, 1 \rangle$

h) $f(x,y,z) = xe^z - ye^x + ze^y$, ponto (0,0,0) e $\vec{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

i) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ponto $(0, 1, -1)$ e $\vec{u} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

2) Calcule a equação da reta tangente e a taxa de variação máxima e mínima das funções a seguir, no ponto e na direção dos vetores indicados.

a) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$, ponto (0,0) e $\vec{u} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

b) $f(x,y) = sen(x + 2y)$, ponto $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\vec{u} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

c) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, ponto (6,8) e $\vec{u} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

d) $f(x,y) = 13x\sqrt{y}$, ponto (1,1) e $\vec{u} = 12\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$

3) Calcule o vetor normal às superfícies e a equação do plano tangente às superfícies nos pontos indicados.

a) $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ no ponto (0, 0 ,2);

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ no ponto (1, 2 ,1).

23.6.9. Máximos e mínimos de funções de duas variáveis

Essencialmente, as definições e teoremas envolvendo máximos e mínimos de uma função de uma variável também se aplicam às funções com duas variáveis, com algumas peculiaridades. Vamos as definições.

Definição 23.6.9.1: Uma função f de duas variáveis tem um **máximo relativo (ou máximo local)** em (x_0, y_0), se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para quaisquer pontos (x, y) pertencente a um círculo aberto centrado em (x_0, y_0). Diz-se que f tem um **máximo absoluto (ou máximo global)** em (x_0, y_0), se $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para quaisquer pontos (x, y) do domínio de f.

Definição 23.6.9.2: Uma função f de duas variáveis tem um **mínimo relativo (ou mínimo local)** em (x_0, y_0), se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para quaisquer pontos (x, y) pertencente a um círculo aberto centrado em (x_0, y_0). Diz-se que f tem um **mínimo absoluto (ou mínimo global)** em (x_0, y_0), se $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para quaisquer pontos (x, y) do domínio de f.

Assim, como ocorre com as funções de uma variável, os máximos e mínimos relativos ou absolutos de uma função, são denominados apenas de **extremos**. Ver figura 23.6.9.1.

Nem todas as funções de duas variáveis possuem extremos. Porém, se a função for contínua em um conjunto fechado[19] e limitado[20], a garantia da existência de extremos é assegurada pelo teorema a seguir.

Teorema 23.6.9.1 (teorema do valor extremo[21]): Se $f(x, y)$ for contínua em um conjunto fechado e limitado D, então f terá um extremo (máximo ou mínimo) em D.

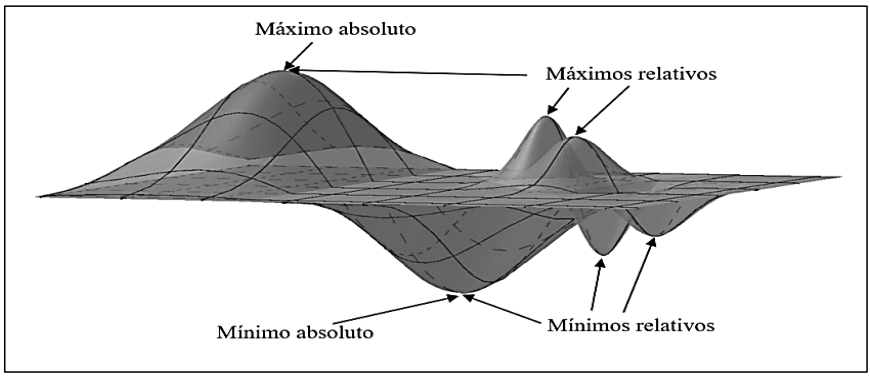


Figura 23.6.9.1 - Extremos de uma função de duas variáveis.

[19] Um conjunto de $\mathbb{R}^2$ é denominado de conjunto fechado se conter todos os pontos de fronteira. Exemplo: O conjunto $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2$ é um conjunto fechado, pois contém todos os pontos de fronteira ($\leq$).

[20] Um conjunto de $\mathbb{R}^2$ é denominado de conjunto limitado quando é finito por extensão.

[21] Também conhecido como teorema de Weierstrass (1815-1897) para funções de duas variáveis.

As premissas desse teorema são fundamentais para sua veracidade. Pois, qual seria, por exemplo, o extremo da função $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, cujo gráfico está figura 23.6.9.2, para um conjunto $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1$? O conjunto D é fechado, mas não é limitado.

Na certeza de um extremo, é razoável e geometricamente intuitivo, pensar que esses extremos ocorrem em pontos cujos planos tangentes à superfície é horizontal (paralelo ao plano xy - ver figura 23.6.9.3), isto é, nos pontos onde ambas as derivadas parciais são nulas. Esse pensamento é assegurado pelo teorema 23.6.9.2 a seguir. Antes anunciá-lo, precisamos da definição de ponto crítico.

Definição 23.6.9.3: Um ponto (x_0, y_0) do domínio da função $f(x,y)$ será um **ponto crítico** se as derivadas parciais forem nulas ou se uma ou ambas as derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0).

Teorema 23.6.9.2: Se $f(x,y)$ tiver um extremo (máximo ou mínimo) em um ponto (x_0, y_0), então esse extremo ocorre em um ponto crítico, isto é, ou:

– Ambas as derivadas parciais são nulas em (x_0, y_0):

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \; e \; f_y(x_0, y_0) = 0$$

– Ou, alguma das derivadas parciais não existe em (x_0, y_0).

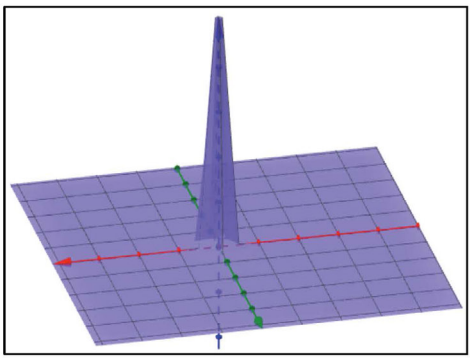


Figura 23.6.9.2
(Derivadas parciais não existem em (0,0))

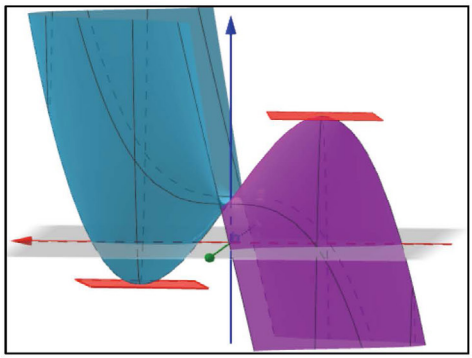


Figura 23.6.9.3
(Planos tangentes horizontais)

Esse teorema enfatiza também outra possibilidade para um extremo, o ponto onde as derivadas parciais não existem. Como exemplo, temos a função $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ cujo gráfico (um cone) está na figura 23.6.9.4. As derivadas parciais no ponto (0,0) não existem (verifique!) e esse é um ponto de mínimo.

Importante! A recíproca desse teorema é falsa. Veja por exemplo, o paraboloide hiperbólico definido pela função $f(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$. Suas derivadas

parciais: $f_x(x,y)=\frac{x}{2}$ e $f_y(x,y)=-\frac{2y}{9}$ são nulas no ponto (0,0), mas o ponto (0,0) não é um extremo relativo. Observe no gráfico dessa função, na figura 23.6.9.5, que o ponto (0,0) é máximo relativo para o plano zy e também mínimo relativo para o plano xz. Esse tipo de ponto é denominado de **ponto de sela**, conforme a definição a seguir.

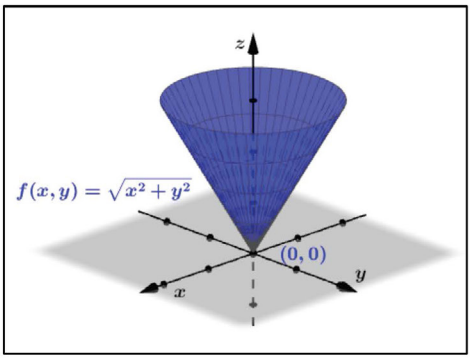


Figura 23.6.9.4

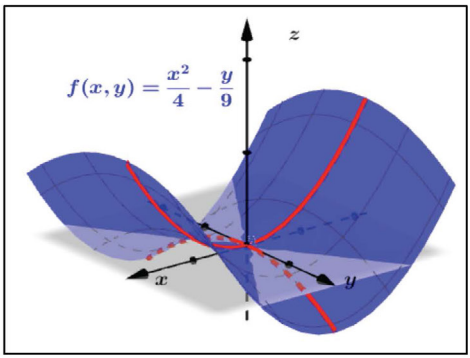


Figura 23.6.9.5

Definição 23.6.9.3: Um ponto (x_0,y_0) é denominado **ponto de sela** se houver dois planos verticais distintos que passam nesse ponto (x_0,y_0), em que (x_0,y_0) é um máximo relativo para um plano e mínimo relativo para o outro plano.

Consoante ao procedimento utilizado nas funções de uma variável, também utilizamos o teste da segunda derivada para saber se um ponto crítico é de fato um extremo relativo (máximo ou mínimo).

Teorema 23.6.9.4 (teste da segunda derivada): Seja uma função $f(x,y)$ com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico (x_0,y_0) e seja:

$$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0) \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

i. Se $D>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, então $f(x,y)$ terá mínimo relativo em (x_0,y_0).
ii. Se $D>0$ e $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, então $f(x,y)$ terá máximo relativo em (x_0,y_0).
iii. Se $D<0$, então $f(x,y)$ terá um ponto de sela em (x_0,y_0).
iv. Se $D=0$, então nenhuma conclusão pode ser tirada.

Embora a demonstração desse teorema seja bastante complexa, vale uma justificativa a partir da análise da concavidade. Vejamos:

- Se $f_{xx}(x_0,y_0)$ e $f_{yy}(x_0,y_0)$ tiverem sinais diferentes, ou seja, se a concavidade da função for diferente (uma para cima e outra para baixo) na direção de x e na

direção y, então $f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) < 0$. Isso acarreta em $D < 0$, uma vez que $f^2{}_{xy}(x_0,y_0) > 0$. Logo, $f(x,y)$ será um ponto de sela em (x_0,y_0).

- Se $f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) > 0$, significa que a concavidade na direção de x e y são ambas para cima ou ambas para baixo. Essa é uma das hipóteses que acarreta em $D > 0$ (na verdade é a única segundo a demonstração desse teorema).
- Diante da justificativa anterior, analisar o sinal de $f_{xx}(x_0,y_0)$ quando $D > 0$, para verificar se o ponto é máximo ou mínimo, e analisar o sinal de $f_{yy}(x_0,y_0)$ dá no mesmo.

1º exemplo: Vamos calcular os extremos relativos de $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$.

Solução:

$$f_x(x,y) = 2x - 6 \Rightarrow \boxed{f_{xx}(x,y) = 2} \Rightarrow \boxed{f_{xy}(x,y) = 0}.$$

$$f_y(x,y) = 2y + 4 \Rightarrow \boxed{f_{yy}(x,y) = 2}.$$

$$\begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ 2y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 3} \; e \; \boxed{y = -2}.$$

$$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0)$$

$$D = f_{xx}(3,-2).f_{yy}(3,-2) - f^2{}_{xy}(3,-2)$$

$$D = 2.2 - 0^2 = 4 > 0$$

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$$

$$z = 3^2 + (-2)^2 - 6.3 + 4(-2) + 13$$

$$z = 9 + 4 - 18 - 8 + 13 \Rightarrow \boxed{z = 0}.$$

Logo, o ponto no espaço é $(3,-2,0)$.

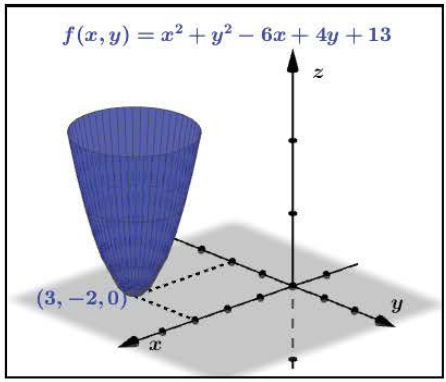


Figura 23.6.9.6

Como $D > 0$ e $f_{xx}(3,-2) = 2 > 0$, temos que $(3,-2,0)$ é um mínimo relativo (nesse caso, absoluto). O Gráfico 23.6.9.6 mostra esse ponto.

Outra solução: pode-se resolver esse problema sem utilizar derivada, para isso basta completar os quadrados de z e analisar o resultado.

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13$$

$$z = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 + 13 - 9 - 4$$

$$\boxed{z = (x-3)^2 + (y+2)^2}$$

Os termos $(x-3)^2$ e $(y+2)^2$ são sempre positivos e o valor mínimo de cada um ocorre quando ambos são zeros, ou seja, quando $x = 3$ e $y = -2$. Portanto, o ponto no $(3,-2,0)$ é de fato, o ponto de mínimo.

2º exemplo: Vamos calcular os extremos relativos de $z = 3x^2y + y^3 - 3y$.

Solução:

$$f_x(x,y) = 6xy \Rightarrow \boxed{f_{xx}(x,y) = 6y} \Rightarrow \boxed{f_{xy}(x,y) = 6x}.$$

$$f_y(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 3 \Rightarrow \boxed{f_{yy}(x,y) = 6y}.$$

$$\begin{cases} 6xy = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 6xy = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

De (1), conclui-se $\boxed{x = 0}$ ou $\boxed{y = 0}$.

Substituindo $x = 0$ em (2), temos: $x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1} \\ \boxed{y = -1} \end{cases}$.

Substituindo $y = 0$ em (2), temos

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1} \\ \boxed{x = -1} \end{cases}.$$

Dessa forma, os pontos críticos são: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$.

- Vamos verificar $(0,1)$:

$f_{xx}(x,y) = 6y = f_{xx}(0,1) = 6$

$f_{yy}(x,y) = 6y = f_{yy}(0,1) = 6$

$f_{xy}(x,y) = 6x = f_{xy}(0,1) = 0$

$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0)$

$D = f_{xx}(0,1).f_{yy}(0,1) - f^2{}_{xy}(0,1)$

$D = 6.6 - 0^2 = 36 > 0$

$z = 3x^2y + y^3 - 3y = 3 = 3.0^2.1 + 1^3 - 3.1 = -2$, o ponto no espaço é $(0,1,-2)$.

Como $D > 0$ e $f_{xx}(0,1) = 6 > 0$, temos que $(0,1,-2)$ é um mínimo relativo.

- Vamos verificar $(0,-1)$:

$f_{xx}(x,y) = 6y = f_{xx}(0,-1) = -6$

$f_{yy}(x,y) = 6y = f_{yy}(0,-1) = -6$

$f_{xy}(x,y) = 6x = f_{xy}(0,-1) = 0$

$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0)$

$D = f_{xx}(0,-1).f_{yy}(0,-1) - f^2{}_{xy}(0,-1)$

$D = -6.(-6) - 0^2 = 36 > 0$

$z = 3x^2y + y^3 - 3y = 3 = 3.0^2.(-1) + (-1)^3 - 3.(-1) = 2$, o ponto no espaço é $(0,-1,2)$.

Como $D > 0$ e $f_{xx}(0,-1) = -6 < 0$, temos que $(0,-1,2)$ é um máximo relativo.

- Vamos verificar $(1,0)$:

$f_{xx}(x,y) = 6y = f_{xx}(1,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 6y = f_{yy}(1,0) = 0$

$f_{xy}(x,y) = 6x = f_{xy}(1,0) = 6$

$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0)$

$D = f_{xx}(1,0).f_{yy}(1,0) - f^2{}_{xy}(1,0)$

$D = 0.0 - 6^2 = -36 < 0$

$z = 3x^2y + y^3 - 3y = 3 = 3.1^2.0 + 0^3 - 3.0 = 0$, o ponto no espaço é $(1,0,0)$.

Como $D < 0$, temos que $(1,0,0)$ é um ponto de sela.

- Vamos verificar $(-1,0)$:

$f_{xx}(x,y) = 6y = f_{xx}(1,0) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 6y = f_{yy}(1,0) = 0$

$f_{xy}(x,y) = 6x = f_{xy}(1,0) = -6$

$D = f_{xx}(x_0,y_0).f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0)$

$D = f_{xx}(-1,0).f_{yy}(-1,0) - f^2{}_{xy}(-1,0)$

$D = 0.0 - (-6)^2 = -36 < 0$

$z = 3x^2y + y^3 - 3y = 3 = 3.(-1)^2.0 + 0^3 - 3.0 = 0$, o ponto no espaço é $(-1,0,0)$.

Como $D < 0$, temos que $(-1,0,0)$ é um ponto de sela.

Os quatro pontos, estão no gráfico dessa função nas figuras 23.6.9.7 e 23.6.9.8 (rotacionada).

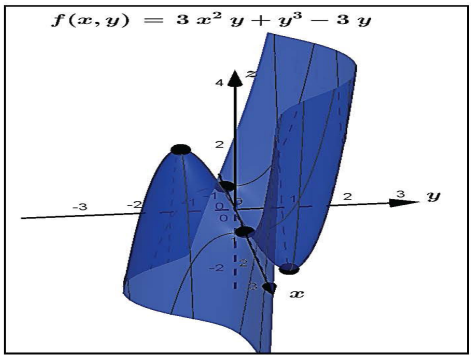


Figura 23.6.9.7

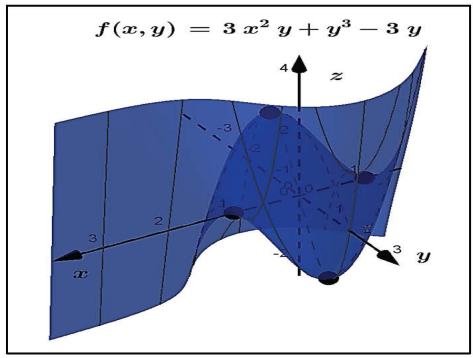


Figura 23.6.9.8 (rotacionada)

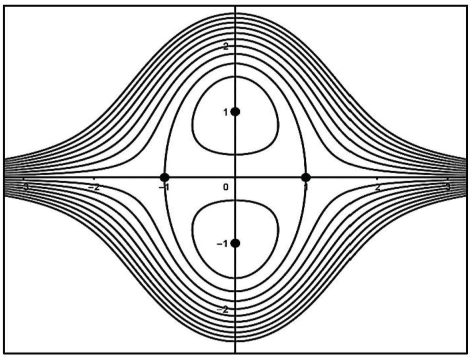


Figura 23.6.9.9

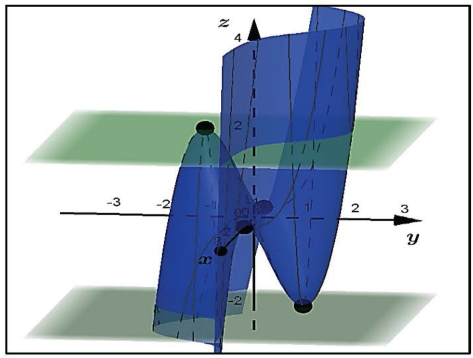


Figura 23.6.9.10

Os extremos relativos, quando as derivadas parciais são nulas, podem ser visualizados como pontos nas curvas de nível da função. Pois, como o plano tangente à um extremo relativo é um plano horizontal, temos

$$z = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{0}(x - x_0) + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{0}(y - y_0) \Rightarrow \boxed{z = f(x_0, y_0)}.$$

Veja que os dois pontos nas curvas de nível da função $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3y$ (figura 23.6.9.9), referem-se aos extremos relativos da função: mínimo $(0, 1, -2)$ e máximo $(0, -1, 2)$, onde passam as retas tangentes da figura 23.6.9.10.

3º exemplo: Determine a menor distância entre o ponto (1, 2, 3) e o plano $x - 2y + z = 1$.

Solução:

Escrevendo um ponto do plano como (x, y, z), a distância H para o ponto (1, 2, 3) é dado por:

$$D_{P,Q} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2 + (Z_q - Z_p)^2}$$

Ver seção 22.2 - distância entre dois pontos no espaço.

$$\boxed{H^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} \quad (1)$$

Como (x, y, z) pertence ao plano $x - 2y + z = 1$, então $z = 1 - x + 2y$. Substituindo em (1), obtemos

$$H^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (1 - x + 2y - 3)^2$$
$$H^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (-x + 2y - 2)^2.$$

A minimização de H^2 implica em minimização de H. Fazendo $H^2 = f(x,y)$, obtemos as seguintes derivadas parciais:

$$f_x(x,y) = 2(x-1) - 2(-x + 2y - 2) \Rightarrow \boxed{f_x(x,y) = 4x - 4y + 2}.$$

$$f_y(x,y) = 2(y-2) + 4(-x + 2y - 2) \Rightarrow \boxed{f_y(x,y) = -4x + 10y - 12}.$$

$$\begin{cases} 4x - 4y + 2 = 0 \\ -4x + 10y - 12 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ -2x + 5y - 6 = 0 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos

$$3y = 5 \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{3}} \text{ e } 2x - 2.\frac{5}{3} + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{7}{6}}.$$

O valor da cota (z) do ponto é: $x - 2y + z = 1 \Rightarrow z = 1 - \frac{7}{6} + 2.\frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{z = \frac{19}{6}}$.

Desse modo, o ponto crítico é $(\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{19}{6})$.

Uma vez que $f_{xx}(x,y) = 4$, $f_{yy}(x,y) = 10$ e $f_{yx}(x,y) = -4$, o determinante D do teste da segunda derivada resulta em: $D = 4.10 - (-4)^2 = 24 > 0$. E como $f_{xx}(x,y) = 4 > 0$, temos de fato um ponto de mínimo. Para encontrar essa distância mínima, basta substituir as coordenadas do ponto crítico na expressão (1):

$$H^2 = \left(\frac{7}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} - 2\right)^2 + \left(\frac{19}{6} - 3\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} \Rightarrow \boxed{H = \frac{\sqrt{6}}{6}}.$$

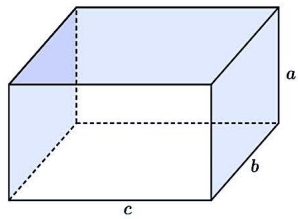
Use a fórmula da distância entre ponto e plano (seção 22.12) e confirme esse resultado.

4º exemplo: Uma empresa precisa confeccionar embalagens de papelão (sem tampa) em forma de paralelepípedo. Para cada embalagem deve-se usar exatamente 48 cm² de papelão. Que dimensões (a, b e c) deve ter essa embalagem para que o volume seja máximo?

Solução:

O material a ser utilizado é dado por:

$2a.c + b.c + 2a.b = 48.$



Isolando a, temos:

$$a.(2b + 2c) + b.c = 48 \Rightarrow \boxed{a = \frac{48 - bc}{2b + 2c}}(1).$$

Substituindo no volume: $V = a.b.c$, temos

$$V = a.b.c = b.c.\left(\frac{48 - bc}{2b + 2c}\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{48bc - b^2c^2}{2(b + c)}}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{(48c - 2bc^2).(b + c) - 1.(48bc - b^2c^2)}{2.(b + c)^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{48cb - 2b^2c^2 + 48c^2 - 2bc^3 - 48bc + b^2c^2}{2.(b + c)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = \frac{48c^2 - 2bc^3 - b^2c^2}{2.(b + c)^2} = \boxed{\frac{c^2(48 - 2bc - b^2)}{2.(b + c)^2}}.$$

Similarmente, encontra-se $\frac{\partial V}{\partial c}$:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{b^2(48 - 2bc - c^2)}{2.(b + c)^2}}.$$

Para $\frac{\partial V}{\partial b} = 0 \Rightarrow c^2 = 0 \; ou \; 48 - 2bc - b^2 = 0.$

Se $c = 0$ *implica em* $V = 0$. Esse valor refere-se ao mínimo, portanto, não nos interessa.

Para $\frac{\partial V}{\partial c} = 0 \Rightarrow b^2 = 0 \; ou \; 48 - 2bc - c^2 = 0.$

Se $b = 0$ *implica em* $V = 0$ não nos interessa.

De $48 - 2bc - b^2 = 0$ e $48 - 2bc - c^2 = 0$ implica em $\boxed{b = c}$, pois ambos precisam ser positivos. Substituindo em $48 - 2bc - b^2 = 0$, temos

$48 - 2b^2 - b^2 = 0 \Rightarrow 48 - 3b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{48}{3} \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b = 4cm}$ e $\boxed{c = 4cm}$.

Substituindo em (1):

$$a = \frac{48 - bc}{2b + 2c} = \frac{48 - 4.4}{2.4 + 2.4} = \frac{32}{16} \Rightarrow \boxed{a = 2\ cm}.$$

O volume máximo dessa caixa é $V = a.b.c = 2.4.4 \Rightarrow \boxed{V = 32cm^3}$.

Pelo contexto do problema está claro que esse valor refere-se ao máximo de volume, não sendo preciso o teste da segunda derivada.

Observação: O intervalo do exemplo anterior não é fechado, pois as medidas não podem ser zero. Já para intervalos fechados além dos pontos críticos, é preciso verificar se os valores da fronteira do intervalo são candidatos a extremos.

Outro exemplo de aplicação de máximo ou mínimo de uma função de duas variáveis, está na demonstração das fórmulas de regressão linear utilizando o método dos mínimos quadrados (que vimos na unidade de função afim).

A somatória dos quadrados dos desvios é:

$(y_1 - y)^2 + (y_2 - y)^2 + (y_3 - y)^2 + \cdots (y_n - y)^2$.

Pelo qual podemos escrever como: $S = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - y)^2$.

Considerando $y = ax + b$ e $S = f(a,b)$, tem-se: $\boxed{f(a,b) = \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - ax_i - b)^2}$.

Calculando as derivadas parciais e igualando a zero (queremos o mínimo):

$$f_a(a,b) = \sum_{i=1}^{i=n} 2.(y_i - ax_i - b)\, x_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} x_i(y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} x_i(y_i - ax_i - b) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{i=n} ax_i{}^2 - \sum_{i=1}^{i=n} bx_i = 0$$

$$\boxed{a\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{i=n} x_i = \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i}\,(1).$$

$$f_b(a,b) = \sum_{i=1}^{i=n} 2.(y_i - ax_i - b)\,(-1) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} (y_i - ax_i - b) = 0$$

$$\boxed{a\sum_{i=1}^{i=n} x_i + b\sum_{i=1}^{i=n} = \sum_{i=1}^{i=n} y_i}\,(2).$$

Resolvendo o sistema (1) e (2), obtemos:

$$\boxed{a = \frac{n\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{i=1}^{i=n} y_i}{n\sum_{i=1}^{i=n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{i=n} x_i)^2}}$$

e

$$\boxed{b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} y_i - a\sum_{i=1}^{i=n} x_i}{n}}.$$

Pode-se demonstrar que $D > 0$ *e* $f_{aa}(a_0, b_0) > 0$, ou seja, a fórmula acima é um mínimo relativo.

De forma análoga, demonstra-se também a fórmula para a regressão quadrática.

Essas fórmulas foram utilizadas na unidade de função afim do volume 1.

EXERCÍCIOS 23.6

1) Calcule os extremos relativos e os pontos de sela das seguintes funções.

a) $z = x^2 + y^2$

b) $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$

c) $z = -x^2 - y^2 + 4x + 8y - 1$

d) $z = 2x^2 - 3xy + y^2 - x$

e) $z = -x^2 - 2x - 2y^2 + 4y + 1$

f) $z = x^4 + y^4 - 4xy - 4$

g) $z = ye^x$

h) $z = xseny$

i) $z = ye^{-x^2-y^2}$

j) $z = x^2y - y^2 - 8x$

k) $z = x^2 + y^2 + \frac{32}{xy}$

l) $z = x^3 + 3y^2x - 3x$

m) $z = ln(xy) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$

2) Quantos pontos críticos tem a função $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 1$?

3) Determine os pontos extremos e os de sela da superfície $f(x,y) = x^3 + y^3 - \frac{5}{2}x^2 - y^2 + 2x - y + 2$.

4) Determine a menor distância entre o ponto (1, 1, 1) e o plano $x - 4y + 8z = 1$.

5) Determine o ponto do plano $2x - 2y + z - 2 = 0$ que está mais próximo do ponto (1, 3, 3).

6) Quais os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto (-1, -1, 0)?

7) Qual o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está mais próximo do ponto (1, 2, 2)?

8) Quais os pontos da superfície $z^2 = 1 + xy$ que estão mais próximos da origem?

9) Encontre três números naturais cuja soma é 60 e cujo produto é máximo.

10) Pretende-se construir um paralelepípedo a partir de 24m² de papelão. Que dimensões deve ter esse paralelepípedo de forma que seu volume seja máximo?

23.6.10. Multiplicadores de Lagrange

Nesta subseção, abordaremos outro método utilizado para encontrar máximos e mínimos de uma função genérica $f(x,y)$, porém sujeita a uma restrição (ou vinculada a uma função) da forma $g(x,y)=k$. Esse método é conhecido como **método de multiplicadores de Lagrange**.

Para demonstrar o método, partiremos de uma terceira função com três variáveis composta pela duas funções $f(x,y)$ e $g(x,y)-k=0$, cujas variáveis são x e y, e mais uma terceira variável que denominaremos de λ. A função em questão, e que está a seguir, foi genialmente elaborada por Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e é denominada de **função lagrangeana**. Eis a função:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda.[g(x,y)-k].$$

Se existir um extremo em $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ e suas as derivadas parciais existirem, então esse extremo ocorre nos pontos onde as derivadas parciais são nulas (conforme o teorema 23.6.10.1). Dessa forma, temos

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)-\lambda.g_x(x,y)=0 \Rightarrow f_x(x,y)=\lambda.g_x(x,y) & (1)\\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)-\lambda.g_y(x,y)=0 \Rightarrow f_y(x,y)=\lambda.g_y(x,y) & (2).\\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda)=[g(x,y)-k]=0 \Rightarrow g(x,y)=k & (3) \end{cases}$$

O interessante é que, uma vez que $g(x,y)=k$ em (3), o extremo de $\mathcal{L}(x,y,\lambda)$ é o extremo de $f(x,y)$. Veja:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda.\underbrace{[g(x,y)-k]}_{0}=f(x,y).$$

E além disso, conforme (1) e (2), as derivadas parciais são proporcionais a λ, isto é, os vetores gradientes das funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são proporcionais a λ:

$$\nabla f(x,y)=\boldsymbol{\lambda}.\nabla g(x,y).$$

$\boldsymbol{\lambda}$ é denominado de **multiplicador de Lagrange**.

Isso posto, como o vetor gradiente é perpendicular à reta tangente na curva de nível, então a reta tangente à curva $f(x,y)=m$ é a mesma reta tangente à curva $g(x,y)=k$, no ponto (x_0,y_0). Ver figura 23.6.11.1.

De uma forma direta, como as derivadas parciais da função lagrangeana resultam sempre no sistema:

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g(x,y)=k \end{cases},$$

alternativamente, basta resolvê-lo e, em seguida, calcular todos os valores de f utilizando as soluções desse sistema. O maior deles será o valor de máximo e o menor deles, será o valor de mínimo.

Esse método se aplica também à função de três ou mais variáveis. Para o caso de três variáveis, temos:

$$\nabla f(x,y,z)=\boldsymbol{\lambda}.\nabla g(x,y,z).$$

E um sistema de quatro equações e quatro incógnitas:

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g(x,y,z) = k \end{cases}.$$

Em todos os casos, faz-se necessário que $\nabla g \neq 0$.

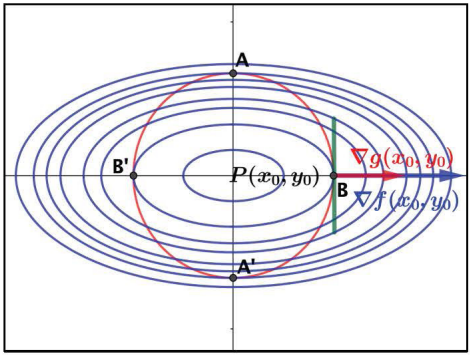


Figura 23.6.11.1

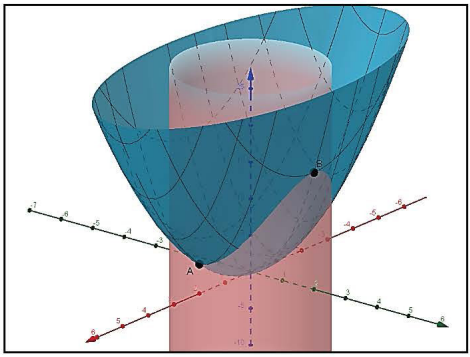


Figura 23.6.11.2

Exemplo: Vamos determinar os valores extremos de um paraboloide elíptico de função $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ nos pontos em que $x^2 + y^2 = 4$.

Solução:

O sistema:

$$\begin{cases} 2x = \lambda.2x \\ 8y = \lambda.2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}.$$

A primeira equação fornece duas possibilidades de solução: $\lambda = 1$ *ou* $x = 0$. Se $\lambda = 1$, a segunda equação fornece uma única condição, $y = 0$, e a terceira equação nos dá $x = \pm 2$.

A segunda equação fornece também duas possibilidades de solução: $\lambda = 4$ *ou* $y = 0$. Se $\lambda = 4$, a primeira equação fornece uma única condição, $x = 0$, e a terceira equação nos dá $y = \pm 2$.

Dessa maneira, os pontos candidatos a máximos e mínimos são: (0,2),(0,-2),(2,0) e (-2,0).

Esses pontos são os pontos A, B, A' e B' da figura 23.6.11.1, onde demonstra também a proporcionalidade entre os vetores gradientes e a perpendicularidade desses vetores com a reta tangente às duas funções no ponto B.

Substituindo as informações desse pontos na função $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, obtemos:

$$f(0,2) = 0^2 + 4.2^2 \Rightarrow f(0,2) = 16.$$

$$f(0,-2) = 0^2 + 4.(-2)^2 \Rightarrow f(0,-2) = 16.$$

$$f(2,0) = 2^2 + 4.0^2 \Rightarrow f(2,0) = 4.$$
$$f(-2,0) = (-2)^2 + 4.0^2 \Rightarrow f(-2,0) = 4.$$

Concluímos assim que (0,2) e (0,-2) são pontos de máximo e (2,0) e (-2,0) são pontos de mínimo.

Veja na figura 23.6.11.2, os pontos (0,2) e (2,0) representados pelos pontos A e B, respectivamente.

2º exemplo: (já resolvido anteriormente) Uma empresa precisa confeccionar embalagens de papelão (sem tampa) em forma de paralelepípedo. Para cada embalagem deve-se usar exatamente 48 cm² de papelão. Que dimensões (a, b e c) deve ter essa embalagem para que o volume seja máximo?

Solução:

O material a ser utilizado é dado por: $g(a,b,c) \Rightarrow 2a.c + b.c + 2a.b = 48$.

Volume $\Rightarrow \boxed{f(a,b,c) = a.b.c}$.

$$\begin{cases} f_a = \lambda g_a \\ f_b = \lambda g_b \\ f_c = \lambda g_c \\ g(a,b,c) = k \end{cases} \sim \begin{cases} bc = \lambda(2c + 2b) \\ ac = \lambda(c + 2a) \\ ab = \lambda(2a + b) \\ 2a.c + b.c + 2a.b = 48 \end{cases}.$$

Observe que λ não pode ser zero, pois implicaria em $bc = 0$, $ac = 0$ e $ab = 0$, contrariando a última equação. Logo: $\lambda \neq 0$.

Vamos multiplicar todas as equações pelas variáveis que estão ausentes de cada equação:

$$\begin{cases} abc = \lambda(2c + 2b).a \\ bac = \lambda(c + 2a).b \\ cab = \lambda(2a + b).c \\ 2a.c + b.c + 2a.b = 48 \end{cases}.$$

Igualando a 1ª e 2ª equação, temos: $\lambda(2c + 2b).a = \lambda(c + 2a).b$.

Como $\lambda \neq 0$, temos: $2ac + 2ab = cb + 2ab \Rightarrow \boxed{a = \frac{b}{2}}$.

Igualando a 1ª e 3ª equação, temos: $\lambda(2c + 2b).a = \lambda(2a + b).c$.

Como $\lambda \neq 0$, temos: $2ac + 2ab = 2ac + bc \Rightarrow \boxed{a = \frac{c}{2}} \Rightarrow \boxed{b = c}$.

Substituindo na 4ª equação:

$$2a.c + b.c + 2a.b = 48 \Rightarrow 2.\frac{b}{2}.b + b.b + 2.\frac{b}{2}.b = 48 \Rightarrow$$
$$b + b^2 + b^2 = 48 \Rightarrow b = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \boxed{b = \pm 4}.$$

Como trata-se de dimensões, descartamos o valor negativo, assim: $b = 4cm, c = 4cm$ e $a = 2cm$. O mesmo resultado encontrado no 3º exemplo da subseção anterior.

EXERCÍCIOS 23.7

1)Use o método de multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximos e mínimos das funções a seguir, sujeitas as restrições indicadas.

a)$f(x,y) = x^2 + y^2;\ xy = 2$

b)$f(x,y) = x + y;\ x^2 + y^2 = 2$

c)$f(x,y) = e^{xy};\ x + y = 1$

d)$f(x,y,z) = x + y + 2z;\ x^2 + y^2 + z^2 = 6$

e)$f(x,y,z) = x.y.z;\ x^2 + y^2 + z^2 = 3$

f)$f(x,y,z) = e^{xyz};\ x^2 + y^2 + z^2 = 27$

2)O plano $x + y = 4$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ formando uma parábola. Use os multiplicadores de Lagrange para calcular os extremos dessa parábola no espaço.

3)Use os multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ que estão mais próximos e mais distantes do ponto (1, 0, 2).

4) Mostre, a partir dos multiplicadores de Lagrange, que a média geométrica de números naturais é no máximo igual a média aritmética desse números. Dica: use a equação da média aritmética na forma: $x_1 + x_2 + x_3 \ldots + x_n = nk$.

5)Use os multiplicadores de Lagrange para mostrar que a área máxima de um triângulo de perímetro constante k é equilátero. Dica: use a fórmula de Héron.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 23.8

1)Para a confecção de um adubo um fabricante precisa de 20% de nitrogênio e 30% de fósforo. Sabendo que o custo do quilo do nitrogênio é de R$ 3,00 e do fósforo é de R$ 4,00 e os demais nutrientes necessários para o adubo não tem custo relevante pois é de própria fabricação. Qual a função do custo C por quilo de adubo que se relaciona com o peso N do nitrogênio e o peso P do fósforo?

2)Em uma fazenda a quantidade de tarefas trabalhadas é dada por $T(H,h) = 5H.h^{1/3}$, onde H são as horas trabalhadas pelo agricultores e h as horas trabalhadas pelos ajudantes. Atualmente os agricultores trabalham 6 horas e os ajudantes 8 horas. Em quanto se deve aumentar as horas de trabalho dos ajudantes se as horas de trabalho dos agricultores for reduzida em 1 hora, mantendo a produção.

3)A seguir está o resultado de uma regressão aplicado ao crescimento vegetal da mangabeira entre plantas não irrigadas. Sendo y a área foliar, x_1 o produto do comprimento pela largura do limbo (em mm^2) e x_2 (em m^2kg^{-1}) a área foliar

específica, concluiu-se que $y = -426{,}91 + 0{,}82x_1 + 38{,}47x_2$.

Fonte adaptada: (LOBO, ORTIZ, *et al.*, 2010)

a) Qual o valor de y (em mm^2) para $x_1 = 3000mm^2$ e $x_2 = 8mm^2kg^{-1}$?

b) Indique o vetor em que a taxa de variação da área foliar é máxima.

4) Um estudo sobre a produção de etanol no Brasil, dentro de uma análise de correlação e regressão múltipla, encontrou uma relação entre a produção total de etanol em milhões de litros (z), a quantidade exportada de milhões de litros (x) e a venda de carros movidos a etanol (y), que segue a função $z = 11907946 + 1{,}74x + 1{,}38y$.

Fonte adaptada: (FILHO, NORILLER, *et al.*, 2013)

a) Que tipo de superfície no espaço tridimensional representa essa função?

b) Em 2009 a produção total de etanol no Brasil foi de aproximadamente 27 milhões litros e a quantidade exportada foi de aproximadamente 5 milhões de litros, qual a quantidade de carros vendidos nesse mesmo período?

c) O que significa o vetor (1,74; 1,38) em termos de taxa de variação?

5) Uma empresa entrega seus produtos agrícolas dentro de caixas de papelão (com tampa) em formato de paralelepípedo. Esses produtos podem ser acondicionados em qualquer posição e forma, desde que somados não ultrapassem o volume de 1 m³. Respeitando esse limite, quais as medidas que deve ter a caixa para que o material gasto para confeccionar essa caixa seja mínimo?

6) A seguir estão os resultados da produção alface fertirrigada com nitrogênio e potássio em ambiente protegido. Na análise da regressão obteve-se a função $MFT(N,K) = 175 + 0{,}59N + 5{,}6K - 3{,}3NK$. Sendo $MFT(N,K)$ a matéria frescal total, N as doses de nitrogênio e K as doses de potássio.

Fonte adaptada: (REZENDE, SOUZA, *et al.*, 2004)

Diante das informações, podemos afirmar:

a) Que o gráfico no espaço tridimensional da função é uma superfície cilíndrica?

b) Que existe um ponto de máximo para MFT? Se sim, para quais valores de N e K isso acontece? Se não, justifique.

7) O modelo matemático que melhor se ajustou aos dados da produtividade do melão Y ($em\ kg\ ha^{-1}$) em função das doses de nitrogênio N ($em\ kg\ ha^{-1}$) e das lâminas de água L ($em\ mm$), nas condições dadas, foi $Y = 52{,}40L + 111{,}15N - 0{,}039L^2 - 0{,}28N^2$.

Fonte adaptada: (JUNIOR, MOUSINHO, *et al.*, 2016)

Calcule:

a) O valor da produtividade Y para $N = 100\ kg\ ha^{-1}$ e $L = 160\ mm$?

b) Os valores de N e L para uma produtividade máxima?

c) Qual a produtividade máxima?

d) Faça o gráfico dessa função no Geogebra.

8) Na análise de regressão entre a produtividade de grãos Y (em g) em função das doses de nitrogênio N $(em\ g\ ha^{-1})$ e de fósforo P $(em\ g\ ha^{-1})$ na folha do feijão caupi, foi encontrado o seguinte modelo quadrático $Y = 24{,}66 + 0{,}0726N - 0{,}0005N^2 + 0{,}0671P - 0{,}0005P^2$. Calcule:

a) Os valores de N e P para uma produtividade máxima?

b) Qual a produtividade máxima?

c) Faça o gráfico dessa função no Geogebra.

Fonte adaptada: (JUNIOR, 2012)

9) Considere que a produção de um cultivo é dado por $P(x, y) = 20 + x^2 + y^2 + 5xy$ que está sujeita à restrição de custo $3x + 2y = 34$.

a) Calcule os valores de x e y para que produção seja máxima?

b) Faça o gráfico dessa função e da restrição no Geogebra.

CAPÍTULO

24

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

INTEGRAIS MÚLTIPLAS

24. INTEGRAIS MÚLTIPLAS

A concepção de que podemos derivar uma variável e considerar outras constantes, como acontece nas derivadas parciais, pode ser aplicada ao cálculo de integrais. Porém, em vez de derivar, iremos integrar em relação à uma variável considerando as demais constantes. Essa ideia aliada à definição de integral vista na unidade 21, é uma excelente ferramenta para cálculo de volumes de sólidos, áreas de figuras planas e superfícies, entre outros problemas matemáticos. É o que veremos nesta unidade.

24.1. Integrais duplas

24.1.1. Integrais duplas sobre retângulos

O mesmo conceito de soma de Riemann utilizado em integrais simples para o cálculo de área, será estendido a aplicação de volumes em integrais duplas.

Considere uma função f de duas variáveis definida em um retângulo $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, conforme figura 24.1.1.1. E seja um sólido S que está acima de R e baixo de $z = f(x,y)$.

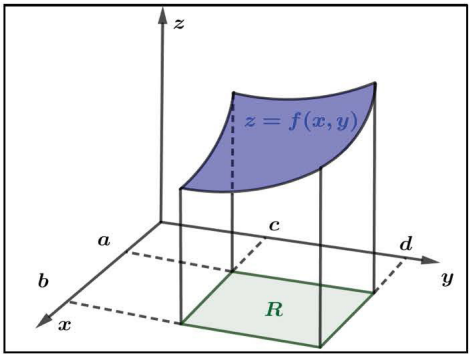


Figura 24.1.1.1

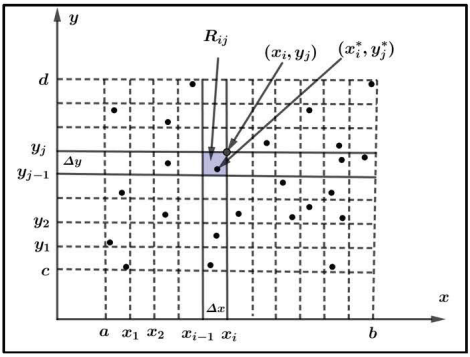


Figura 24.1.1.2

Vamos dividir o retângulo R no lado referente ao intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de mesmo comprimento $\Delta x = (b-a)/m$ e no lado referente

ao intervalo $[c,d]$ em n subintervalos $[y_{j-1}, y_j]$ também de mesmo comprimento $\Delta y = (d-c)/n$. Cada subretângulo R_{ij} terá área igual a $\Delta x.\Delta y$ (ver figura 24.1.1.2).

Para um ponto arbitrário (x^*_{ij}, y^*_{ij}), temos um "subsólido" arbitrário de altura $f(x^*_{ij}, y^*_{ij})$ e de base igual aos "subretângulos" de área $\Delta x.\Delta y$. Assim, o volume (altura x base) desse subsólido arbitrário será dado por $f(x^*_{ij}, y^*_{ij}).\Delta x.\Delta y$ (ver figura 24.1.1.3) e o volume V do sólido S entre R e f, será aproximadamente, a somatória dos volumes de todos esses subsólidos (figura 24.1.1.4). Isto é,

$$V \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}).\Delta x.\Delta y.$$

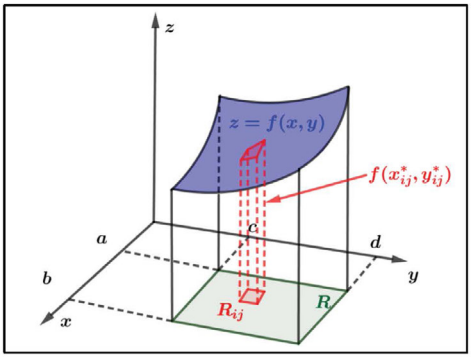


Figura 24.1.1.3

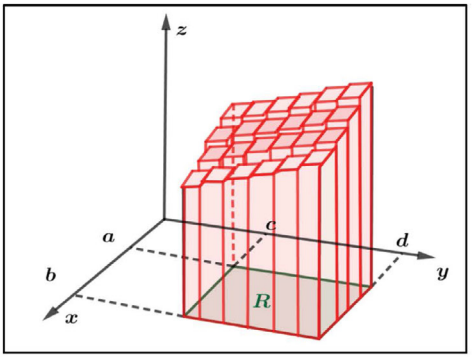


Figura 24.1.1.4

Ao subdividir a região R em quantidade m e n de intervalos cada vez maiores, a somatória dos volumes de todos esses subsólidos gerados, será cada vez mais próxima do volume real V do sólido S. Isso significa que ao aplicar o limite de $m,n \to \infty$, teremos a equivalência:

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}).\Delta x.\Delta y.$$

Essa somatória é denominada de soma **dupla de Riemann**[22], equivalente a integral dupla, conforme a definição a seguir.

Definição 24.1.1.1: A integral dupla de $f(x,y)$ sobre o retângulo R de área A é dada pela expressão a seguir, se o limite existir.

$$V = \iint_R f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dxdy = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x^*_{ij}, y^*_{ij}).\Delta x.\Delta y$$

[22] Bernhard Riemann (1826 - 1866)

24.1.2. Integrais iteradas

Vimos na unidade 21, que o cálculo de integrais simples a partir da definição não é uma tarefa fácil e exige conhecimentos de aplicações de séries. Na integral dupla, o cálculo a partir da definição é ainda mais trabalhoso. Nesse cenário, veremos uma forma mais prática, que utiliza o teorema fundamental do cálculo, mas considerando uma das variáveis como fixa (constante). É exatamente a mesma ideia que utilizamos nas derivadas parciais, só que, em vez de derivar, iremos integrar em relação à uma variável, considerando a outra como constante. Esse processo de calcular integrais duplas utilizando as integrais definidas parciais, em relação a x e em relação a y (ou vice-versa), quando aplicadas sequencialmente, é conhecido como **integrais iteradas**.

Suponha $f(x,y) \geq 0$ uma função contínua de duas variáveis, integrável no retângulo $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Denotamos de

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

a integração de f em relação a x mantendo y fixo (constante), no intervalo $[a,b]$, denominada de integral parcial em relação a x. A área resultado dessa integral denominaremos de função $A(y)$ (ver figura 24.1.2.2):

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Agora, integrando o resultado dessa área novamente em relação a y e mantendo x fixo (constante), no intervalo $[c,d]$ (denomina-se esse procedimento de integração parcial em relação a y), temos o volume V do sólido S que está acima de R e abaixo de f.

$$V = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

De outra forma, poderíamos ter iniciado a integração em relação a y mantendo x constante (conforme figura 24.1.2.1):

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

E o volume seria dado por:

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

Isso equivale a dizer que a integral (ou o volume) acima pode ser também obtido invertendo-se a ordem de integração, conforme o teorema seguinte.

Teorema 24.1.2.1 (Teorema de Fubini[23]): Se f for contínua em um retângulo $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então:

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

O teorema de Fubini pode ser justificado da seguinte forma: Na figura 24.1.2.1, cada valor fixo x, tem-se uma secção transversal de área $A(x)$. A somatória de todas essas áreas ao longo do intervalo de x, equivale ao volume do sólido. Da mesma forma, na figura 24.1.2.2, cada valor fixo y, tem-se uma secção transversal de área $A(y)$. A somatória de todas essas áreas ao longo do intervalo de y, equivale ao volume do mesmo sólido.

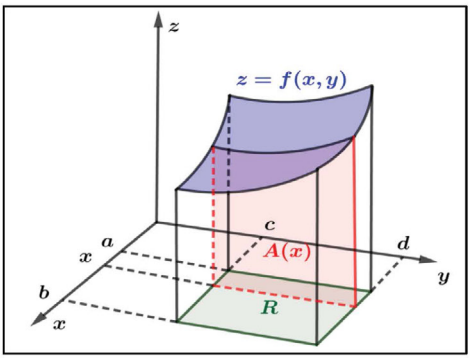


Figura 24.1.2.1

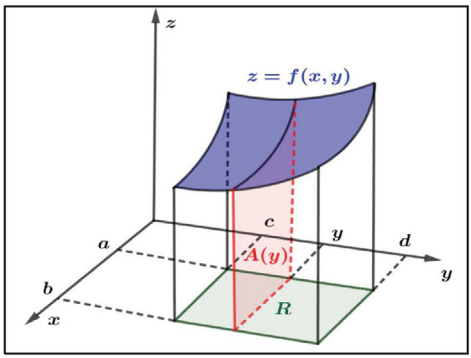


Figura 24.1.2.2

Exemplo: Calcule o volume do sólido limitado lateralmente pelo retângulo $R = [0,1] \times [2,3] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 3\}$ e superiormente pelo plano $f(x,y) = x + y + 5$.

Solução: Como a função $f(x,y) = x + y + 5$ está acima do plano xy ($f(x,y) \geq 0$) no retângulo R (ver figura 24.1.2.3), então podemos calcular o volume usando a integral dupla.

$$V = \int_2^3 \int_0^1 (x + y + 5)\,dx\,dy = \int_2^3 \left(\frac{x^2}{2} + yx + 5x\right)\Big|_0^1 dy \Rightarrow$$

$$V = \int_2^3 \left[\left(\frac{1^2}{2} + y + 5\right) - \left(\frac{0^2}{2} + y.0 + 5.0\right)\right] dy = \int_2^3 \left(\frac{11}{2} + y\right) dy \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{11}{2}y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^3 = \left(\frac{11}{2}.3 + \frac{3^2}{2}\right) - \left(\frac{11}{2}.2 + \frac{2^2}{2}\right) = 21 - 13 \Rightarrow \boxed{V = 8\,u.v}.$$

[23] Guido Fubini (1879-1943)

Como a função é contínua no retângulo, vale o teorema 24.1.2.1 (teorema de Fubini). Vamos mostrar que invertendo a ordem de integração o resultado é o mesmo.

$$V = \int_0^1 \int_2^3 (x + y + 5)\, dy\, dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + 5y \right)\Big|_2^3 dx \Rightarrow$$

Atente-se a inversão!

$$V = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + 5y \right)\Big|_2^3 dx = \int_0^1 \left[\left(x.3 + \frac{3^2}{2} + 5.3 \right) - \left(x.2 + \frac{2^2}{2} + 5.2 \right) \right] dx \Rightarrow$$

$$V = \int_0^1 \left[\left(3x + \frac{9}{2} + 15 \right) - (2x + 2 + 10) \right] dx = \int_0^1 \left[x + \frac{15}{2} \right] dx \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{15}{2}x \right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} + \frac{15}{2}.1 \right) - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{15}{2}.0 \right) = 8 \Rightarrow \boxed{V = 8\, u.v}.$$

2º exemplo: Calcule o volume do sólido limitado lateralmente pelo retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ e superiormente pela superfície $f(x,y) = y.e^{x+y}$.

Solução: Como os valores de x e y são positivos, a superfície representada pela função $f(x,y) = y.e^{x+y}$ está acima do plano xy (isso pode ser confirmado pela figura 24.1.2.4), por conseguinte, a integral dupla no retângulo corresponde ao volume solicitado.

$$V = \int_0^2 \int_0^1 (y.e^{x+y})\, dx\, dy = \int_0^2 (y.e^{x+y})\Big|_0^1 dy = \int_0^2 [(y.e^{1+y}) - (y.e^{0+y})] dy \Rightarrow$$

$$V = \int_0^2 [y.e^1.e^y - y.e^y] dy \Rightarrow \boxed{V = (e-1)\int_0^2 (y.e^y) dy}\ (1).$$

Vamos calcular $\int_0^2 y.e^y dy$ utilizando a integração por partes.

$f'(y) = e^y \Rightarrow \boxed{f(y) = e^y}$ e $g(y) = y \Rightarrow \boxed{g'(y) = 1}$.

$$\int f'(y).g(y) dy = f(y).g(y) - \int f(y).g'(y) dy$$

$$\int (y.e^y) dy = e^y.y - \int e^y.1 dy \Rightarrow \boxed{\int (y.e^y) dy = e^y(y-1)}.$$

Substituindo em (1):

$$V = (e-1)\int_0^2 (y.e^y) dy = (e-1).e^y(y-1)\Big|_0^2 = (e-1).[e^2(2-1) - e^0(0-1)] \Rightarrow$$

$$V = (e-1).[e^2+1)] \Rightarrow \boxed{V = e^3 - e^2 + e - 1}.$$

Assim, o volume solicitado é $V = e^3 - e^2 + e - 1$ unidades de volume.

Como a função é contínua no retângulo, vale o teorema de Fubini. Vamos mostrar que invertendo a ordem de integração o resultado é o mesmo.

$$V = \int_0^1 \int_0^2 (y.e^{x+y})\, dy\, dx$$

Atente-se a inversão!

Calculando $\int_0^2 y.e^{x+y} dy$ utilizando a integração por partes, temos:

$f'(y) = e^{x+y} \Rightarrow f(y) = e^{x+y}$;
$g(y) = y \Rightarrow g'(y) = 1.$

$$\int f'(y).g(y)dy = f(y).g(y) - \int f(y).g'(y)dy$$

$$\int (y.e^y)dy = y.e^{x+y} - \int e^{x+y}.1dy \Rightarrow \boxed{\int (y.e^y)dy = y.e^{x+y} - e^{x+y}}$$

$$V = \int_0^2 [y.e^1.e^y - y.e^y]dy \Rightarrow \boxed{V = (e-1)\int_0^2 (y.e^y)dy}\ (1).$$

Substituindo no cálculo do volume inicial, encontramos

$$V = \int_0^1 \int_0^2 (y.e^{x+y})\, dy\, dx = \int_0^1 y.e^{x+y} - e^{x+y}\Big|_0^2 dx \Rightarrow$$

$$V = \int_0^1 (2.e^{x+2} - e^{x+2}) - (0.e^{x+0} - e^{x+0})\Big|_0^2 dx = \int_0^1 (e^{x+2} + e^x)dx \Rightarrow$$

$$V = (e^{x+2} + e^x)\Big|_0^1 \Rightarrow \boxed{V = e^3 - e^2 + e - 1}.$$

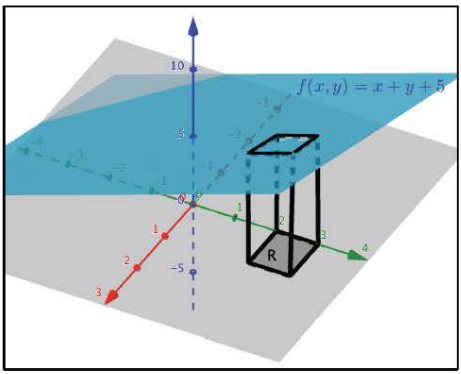


Figura 24.1.2.3

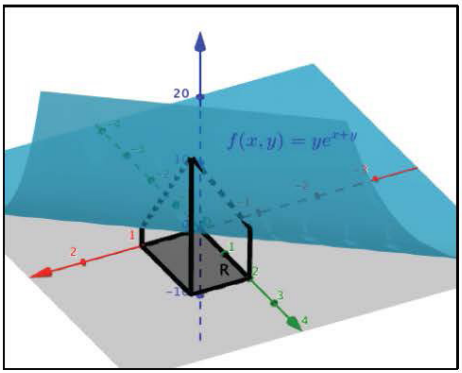


Figura 24.1.2.4

Um caso particular pode ser aplicado se a função $f(x,y)$ puder ser escrita como um produto de duas funções separadas de x e y, ou seja, se $f(x,y) = g(x).h(y)$, temos:

$$\boxed{\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_a^b g(x)dx \,.\int_c^d h(y)dy.}$$

Fórmula simples de demonstrar, basta ver que $h(y)$ é constante na primeira integração.

O exemplo anterior poderia ter sido resolvido utilizando duas integrais simples:

$$V = \int_0^2 \int_0^1 (y.e^{x+y})\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^1 (y.e^y.e^x)\,dx\,dy = \int_0^2 y.e^y dy \,.\int_0^1 e^x dx.$$

Importante ressaltar que o significado da integral dupla como o volume V de um sólido que está acima de R e abaixo de f, aplica-se somente quando $f(x,y) \geq 0$ (sólido acima do plano xy) como nos exemplos anteriores.

Caso o sólido tenha partes em que $f(x,y) \geq 0$ e $f(x,y) < 0$ dentro do retângulo R, o resultado da integral dupla será a contabilização dos volumes (positivos com negativos). Em todo o caso, o teorema de Fubini continua válido para o cálculo das integrais duplas, desde que a função f seja contínua no retângulo R.

3º exemplo: Calcule o valor das integrais iteradas a seguir.

a) $\int_0^1 \int_0^1 (-x - y + 1)dy\,dx$

Solução: Devemos integrar parcialmente em relação a y.

$$\int_0^1 \int_0^1 (-x-y+1)dy\,dx = \int_0^1 \left(-xy - \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(-x.1 - \frac{1^2}{2} + 1\right)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(-x + \frac{1}{2}\right)dx = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

Agora, vamos integrar parcialmente em relação a x e em seguida em relação a y, para mostrar que vale o teorema de Fubini.

$$\int_0^1 \int_0^1 (-x-y+1)dx\,dy = \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} - yx + x\right)\Big|_0^1 dy = \int_0^1 \left(-\frac{1^2}{2} - y.1 + 1\right)dy \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{2} - y + 1\right)dy = \left(-\frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} + y\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

A função $f(x,y) = -x - y + 1$ é um plano que está representado na figura 24.1.2.5. Por essa figura, é imediato que 0 não é o volume do sólido limitado pela região R, o plano xy e a função $f(x,y)$, e sim, uma contabilização de volumes negativos e positivos nessa região (veja na figura a parte de azul: positiva e a parte de vermelha: negativa – abaixo do plano xy). Para essa certeza, use a fórmula do volume de pirâmides e veja que a pirâmide azul e a pirâmide vermelha da figura 24.1.2.5 são congruentes.

b) $\int_{-1}^1 \int_0^2 (y^2 - x)dx\,dy$

Solução: Segundo a ordem apresentada, devemos integrar parcialmente em relação a x.

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(y^2-x)dx\,dy=\int_{-1}^{1}\left(y^2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^2 dy=\int_{-1}^{1}\left(y^2.2-\frac{2^2}{2}\right)dy\Rightarrow$$

$$\int_{-1}^{1}(2y^2-2)dy\left(\frac{2y^3}{3}-2y\right)\Big]_{-1}^{1}=\frac{2.1^3}{3}-2.1-\left(\frac{2.(-1)^3}{3}-2.(-1)\right)\Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}-2+\frac{2}{3}-2=-\frac{8}{3}\Rightarrow\boxed{\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(y^2-x)dx\,dy=-\frac{8}{3}}.$$

O valor negativo da integral dupla é justificado pela fato da superfície $f(x,y)=y^2-x$ ter maior parte compreendida, dentro da região R, abaixo do plano xy. Ver figura 24.1.2.6.

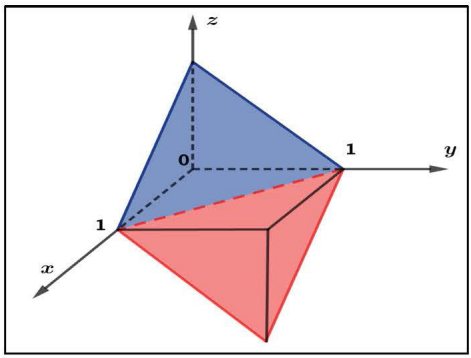


Figura 24.1.2.5

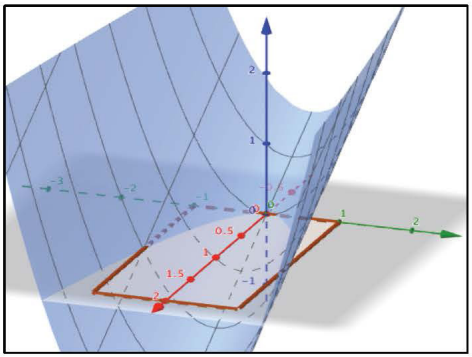


Figura 24.1.2.6

Dica de integração: Uma vez observado que o teorema de Fubini se aplica, verifique qual a ordem de integração fornece integrais mais simples. Nos exercícios a seguir, há integrais duplas que são mais simples e fáceis de calcular integrando primeiro em relação a x e há casos, que é preferível integrar primeiro em relação a y.

EXERCÍCIOS 24.1

1) Calcule as integrais duplas utilizando uma ordem de integração conveniente.

a) $\int_0^1\int_0^1(5x-2y)dy\,dx$

b) $\int_{-1}^1\int_0^3(x^2y)dy\,dx$

c) $\int_0^1\int_0^1(x+ye^x)dx\,dy$

d) $\int_{-2}^2\int_1^2(2x-y^2)dx\,dy$

e) $\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}(cosx.seny)dx\,dy$

f) $\int_0^{\pi/2}\int_0^1(ysenx)dy\,dx$

g) $\int_{-1}^1\int_0^1 e^{x-y}\,dx\,dy$

h) $\int_0^1\int_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy$

i) $\int_0^{\pi}\int_1^2 x.\,sen(xy)\,dx\,dy$

j) $\int_0^1\int_0^{\pi} cosx.\,(y+x)\,dx\,dy$

k) $\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{x+y}\right) dy\,dx$

l) $\int_0^1\int_0^{\pi/2} y^2.\,sen(xy)\,dy\,dx$

2) Calcule as integrais duplas:

a) $\int_0^1\int_0^1 (x+y).\,e^{x+y}\,dx\,dy$

b) $\int_1^2\int_0^1 xye^{x+y}\,dx\,dy$

c) $\int_0^{\pi}\int_1^2 xy.\,cos(xy)\,dy\,dx$

d) $\int_0^1\int_0^1 xy\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$

3) Use a integral dupla para calcular o volume do seguintes sólidos e em seguida visualize-os no software geogebra.

a) O sólido sob o plano $z=-2x+3y+5$ e acima do retângulo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

b)O sólido sob a superfície $f(x,y)=-y^2+2$ e acima do retângulo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$.

c) O sólido sob a superfície $f(x,y)=9-2x^2-2y^2$ e acima do retângulo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$.

d)O sólido sob a superfície $f(x,y)=xseny$ e acima do retângulo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le \frac{\pi}{3}, 0\le y\le \frac{\pi}{4}\}$.

e)O sólido sob a superfície $f(x,y)=\frac{y}{x}$ e acima do retângulo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|1\le x\le e, 0\le y\le 2\}$.

f)O sólido sob a superfície $f(x,y)=9-x^2$ limitado pelo primeiro octante e pelo plano $y=4\}$.

4)Explique por que o valor da integral $\int_{-1}^1\int_{-1}^1 (x^2+y)dy\,dx$ não representa o volume do sólido limitado superiormente pela superfície $f(x,y)=x^2+y$ e lateralmente pelo retângulo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\}$.

5) Calcule: $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dx\,dy$ e $\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,dy\,dx$ e explique por que o teorema de Fubini não se aplica. Dica: use a substituição $u=x+y$.

24.1.3. Integrais duplas em regiões gerais

O cálculo de integrais duplas em regiões gerais pode ser complicado e exigir conhecimentos de níveis avançados de cálculo integral. Por isso, neste estudo, limitaremos nosso escopo ao cálculo de integrais duplas em apenas duas regiões não retangulares, que denominaremos de região tipo I e tipo II.

Definição 24.1.3.1: Seja uma função f contínua em uma região R não retangular, denominamos de:

◆ **Região tipo I:** Uma região limitada à esquerda e à direita por retas verticais $x = a$ e $x = b$, e limitada superiormente e inferiormente por curvas contínuas $y = g_2(x)$ e $y = g_1(x)$, dentro do intervalo $[a, b]$, consoante a figura 24.1.3.1. Neste caso, a integral dupla será dada por:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

As funções do intervalo de y devem estar em função de x.

◆ **Região tipo II:** Uma região limitada à esquerda e à direita, por curvas contínuas $x = h_2(y)$ e $x = h_1(y)$, dentro do intervalo $[c, d]$, e superiormente e inferiormente, por retas horizontais $y = d$ e $y = c$, conforme a figura 24.1.3.2. Neste caso, a integral dupla será dada por:

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

As funções do intervalo de x devem estar em função de y.

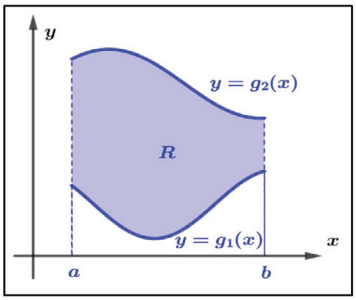


Figura 24.1.3.1

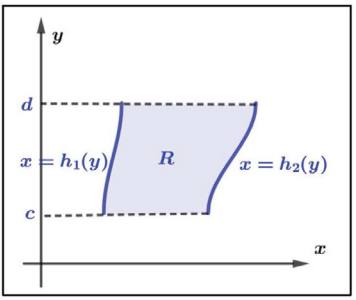


Figura 24.1.3.2

Em ambos os casos, a integral dupla representará o volume se $f(x,y) \geq 0$ e uma contabilização de volumes caso ocorra $f(x,y) \geq 0$ e $f(x,y) < 0$ dentro da região R.

Exemplo: Vimos anteriormente que o volume do sólido dado pela integral dupla $\int_0^1 \int_0^1 (-x - y + 1)dy\,dx$ foi nulo. Vamos mostrar que os volumes dos sólidos que estão na parte superior e na parte inferior ao plano xy, da figura 24.1.3.3, são iguais.

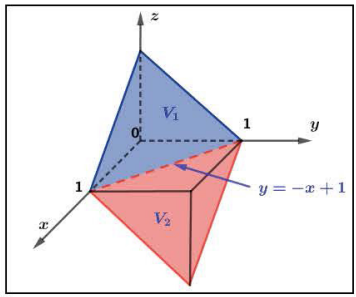


Figura 24.1.3.3

Solução: Inicialmente devemos estabelecer que funções serão limites para a região R. Para o volume da parte do superior V_1, trataremos a região R como sendo do tipo I, ou seja, limitada inferiormente por $y = 0$, superiormente por $y = -x + 1$ e lateralmente por $x = 0$ e $x = 1$. Veja a figura 24.1.3.4.

Assim:

$$V_1 = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_0^1 \int_{y=0}^{y=-x+1} (-x - y + 1)dy\,dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(-xy - \frac{y^2}{2} + y\right)\Big]_{y=0}^{y=-x+1} dx = \int_0^1 \left(-x(-x+1) - \frac{(-x+1)^2}{2} + (-x+1)\right) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - x - \frac{x^2 - 2x + 1}{2} - x + 1\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2x - 1 - 2x + 2}{2}\right) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - x - \frac{x^2 - 2x + 1}{2} - x + 1\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\right) dx \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{1}{6}\,u.v}.$$

Use os conhecimentos sobre geometria espacial (pirâmides) e confirme o valor desse volume.

Para o volume da parte do inferior V_2, trataremos a região R como tipo I também, isto é, limitada inferiormente por $y = -x + 1$ e superiormente por $y = 0$. Veja a figura 24.1.3.5. Dessa maneira:

$$V_2 = \int_0^1 \int_{y=-x+1}^{y=1} (-x - y + 1)dy\,dx \Rightarrow \boxed{V_2 = -\frac{1}{6}\,u.v}.$$

Note que tanto a região R de V_1 quanto a de V_2, pode ser tratada como uma região do tipo II. A seguir estão as integrais já montadas, utilizando uma região do tipo II. Calcule essas integrais e compare com os resultados anteriores.

$$\boxed{V_1 = \int_0^1 \int_{x=0}^{x=-y+1} (-x - y + 1)dx\,dy} \quad e \quad \boxed{V_2 = \int_0^1 \int_{x=-y+1}^{x=0} (-x - y + 1)dx\,dy}.$$

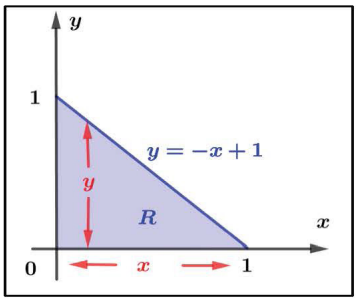


Figura 24.1.3.4

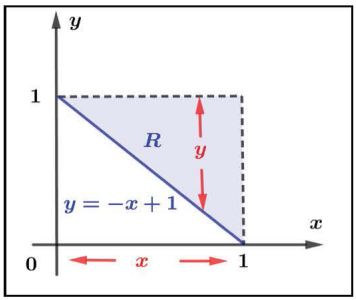


Figura 24.1.3.5

2º exemplo: Determine o volume do sólido que está abaixo da superfície $f(x,y) = -x^2 - y^2 - 2xy + 4$ e acima da região R do plano xy limitada pelas funções $y = x^3$ e $y = x$.

Solução: Vamos encontrar os limites dos intervalos na região R.

$$x^3 = x \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x - 1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}.$$

Adotando a região como do tipo I, conforme a figura 24.1.3.6, devemos observar que as funções $y = x^3$ e $y = x$ trocam de posição no intervalo [-1,1]. Portanto, devemos calcular duas integrais separadamente.

– A primeira integral terá intervalo $y = [x, x^3]$, intervalo $x = [-1,0]$ e o volume será dado por:

$$V_1 = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \int_{y=x}^{y=x^3} (-x^2 - y^2 - 2xy + 4)\,dy\,dx \Rightarrow$$

$$V_1 = \int_{-1}^{0} \left(-x^2 y - \frac{y^3}{3} - y^2 x + 4y \right)\Big|_{y=x}^{y=x^3} dx \Rightarrow$$

$$V_1 = \int_{-1}^{0} \left(-x^2.x^3 - \frac{(x^3)^3}{3} - (x^3)^2.x + 4.x^3 \right) - \left(-x^2.x - \frac{x^3}{3} - x^2.x + 4x \right) dx$$

$$V_1 = \int_{-1}^{0} \left(-x^5 - \frac{x^9}{3} - x^7 + 4.x^3 \right) - \left(-x^3 - \frac{x^3}{3} - x^3 + 4x \right) dx$$

$$V_1 = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{x^9}{3} - x^7 - x^5 + \frac{19x^3}{3} - 4x \right) dx = \left(-\frac{x^{10}}{30} - \frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{19x^4}{12} - 2x^2 \right)\Big|_{-1}^{0}$$

$$V_1 = \left(-\frac{0^{10}}{30} - \frac{0^8}{8} - \frac{0^6}{6} + \frac{19.0^4}{12} - 2.0^2 \right)$$

$$- \left(-\frac{(-1)^{10}}{30} - \frac{(-1)^8}{8} - \frac{(-1)^6}{6} + \frac{19.(-1)^4}{12} - 2(-1)^2 \right)$$

$$V_1 = 0 - \left(-\frac{1}{30} - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{19}{12} - 2 \right) \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{89}{120}\,u.v}.$$

– A segunda integral terá intervalo $y = [x^3, x]$, intervalo $x = [0,1]$ e o volume será

dado por:

$$V_2 = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_0^1 \int_{y=x^3}^{y=x} (-x^2 - y^2 - 2xy + 4)dy\,dx \Rightarrow$$

$$V_2 = \int_0^1 \left(-x^2y - \frac{y^3}{3} - y^2x + 4y\right)\Big|_{y=x^3}^{y=x} dx \Rightarrow$$

$$V_2 = \int_0^1 \left(-x^2.x - \frac{x^3}{3} - x^2.x + 4x\right) - \left(-x^2.x^3 - \frac{(x^3)^3}{3} - (x^3)^2.x + 4.x^3\right) dx$$

$$V_2 = \int_0^1 \left(-x^3 - \frac{x^3}{3} - x^3 + 4x\right) - \left(-x^5 - \frac{x^9}{3} - x^7 + 4.x^3\right) dx$$

$$V_2 = \int_0^1 \left(\frac{x^9}{3} + x^7 + x^5 - \frac{19x^3}{3} + 4x\right) dx$$

$$V_2 = \left(\frac{x^{10}}{30} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^6}{6} - \frac{19x^4}{12} + 2x^2\right)\Big|_0^1 \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{89}{120}\,u.v}.$$

Resposta:

$$V = \frac{89}{120} + \frac{89}{120} \Rightarrow \boxed{V = \frac{89}{60}\,u.v}.$$

Importante: Uma vez observado que os volumes são iguais (veja na figura 24.1.3.7), bastava calcular um volume apenas e multiplicar por 2. Como resultado dessa constatação, temos que:

$$\int_{-1}^{1} \int_{y=x^3}^{y=x} (-x^2 - y^2 - 2xy + 4)dy\,dx = 0.$$ Por quê?

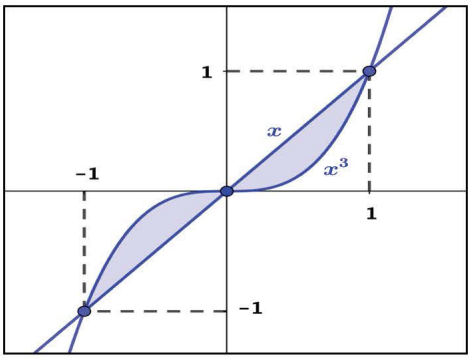


Figura 24.1.3.6

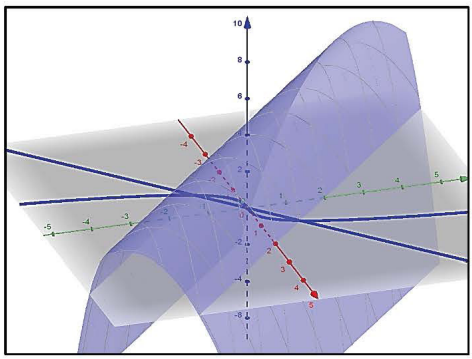


Figura 24.1.3.7

3º exemplo: Determine o volume do sólido limitado superiormente por $z = x + y + 8$, inferiormente por $z = \frac{y}{2} + 2$ e lateralmente pelas superfícies definida pelo contorno da região R limitada pelas funções $y = x^2$ e $y = -x^2 + 8$.

Solução: Vamos encontrar os limites dos intervalos na região R.

$x^2 = -x^2 + 8 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 4 \\ x = -2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$ ver figura 24.1.3.8.

Observando a figura 24.1.3.9, podemos calcular o volume V_1 do sólido compreendido entre a região R e o plano $z_1 = x + y + 8$. Depois, calcular o volume V_2 do sólido compreendido entre a região R e o plano $z_2 = \frac{y}{2} + 2$. O volume do sólido será a diferença $V = V_1 - V_2$, ou seja:

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{-x^2+8}(x + y + 8)dy\,dx - \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{-x^2+8}(\frac{y}{2} + 2)dy\,dx.$$

Porém, utilizaremos uma propriedade de integrais duplas (que será ratificada a seguir) em que a diferença de integrais duplas é igual a integral dupla da diferença, da seguinte forma:

$$V = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}(z_1 - z_2)dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{-x^2+8}(x + y + 8 - \left(\frac{y}{2} + 2\right))dy\,dx \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{-x^2+8}(x + \frac{y}{2} + 6)dy\,dx \Rightarrow \int_{-2}^{2}\left(xy + \frac{y^2}{4} + 6y\right)\Big]_{x^2}^{-x^2+8}dx \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(x(-x^2+8) + \frac{(-x^2+8)^2}{4} + 6(-x^2+8)\right) - \left(x(x^2) + \frac{(x^2)^2}{4} + 6(x^2)\right)\right]dx \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(-x^3 + 8x + \frac{x^4 - 16x^2 + 64}{4} - 6x^2 + 48\right) - \left(x^3 + \frac{x^4}{4} + 6x^2\right)\right]dx \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 8x + 64 - x^3 - \frac{x^4}{4} - 6x^2\right)dx \Rightarrow$$

$$\int_{-2}^{2}(-2x^3 - 16x^2 + 8x + 64)dx \Rightarrow \left(-\frac{x^4}{2} - \frac{16x^3}{3} + 4x^2 + 64x\right)\Big]_{-2}^{2} \Rightarrow$$

$$V = -\frac{2^4}{2} - \frac{16.2^3}{3} + 4.2^2 + 64.2 - \left(-\frac{(-2)^4}{2} - \frac{16(-2)^3}{3} + 4(-2)^2 + 64(-2)\right) \Rightarrow$$

$$V = -8 - \frac{128}{3} + 16 + 128 - \left(-8 + \frac{128}{3} + 16 - 128\right) = -\frac{256}{3} + 256 \Rightarrow \boxed{V = \frac{512}{3}\ u.v}.$$

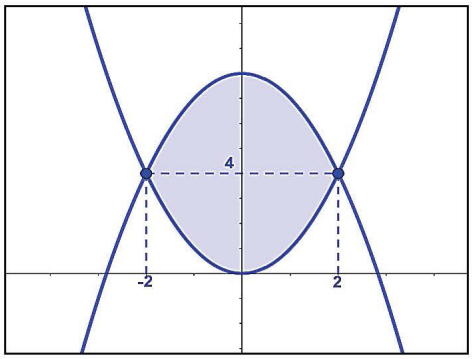


Figura 24.1.3.8

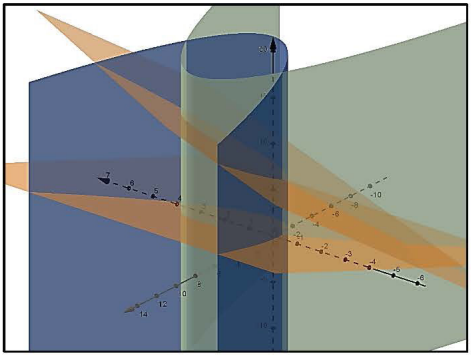


Figura 24.1.3.9

24.1.4. Propriedades das integrais duplas

Se todas as integrais envolvidas existem em uma região R, valem as seguintes propriedades (usamos a notação $dA = dxdy\ ou\ dydx$):

***Propriedade* 1**: $\boxed{\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA}$.

***Propriedade* 2**: $para\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{\iint_R c.f(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA}$.

***Propriedade* 3**: $se\ f(x,y) \geq g(x,y) \Rightarrow \boxed{\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA}$.

***Propriedade* 4**: $se\ R = R_1 \cup R_2, então$:

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA}.$$

***Propriedade* 5**: $se\ f(x,y) = 1, então\ a\ área\ da\ região\ R\ é\ dada\ por$:

$$\boxed{A = \iint_R 1dA}.$$

Exemplo: Calcule a área limitada pelas funções $x = y^2$ e $x = -y^4 + 2$ no plano yx, utilizando a propriedade 5.

Solução: Utilizando a propriedade 5, podemos calcular a área da seguinte forma:

$$A = \iint_R 1dA.$$

$y^2 = -y^4 + 2 \Rightarrow y^4 + y^2 - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$ ver figura 24.1.4.1.

Para utilizar a região como do tipo I, teríamos que dividir a região R em duas regiões: R_1 *e* R_2, uma vez que a função inferior e superior não é a mesma no intervalo [0,2]. Veja a figura 21.1.4.2. Após isso, ainda seria necessário aplicar a propriedade 4 e calcular:

$$A = \underbrace{\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} 1dy\,dx}_{R_1} + \underbrace{\int_1^2 \int_{-\sqrt[4]{2-x}}^{\sqrt[4]{2-x}} 1dy\,dx}_{R_2}.$$

Calcule A e compare com o resultado a seguir.

Porém, ao utilizar a região como do tipo II, o cálculo é mais simples, uma vez que a função que limita à esquerda e à direita, é a mesma, respectivamente. Veja a figura 21.1.4.3. Logo:

$$A = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} 1dy\,dx = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{-y^4+2} 1dxdy =$$

$$A = \int_{-1}^{1} (-y^4 + 2 - y^2)dy \Rightarrow \left(-\frac{y^5}{5} + 2y + -\frac{y^3}{3}\right)\Big]_{-1}^{1}$$

$$A = -\frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{44}{15}\ u.a}.$$

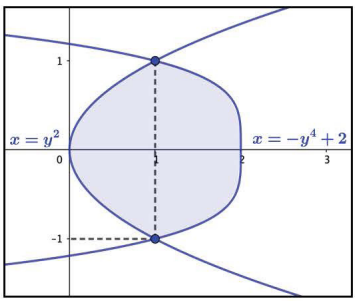


Figura 24.1.4.1

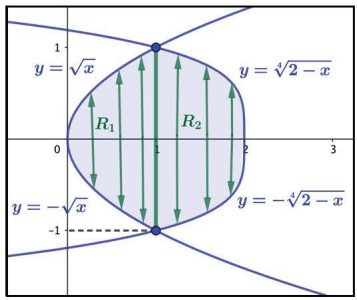


Figura 24.1.4.2

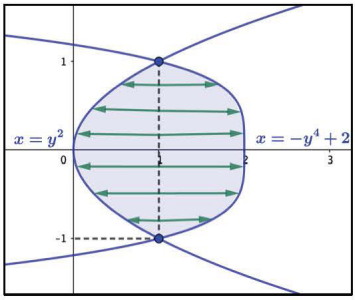


Figura 24.1.4.3

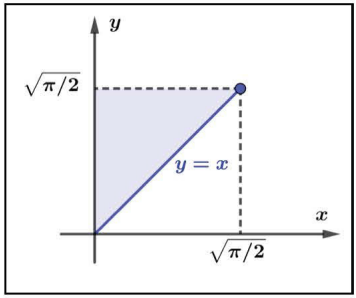


Figura 24.1.4.4

Em alguns casos, é viável alterar a ordem de integração de uma integral dupla, quando a solução na ordem apresentada não for possível, ou seja, quando a integral não possuir função primitiva elementar.

Exemplo: Calcular a integral $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} cos(y^2)dy\,dx.$

Solução: A integral $\int_x^{\sqrt{\pi/2}} cos(y^2)dy$ não possui primitiva elementar. Porém, alterando a ordem de integração, conforme figura 24.1.4.4, encontramos

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{y} cos(y^2)dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} cos(y^2).y.dy = \frac{sen(y^2)}{2} = \frac{sen(y^2)}{2}\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{1}{2}.$$

EXERCÍCIOS 24.2

1) Calcule as integrais duplas mudando a ordem de integração quando achar conveniente.

a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x - 2y)dy\,dx$

b) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x - y)dy\,dx$

c) $\int_{-2}^{0} \int_{4y}^{y^3} xydx\,dy$

d) $\int_0^{(\sqrt{2})/2} \int_{arcseny}^{\pi/4} xdx\,dy$

e) $\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{x^3+1} dy\,dx$

f) $\int_1^e \int_0^{lnx} xdy\,dx$

g) $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx\,dy$

h) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} sen x^2 dx\,dy$

i) $\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy\,dx$

2) Calcule as integrais duplas de acordo com cada região R:

a) $\iint_R (x^2y)dA$, *onde R é limitada pelo quadrado de vértices*: (0,0), (0,1) *e* (1,0).

b) $\iint_R (xy)dA$, *onde R é limitada pelo triângulo de vértices*: (0,0), (0,1) *e* (1,0).

c) $\iint_R (2x - y)dA$, *onde R é limitada pelo círculo de centro na origem e raio* 1.

d) $\iint_R (x^2 - 2y)dA$, *onde R é limitada por* $y = -\sqrt[3]{x}$ *e* $x = y^2$.

3) Determine o volume de cada sólido.

a) Abaixo do plano $2x - z = 0$ e acima da região limitada por $y = 2x$ e $y = x^2$.

b) Abaixo da superfície $z = 2x - y^2$ e acima da região limitada por $x = 2$ e $x = y^2/2$.

c) Abaixo do plano $z = y$, acima do plano xy e limitado lateralmente pela região R compreendida entre a reta $y = -x + 1$ e a circunferência $y^2 + x^2 = 1$.

d) Limitado lateralmente pelo cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos coordenados no primeiro octante e superiormente pelo plano $x = z$.

4) Determine o volume do sólido limitado pelos planos $z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1$ e $z = x - y + 2$ e lateralmente pelas superfícies definida pelo contorno da região R limitada pelas funções $y = x^2$ e $y = x$.

5) Determine o volume do tetraedro limitado pelo plano $z = -3x - 2y + 6$ formado no 1º octante.

6) Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $z = -x - 2y + 2$, $x = 2y$, $x = 0$ e $z = 0$.

24.1.5. Integrais duplas em coordenadas polares

Até o presente momento, estudamos a representação de funções em sistemas de coordenadas cartesianas, também conhecido como sistemas de coordenadas retangulares. Nesta subseção, veremos uma aplicação de um sistema de coordenadas diferente, denominado de sistema de coordenadas polares. Este sistema de coordenadas, criado por Issac Newton (1643-1727), pode ser, em algumas ocasiões, mais conveniente e prático do que o sistema de coordenadas retangulares convencional.

O sistema de **coordenadas polares** consiste em um ponto do plano, denominado de **polo** (ou origem) e um eixo horizontal para direita (correspondente ao eixo x positivo tradicional) denominado de **eixo polar**. Um ponto P qualquer do plano é representado pelo par ordenado (r, θ), onde r é a distância de O até P e θ o ângulo (geralmente medido em radianos) entre o eixo polar e o segmento $\overline{OP}$ (ver figura 24.1.5.1). Nesse sistema, r e θ são denominados de coordenadas polares do ponto P, e o ângulo θ, por convenção, tem seu valor positivo no sentido anti-horário e negativo no sentido horário.

Qualquer ponto P do sistema de coordenadas retangulares convencional tem sua representação no plano de coordenas polares, isto é, qualquer par (x,y) de um sistema tem seu representante (r,θ) de outro (e vice-versa). Ver figura 24.1.5.2.

A relação entre os dois sistemas é dado por:

$$x = r.cos\,\theta, y = r.sen\theta \text{ e } r^2 = x^2 + y^2$$

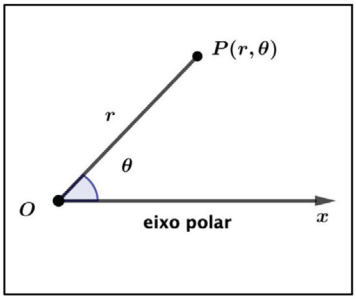


Figura 24.1.5.1

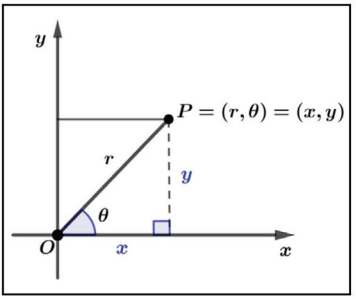


Figura 24.1.5.2

O ponto $(4,\frac{\pi}{3})$ em coordenadas polares, por exemplo, representa o ponto $(2,2\sqrt{3})$ no sistema de coordenadas cartesianas, pois:

$$x = r.cos\,\theta = 4.cos\frac{\pi}{3} = 2;$$

$$y = r.sen\,\theta = 4.sen\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

A resolução de integrais duplas em algumas regiões R em formas de círculos ou elipses é mais fácil utilizando o sistema de coordenadas polares. Para isso é preciso fazer a mudança (ou transformação) de um sistema de coordenadas para outro.

Porém, essa transformação de um sistema de coordenadas para outro, implica na alteração da região de integração da integral, seja ela, integral simples, dupla ou tripla (que veremos adiante) e, consequentemente, um fator de correção precisa ser aplicado. A esse fator de correção denominamos de **Jacobiano**[24].

Vimos na seção 21.4.1, por exemplo, que o método da substituição nas integrais simples é dado por

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u)).g'(u)du = \int_c^d f(g(u)).\frac{dx}{du}du.$$

Assim sendo, o fator de correção (ou o jacobiano da transformação) da mudança de uma variável de x para u é $\frac{dx}{du}$.

Para correção de uma transformação com duas variáveis, o jacobiano é dado pela definição a seguir.

Definição 24.1.5.1: O jacobiano da transformação T dada por $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$ é o determinante de:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}.$$

Nas integrais duplas especificamente, estamos interessados em aplicar uma transformação (T) de uma região R retangular para uma região S polar, consoante a figura a seguir.

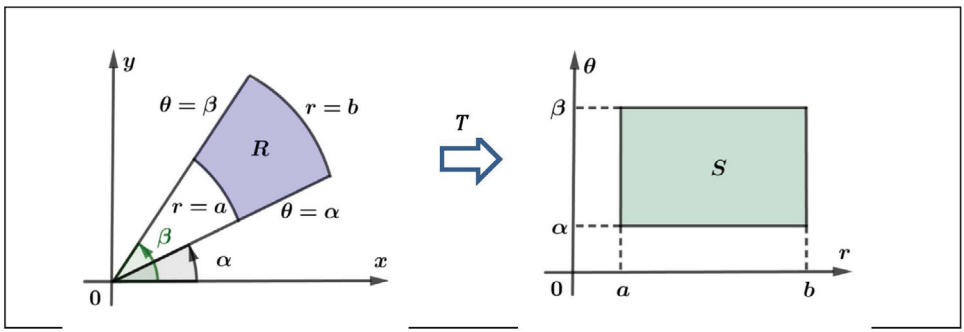


Figura 24.1.5.3

[24] O fator de correção recebe o nome de jacobiano em homenagem ao matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851). Jacobi usou derivadas (parciais) como fator de correção de mudança de coordenadas em integrais múltiplas.

Isso posto, sendo $x = r.cos\,\theta, y = r.sen\theta$ e $r^2 = x^2 + y^2$, o fator de correção dessa transformação é:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\,\theta & -r.sen\,\theta \\ sen\,\theta & r.cos\,\theta \end{vmatrix} = r.(cos^2\theta + sen^2\theta) = r.$$

Portanto, a **mudança para coordenadas polares em uma integral dupla**, para uma função $f(x,y)$ contínua no retângulo polar R, dado por $0 \le a \le r \le b$ e $\alpha \le \theta \le \beta$ $(0 \le \beta - \alpha \le 2\pi)$, é dado por:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos\theta, rsen\theta).r.dr\,d\theta$$

A fórmula acima nos diz que para mudar uma integral dupla de coordenadas cartesianas para coordenas polares, devemos substituir x por $r.cos\theta$, y por $r.sen\theta$, dA por $r.dr.d\theta$ (não esqueça do jacobiano r) e os intervalos de integração por r e θ adequados, observando que $0 \le a \le r \le b$ e $\alpha \le \theta \le \beta$ $(0 \le \beta - \alpha \le 2\pi)$.

Como exemplos de aplicação, observe como deve ser os intervalos de integração da região R das figuras 24.1.5.4 e 24.1.5.5.

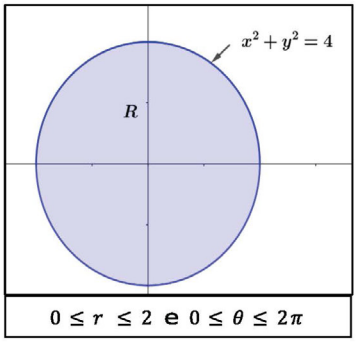


Figura 24.1.5.4

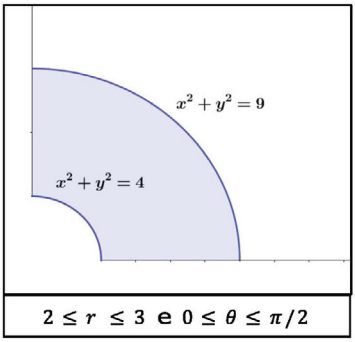


Figura 24.1.5.5

Exemplo: Vamos calcular o volume de um cilindro de raio a e altura h, aplicando a definição de integral dupla e utilizando ambas as coordenadas.

a) Utilizando as coordenadas retangulares (cartesianas)

Solução: O volume desse cilindro pode ser calculado, considerando a região R limitada pela função $x^2 + y^2 = a^2$ e o sólido com altura limitada por um plano $z = h$, conforme as figuras 24.1.5.6 e 24.1.5.7.

Devemos considerar ainda, por simplicidade, apenas a parte positiva da região R, limitada superiormente por $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ e inferiormente por $y = 0$ no intervalo $-a \le x \le a$.

Assim, o volume será a metade, conforme a seguir.

$$\frac{V}{2} = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_{-a}^{a} \int_{y=0}^{y=\sqrt{a^2-x^2}} h dy\,dx \Rightarrow \int_{-a}^{a} h\sqrt{a^2-x^2}dx$$

Aplicando a substituição trigonométrica, temos: $x = a.sen\theta$, então $dx = acos\theta d\theta$. Os intervalos passam a ser $\theta = -\frac{\pi}{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, substituindo na integral:

$$\frac{V}{2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} hacos\theta(acos\theta)d\theta = h.a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\theta d\theta = h.a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+cos2\theta}{2} d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{V}{2} = h.a^2\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{sen2\theta}{4}\right)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -h.a^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \boxed{V = \pi a^2 h}.$$

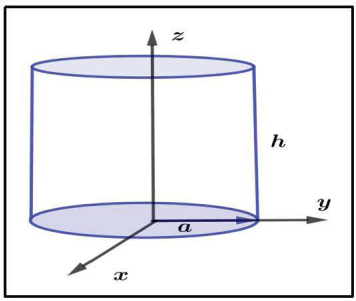


Figura 24.1.5.6

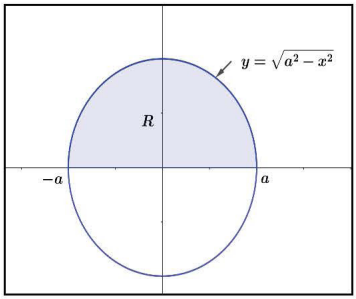


Figura 24.1.5.7

b) Utilizando as coordenadas polares.

Solução: Mudando para coordenadas polares, temos que $0 \leq r \leq a$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (considerando toda a região R da figura 24.1.5.7 – e não a metade).

$$V = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(rcos\theta, rsen\theta).r.dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a hr.dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{hr^2}{2}\right)\Bigg|_0^a d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_0^{2\pi} \frac{ha^2}{2} d\theta = \left(\frac{ha^2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} \Rightarrow \boxed{V = \pi a^2 h}.$$

Notadamente, a solução utilizando as coordenadas polares foi mais prática.

2º exemplo: Vamos calcular o volume de um sólido gerado pelo paraboloide o $z = 9 - x^2 - y^2$ acima do plano xy.

Solução: O sólido está figura 24.1.5.8. A região R no plano xy será uma circunferência de raio 3 e centro (0, 0), conforme a figura 24.1.5.9. Assim: $0 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,sen\theta).r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} (9-(r.\cos\theta)^2-(r.sen\theta)^2).r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} (9r-r^3).dr\,d\theta = \int_{0}^{2\pi}\left(\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{3} d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi}\frac{81}{4}d\theta = \left(\frac{81.\theta}{4}\right)\Big]_{0}^{2\pi} \Rightarrow \boxed{V = \frac{81\pi}{2}\,u.v}.$$

Se utilizássemos as coordenadas cartesianas teríamos que resolver:

$$V = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} (9-x^2-y^2)dy\,dx.$$

O que não é uma tarefa fácil.

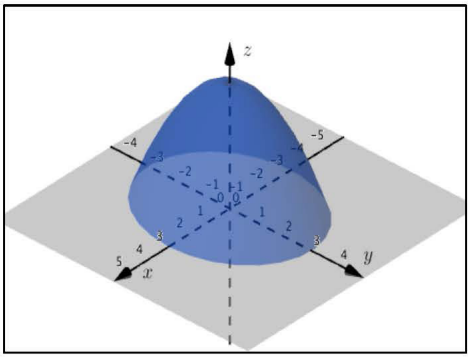


Figura 24.1.5.8

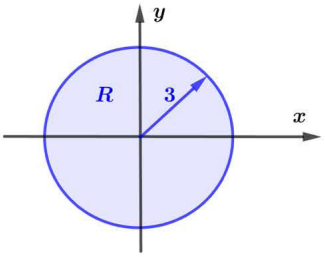


Figura 24.1.5.9

3º exemplo: Determine o volume de um sólido que está sob o paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Solução: O sólido está na figura 24.1.5.10. Como o cilindro em questão não está na origem, devemos encontrar o raio e as coordenadas do centro desse cilindro. Completando quadrados, temos:

$$x^2 + y^2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}.$$

A região R é, portanto, uma circunferência de raio 1 e centro $(1, 0)$, conforme a figura 24.1.5.11.

Como a circunferência não está na origem, devemos substituir x e y, respectivamente, por $r\cos\theta$ e $r\,sen\theta$ na equação do cilindro, e isso nos dá:

$$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (r\cos\theta)^2 + (r\,sen\theta)^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow r^2 = 2r\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2\cos\theta \end{cases}.$$

Dessa forma, $0 \le r \le 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ e o volume é dado por:

$$V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\,sen\theta).r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\theta} (4-(r.\cos\theta)^2-(r.sen\theta)^2).r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\theta} (4-r^2).r.dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{2\cos\theta} (4r-r^3).dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Big]_{0}^{2\cos\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2\theta - 4\cos^4\theta d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4(1+\cos 2\theta) - (1+\cos 2\theta)^2 d\theta$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4+4\cos 2\theta - 1 - 2\cos 2\theta - \cos^2 2\theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3+2\cos 2\theta - \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$V = 3\theta + sen2\theta\ -\frac{\theta}{2} - \frac{sen4\theta}{8}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\theta}{2} + sen2\theta\ -\frac{sen4\theta}{8}\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$V = \frac{5\pi}{4} + 0\ -0 - \left(-\frac{5\pi}{4} + 0\ -0\right) \Rightarrow \boxed{V = \frac{5\pi}{2}\ u.v}.$$

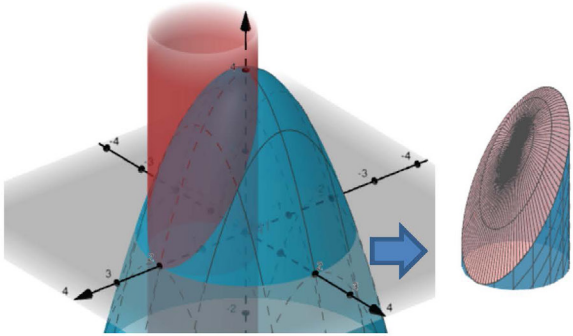


Figura 24.1.5.10

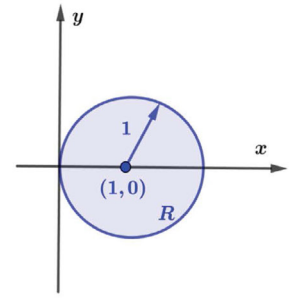


Figura 24.1.5.11

Uma solução alternativa para esse exemplo pode ser viável utilizando as coordenadas polares não centradas na origem.

Se a região R for uma circunferência não centrada na origem, utiliza-se:

$$x = x_0 + r.\cos\theta, y = y_0 + r.sen\theta\ e\ r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$$

Se a região R for uma elipse não centrada na origem, utiliza-se:

$$x = x_0 + a.r.\cos\theta, y = y_0 + b.r.sen\theta\ e \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Vamos ao cálculo do fator de correção (jacobiano) para a elipse:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a.\cos\theta & -a.r.sen\,\theta \\ b.sen\,\theta & b.r.\cos\theta \end{vmatrix} = abr.(cos^2\theta + sen^2\theta) = abr.$$

E para a circunferência o jacobiano é r (verifique!).

Vamos resolver o exemplo anterior.

Solução: $\begin{cases} x = 1 + r.cos\,\theta \Rightarrow \boxed{x = 1 + r.cos\,\theta} \\ y = 0 + r.sen\,\theta \Rightarrow \boxed{y = r.sen\,\theta} \end{cases}$

Substituindo esses valores e os intervalos tradicionais: $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, temos

$$V = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(1 + \cos\theta, sen\theta).r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} [4 - (1 + r.cos\theta)^2 - (r.sen\theta)^2].r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} [4 - (1 + 2\,rcos\theta + r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta)].r.dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} [3 - 2rcos\theta - r^2].r.dr\,d\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} [3r - 2r^2cos\theta - r^3].dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_{0}^{2\pi} \frac{3r^2}{2} - \frac{2r^3}{3}cos\theta - \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 d\theta = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{5}{4} - \frac{2}{3}cos\theta\right) d\theta \Rightarrow$$

$$V = \frac{5}{4}\theta - \frac{2}{3}sen\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{5}{4}.2\pi \Rightarrow \boxed{V = \frac{5\pi}{2}\,u.v}.$$

4º exemplo: Calcule $\iint_R (e^{-4y^2-(x-1)^2})dxdy$, onde R é uma elipse de equação $\frac{(y)^2}{1} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1$.

Solução: O centro da elipse é $(1,0)$, eixo maior é $a = 2$ e eixo menor é $b = 1$. Como a elipse não está centrada na origem, podemos utilizar $x = x_0 + a.r.\cos\theta$ e $y = y_0 + b.r.sen\theta$ ao transformar em coordenadas polares. Isto é,

$$x = 1 + 2.r.\cos\theta \text{ e } y = 0 + 1.r.sen\theta \Rightarrow \boxed{x = 1 + 2r\cos\theta} \text{ e } \boxed{y = rsen\theta}.$$

Vamos substituir essas expressões na equação da elipse para encontrar a variação do raio r:

$$\frac{(y)^2}{1} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \Rightarrow \frac{(rsen\theta)^2}{1} + \frac{(1 + 2r\cos\theta - 1)^2}{4} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{4r^2sen^2\theta + 4r^2cos^2\theta}{4} = 1 \Rightarrow r^2(sen^2\theta + cos^2\theta) = 1 \Rightarrow \boxed{r = 1}\,(para\ r > 0)$$

Nesse interim, e de acordo com a região de integração na figura 24.5.1.12, temos $0 \leq r \leq 1$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Logo:

$$\iint_R (e^{-4y^2-(x-1)^2})dxdy = \int_\alpha^\beta \int_c^d e^{-4y^2-(x-1)^2}.\underbrace{dxdy}_{a.b.r.dr\,d\theta} =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-4(r sen\theta)^2-(1+2r\cos\theta-1)^2}.2.1.r.dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-4r^2 sen^2\theta-4r^2\cos^2\theta}.2r.dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{-4r^2}.2r.dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{e^{-4r^2}}{4}\Big]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1-e^{-4}}{4}d\theta = \left(\frac{1-e^{-4}}{2}\right)\pi$$

Use o método da substituição

$$\iint_R (e^{-4y^2-(x-1)^2})dxdy = \left(\frac{1-e^{-4}}{2}\right)\pi.$$

Esse resultado representa o sólido destacado na figura 24.5.1.13.

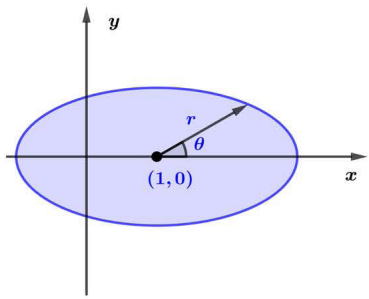


Figura 24.1.5.12

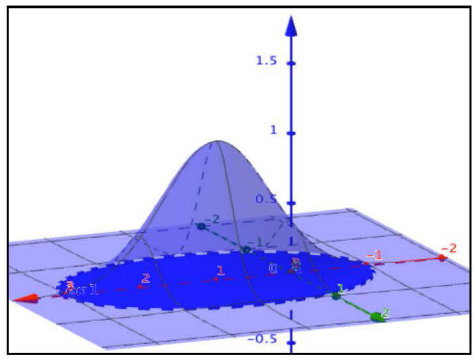


Figura 24.1.5.13

Observe no exemplo anterior, que é inviável utilizar o método tradicional (com coordenadas polares na origem). Pois, qual seria o intervalo do raio r na figura 24.1.5.12 para este caso? E além disso, veja que a função do integrando $(e^{-4y^2-(x-1)^2})$ ficaria ainda mais complexa ao substituir x e y pelos tradicionais $r.cos\,\theta$ e $r.sen\theta$.

Por outro lado, existem integrais duplas em que essa complexidade no intervalo ou na função do integrando pode também surgir ao usar o método alternativo (com coordenadas polares não centradas na origem). Observe que a solução do 3º exemplo anterior, não seria tão simples se o integrando fosse $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pois teríamos que resolver:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{\left[\sqrt{(1+r.cos\theta)^2+(r.sen\theta)^2}\right]}.r.dr\,d\theta.$$

Nesse desfecho, seja qual for o método escolhido, devemos sempre analisar as consequências dessa escolha, seja no intervalo ou na função do integrando da integral dupla.

EXERCÍCIOS 24.3

1) Calcule as integrais duplas utilizando as coordenadas polares.

a) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2y^2)dy\,dx$

b) $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(xy^2)dx\,dy$

c) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy\,dx$

d) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}e^{x^2+y^2}dy\,dx$

e) $\int_{0}^{5}\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{0}sen(x^2+y^2)dy\,dx$

f) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(x^2+y^2)dy\,dx$

2) Calcule as integrais duplas a seguir utilizando ambas as coordenadas retangulares e polares.

a) $\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0}(xy^2)dx\,dy$

b) $\int_{0}^{a\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{y}^{\sqrt{a^2-y^2}}(x)dx\,dy$

3) Monte as integrais duplas utilizando as coordenadas polares centradas na origem e também utilizando o método para não centradas na origem. Resolva a integral dupla cujo método é o mais prático.

a) $\int_{-1}^{1}\int_{1}^{\sqrt{1-x^2}+1}(x+y)dy\,dx$

b) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{y-y^2}}(x)dx\,dy$

c) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{-y^2+2y}}^{\sqrt{-y^2+2y}}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)dx\,dy$

d) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{-x^2+2x}+1}^{\sqrt{-x^2+2x}+1}(y)dy\,dx$

4) Calcule as integrais duplas, utilizando as coordenadas polares, de acordo com cada região R.

a) $\iint_R x^2dA$, *onde R é a metade superior do círculo na origem de raio* 3.

b) $\iint_R y^2+1dA$, *onde R é a região entre os círculos na origem de raio* 1 *e* 2.

c) $\iint_R cos(x^2+y^2)\,dA$, *onde R é a região do primeiro quadrante de um círculo na origem de raio* 3.

d) $\iint_R sen\sqrt{(x^2+y^2)}dA$, *onde R é a região limitada por um círculo na origem de raio* 1 *e as retas* $y=x$ *e* $x=0$ *no* 1º *quadrante.*

e) $\iint_R \frac{1}{x^2+y^2}dA$, *onde R é a região entre os círculos na origem de raio* 2 *e* 4, *no primeiro quadrante.*

$f)\iint_R \sqrt{17-x^2-y^2}\,dA$, *onde R é a região no 1º quadrante entre os círculos na origem de raios 1 e 4, a reta* $y=\sqrt{3}x$ *e a reta* $y=0$.

$g)\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$, *onde R é a região entre* $x^2+y^2\leq 4$ *e* $x\geq 1$.

$h)\iint_R \frac{y}{x}\,dA$, *onde R é a região dentro do círculo* $(x-1)^2+y^2=1$ *e fora do círculo* $x^2+y^2=1$.

$i)\iint_R xy\,dA$, *onde R é o 1º quadrante da elipse* $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

$j)\iint_R y\,dA$, *onde R é a elipse* $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$.

5) Calcule o volume do sólido acima do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

6) Determine o volume do sólido abaixo da superfície $z=-x^2-y^2+6$ e acima do plano $z=2$.

7) Determine o volume de um sólido que está sob o cone $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ e dentro do cilindro $x^2+y^2=2x$.

8) Calcule a área da elipse $\frac{(y-1)^2}{4}+\frac{(x-1)^2}{1}=1$ utilizando integrais duplas.

9) Calcule o volume do sólido que está sob o plano $x+y+z=5$ e limitado lateralmente pela elipse $\frac{(y)^2}{4}+\frac{(x-1)^2}{9}=1$.

10) Calcule o volume do sólido que está acima do plano $z=1/e$ e abaixo da superfície $z=e^{-x^2-y^2}$.

11) Calcule o volume do sólido que está dentro do cilindro elíptico $4x^2+y^2=16$, limitado superiormente pelo elipsoide $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=5$ e inferiormente pelo plano xy.

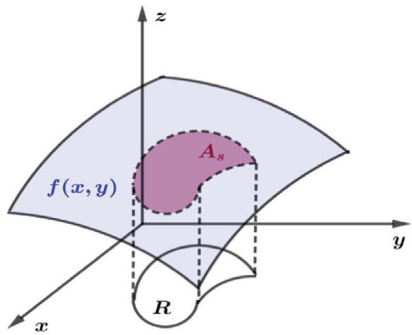
24.1.6. Integrais duplas no cálculo de área de superfície

Nesta subseção, apresentaremos uma fórmula para cálculo de área de superfícies utilizando as integrais duplas.

Seja uma superfície dada pela função $f(x,y)$ limitada por uma região R de seu domínio, conforme a figura a seguir.

A área A_s dessa superfície é dada por:

$$A_s = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$



Exemplo: Vamos mostrar a área da superfície de uma esfera de raio a, aplicando a fórmula acima.

Solução: Seja uma esfera de função $z^2 + y^2 + x^2 = a^2$. Considerando apenas o hemisfério superior, temos $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ e derivadas parciais iguais a:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

A área da superfície é dada por:

$$\frac{A_s}{2} = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$$\frac{A_s}{2} = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right)^2}\, dA$$

$$\frac{A_s}{2} = \iint_R \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y}}\, dA = \iint_R \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y}}\, dA$$

$$\frac{A_s}{2} = a \iint_R = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA$$

A região R de integração é claramente uma circunferência de raio a. Aplicando as coordenadas polares, dispomos de $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\theta$. E assim, obtemos:

$$\frac{A_s}{2} = a \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{r}{\sqrt{a^2 - (r\cos\theta)^2 - (r\,sen\theta)^2}}\right) . r\,dr\,d\theta = a \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right) . dr\,d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{A_s}{2} = a\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\right).dr\,d\theta = a\int_0^{2\pi}\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Big|_0^{a} d\theta = a\int_0^{2\pi} a d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{A_s}{2} = a\int_0^{2\pi} a d\theta \Rightarrow = a^2\,\theta\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \frac{A_s}{2} = 2\pi a^2 \Rightarrow \boxed{A_s = 4\pi a^2}.$$

2º exemplo: Encontre a área da superfície da parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 4$.

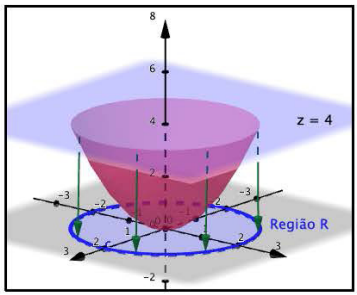
Solução:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\ e\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow A_s = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dA \Rightarrow$$

$$\iint_R \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dA \Rightarrow \boxed{A_s = \iint_R \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}\,dA}.$$

A região R é a interseção do paraboloide com o plano projetada no plano xy (ver figura ao lado). Como $z = x^2 + y^2$, isso implica em:

$$\boxed{4 = x^2 + y^2}.$$



E a região R é, portanto, uma circunferência de raio 2 e centro (0, 0).

Aplicando as coordenadas polares em A_s, temos: $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $x = r\cos\theta$ e $y = r\,sen\theta$. E desse modo:

$$A_s = a\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\sqrt{1+(2r\cos\theta)^2+(2r\,sen\theta)^2}.r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\sqrt{1+4r^2}.r\,dr\,d\theta.$$

Utilizando a integração por substituição:

$u = 1 + 4r^2 \Rightarrow du = 8r\,dr \Rightarrow dr = \frac{du}{8r}$. Encontramos:

$$\int \sqrt{1+4r^2}.r\,dr = \int \frac{\sqrt{u}}{8}dr = \frac{u^{3/2}}{12}$$

$$A_s = \int_0^{2\pi}\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12}\Big|_0^{2} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{(1+4.2^2)^{3/2}}{12} - \left(\frac{(1+4.0^2)^{3/2}}{12}\right)\Big|_0^{2} d\theta$$

$$A_s = \int_0^{2\pi}\left(\frac{17\sqrt{17}}{12} - \frac{1}{12}\right)d\theta \Rightarrow \boxed{A_s = \frac{\pi(17\sqrt{17}-1)}{6}\ u.a}.$$

Existem outras aplicações de integrais duplas em cálculos de densidade, centro de massa, momento de inércia e probabilidade. Pesquise!

EXERCÍCIOS 24.4

1) Determine a área da superfície dos seguintes sólidos.

a) A parte do plano $x + y + z = 1$ que está acima do triângulo de vértices: (0,1), (1,0) e (0,0).

b) A parte do plano $x + y + z = 2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

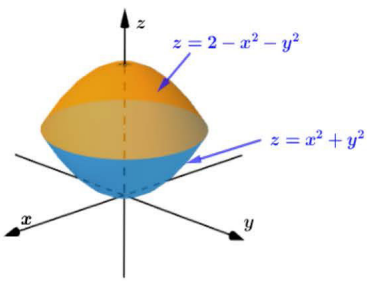
c) A parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano xy.

d) A parte do paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

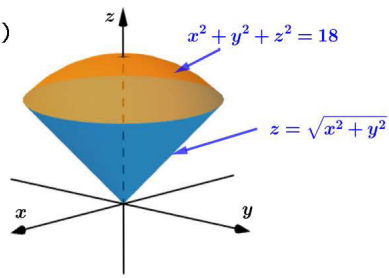
e) A calota da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$.

2) Calcule a área da superfície total dos sólidos das figuras a seguir.

a)



b)



3) Utilize a integral dupla para demonstrar que a área lateral da superfície de um cone cilíndrico de raio a e geratriz g é dado por $A_s = \pi . a . g$.

4) (ENADE MATEMÁTICA – 2014) Deseja-se pintar a área superficial (superfície externa e lateral) de um equipamento em forma de um paraboloide, o qual pode ser descrita pela equação $z = x^2 + y^2$, situada na região do espaço de coordenadas cartesianas (x, y, z) dada pela equação $z \leq 9$. Os eixos coordenados estão dimensionados em metros e gasta-se um litro e meio de tinta a cada metro quadrado de área da superfície a ser pintada.

A quantidade de tinta, em litros, necessária para se pintar a superfície lateral do monumento é dada pela integral dupla:

$a)\ 4.\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

$b)\ 6.\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$

$c)\ 4.\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \left(\sqrt{1 + 4r^2}\right) r\,dr\,d\theta$

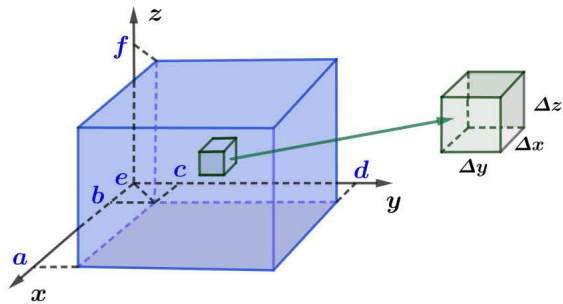
$d)\ 6.\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \left(\sqrt{1 + 4r^2}\right) r\,dr\,d\theta$

$e)\ 6.\int_0^{\pi/2} \int_{-3}^3 \left(\sqrt{1 + 4r^2}\right) r\,dr\,d\theta$

24.2. Integrais triplas

Assim como definimos a integral simples para funções com uma variável e a integral dupla para funções de duas variáveis, podemos definir a integral tripla para funções de três variáveis. Porém, a região de integração não será mais um intervalo, como nas integrais simples, ou uma área bidimensional, como nas integrais duplas, mas sim uma região B do espaço tridimensional (um sólido).

Nessas circunstâncias, considere uma caixa retangular disposta em um sistema cartesiano tridimensional, conforme a figura a seguir. As arestas paralelas aos eixos x, y e z podem ser representadas pelos intervalos $[a,b]$, $[c,d]$ e $[e,f]$, respectivamente. E cada intervalo pode ser ainda dividido em l, m e n subintervalos iguais, pelo quais denominaremos de Δx, Δy e Δz, também respectivamente.



Diante desse dados, para um ponto arbitrário $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})$ pertencente ao sólido, temos a seguinte soma **tripla de Riemann**:

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \ .\Delta x.\Delta y.\Delta z.$$

E análogo ao que ocorre com as integrais duplas, a integral tripla pode ser definida conforme a seguir.

Definição 24.2.1: A integral tripla de f numa caixa retangular B é dada pela expressão a seguir, se o limite existir:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V .$$

Onde:
$\Delta V = \Delta x.\Delta y.\Delta z$

Nesse contexto, ao contrário das integrais simples e duplas, a integral tripla não tem uma representação geométrica, pois seria algo em quatro dimensões: $f(x,y,z) \times \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, impossível de visualizar geometricamente.

Não obstante, todas as propriedades e teoremas aplicadas às demais integrais (duplas ou simples) continuam válidas e podem ser perfeitamente estendidas às integrais triplas, conforme as subseções subsequentes.

24.2.1. Integrais triplas em caixas retangulares

Definição 24.2.1.1: Considere uma função f contínua de três variáveis definida em uma caixa retangular (ou um paralelepípedo reto) $B = [a,b] \times [c,d] \times [e,f] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$. A integral tripla iterada é dada por:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dzdydx$$

Assim como para as integrais duplas, se f for contínua em um sólido B, vale o teorema de Fubini, ou seja, podemos calcular a integral tripla iterada em qualquer uma das seis ordens diferentes: $dzdydx, dzdxdy, dxdzdy, dxdydz, dydzdx$ e $dydxdz$.

Exemplo: Vamos calcular

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(x^2y^2z)dzdydx.$$

Solução:

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(x^2y^2z)dzdydx = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\left(\frac{x^2y^2z^2}{2}\right)\Big]_0^2 dydx$$

$$\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}2x^2y^2\,dydx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{2x^2y^3}{3}\right)\Big]_0^1 dx = \int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3}dx$$

$$\int_{-1}^{0}\frac{2x^2}{3}dx = \left(\frac{2x^3}{9}\right)\Big]_{-1}^{0} = \frac{2.0^3}{9} - \frac{2(-1)^3}{9} \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(x^2y^2z)dzdydx = \frac{2}{9}}.$$

Para comprovar que vale o teorema de Fubini, uma vez que a função x^2y^2z é contínua no paralelepípedo, mudaremos a ordem de integração para $dzdxdy$. Assim:

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{2}(x^2y^2z)dzdxdy = \int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\left(\frac{x^2y^2z^2}{2}\right)\Big]_0^2 dxdy$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}2x^2y^2\,dxdy = \int_{0}^{1}\left(\frac{2x^3y^2}{3}\right)\Big]_{-1}^{0} dy = \int_{0}^{1}\frac{2y^2}{3}dy$$

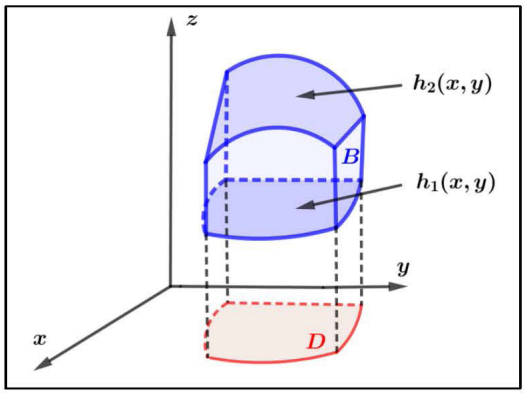
$$\int_{0}^{1}\frac{2y^2}{3}dy = \left(\frac{2y^3}{9}\right)\Big]_{0}^{1} = \frac{2.1^3}{9} - \frac{2.0^3}{9} \Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{0}^{2}(x^2y^2z)dzdydx = \frac{2}{9}}.$$

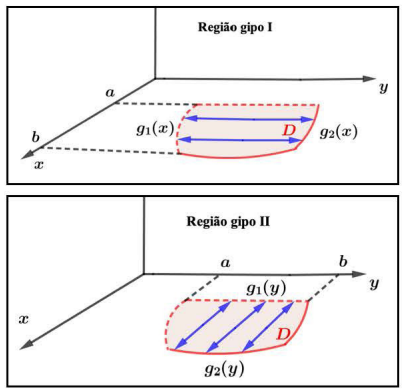
O mesmo resultado.

24.2.2. Integrais triplas em sólidos gerais

Nesse subseção, consideraremos o cálculo de integrais triplas em sólidos no espaço tridimensional que não são caixas retangulares. Porém, embora o termo geral seja amplo, nos restringiremos apenas a sólidos limitados superiormente e inferiormente pelas funções contínuas $h_1(x,y)$ e $h_2(x,y)$, respectivamente e exclusivamente, o que significa que as funções podem se tocar mas não podem mudar de posição no espaço (passar de $h_1 < h_2$ para $h_1 > h_2$, por exemplo). Além disso, a projeção desse sólido no plano xy deve gerar uma região tipo I ou tipo II, consoante a definição 24.1.3.1 (de integrais duplas). O sólido em questão é categorizado como sólido tipo I, conforme a definição a seguir.

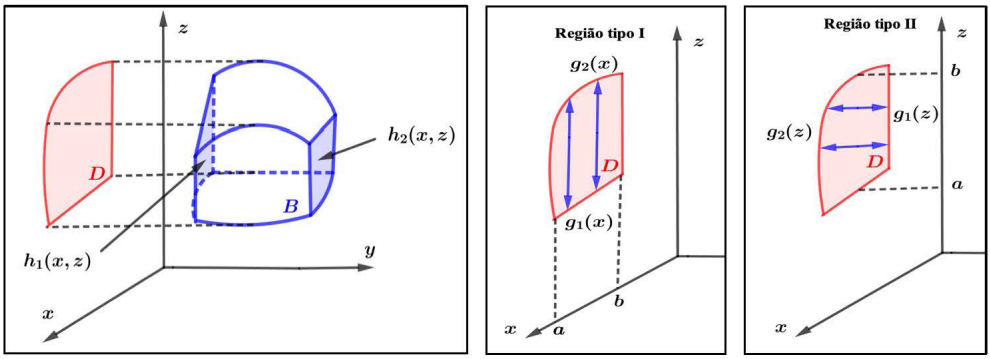
Definição 24.2.2.1: Seja uma função $f(x,y,z)$ contínua em um sólido B. Denominamos de **sólido tipo I**, o sólido descrito por $B = \{(x,y,z)|(x,y) \in D, h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$, onde D é a projeção do sólido B sobre o plano xy. E onde a região D enquadra-se em região tipo I ou região tipo II.



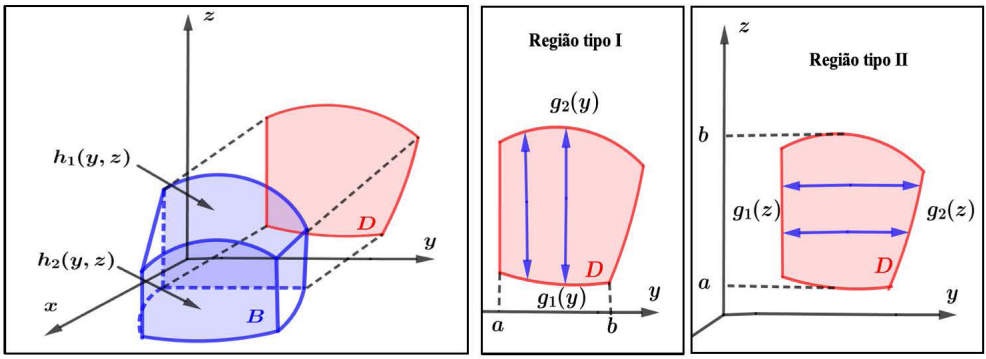


A disposição desse sólido no espaço tridimensional, pode ser eventualmente invertida, trocando a limitação entre funções de superior e inferior, para esquerda e direita, ou ainda, atrás e à frente, e as projeções do plano xy para os planos yz ou xz, respectivamente. Esse entendimento está categorizado como sólido tipo II e tipo III, conforme as definições seguintes.

Definição 24.2.2.2: Seja uma função $f(x,y,z)$ contínua em um sólido B. Denominamos de **sólido tipo II**, o sólido descrito por $B = \{(x,y,z)|(x,z) \in D, h_1(x,z) \leq y \leq h_2(x,z)\}$, onde D é a projeção do sólido B sobre o plano xz. E onde a região D enquadra-se em região tipo I ou região tipo II.



Definição 24.2.2.3: Seja uma função $f(x,y,z)$ contínua em um sólido B. Denominamos de **sólido tipo III**, o sólido descrito por $B = \{(x,y,z)|(y,z) \in D, h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\}$, onde D é a projeção do sólido B sobre o plano yz. E onde a região D também enquadra-se em região tipo I ou região tipo II.



As condições presentes nas definições anteriores, quando aplicáveis em um mesmo sólido de integração, permitem aplicar o teorema de Fubini e mudar a ordem de integração da integral tripla para uma ordem ($dzdydx, dzdxdy, dxdzdy, dxdydz, dydzdx$ ou $dydxdz$) que consideremos mais claro e calculá-la sem grandes dificuldades.

Conquanto, ao considerar uma ordem, é preciso observar que as funções do intervalo da primeira integral (a de dentro) devem estar em função das outras variáveis, as funções do intervalo da segunda integral devem estar em função da última variável e por fim, o intervalo da última integral (à esquerda) deve ser numérico.

Por exemplo, se decidirmos pela ordem $dydxdz$, os intervalos de y devem estar em função das demais variáveis (ou seja: x,z), os intervalos de x devem estar em função da última variável (neste caso z) e os intervalos de z devem ser

obrigatoriamente numéricos. Veja a ilustração a seguir.

$$dydxdz \Rightarrow \iiint_B f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(z)}^{g_2(z)} \int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)dydxdz$$

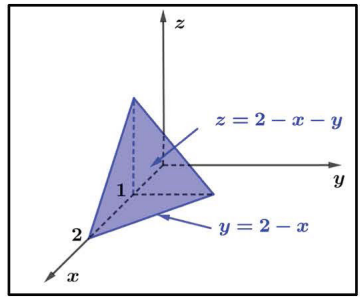
$x = f(z)$ (Numérico); $y = f(x,z)$ (Numérico)

Em função de x e z

Em função de z

Numérico

Exemplo: Calcule a integral tripla $\iiint_B (z)\,dV$, onde a região B é o sólido que está na figura a seguir.



Solução: Para um sólido tipo I, o mesmo é limitado superiormente por $2-x-y$ e inferiormente por 0. Assim: $0 \le z \le 2-x-y$.

A projeção do sólido no plano xy é um triângulo. E considerando uma região tipo I, esse é limitado à direita por $2-x$ e à esquerda por 0. Assim, $0 \le y \le 2-x$. E limitado inferiormente por 1 e superiormente por 2, ou seja, $1 \le x \le 2$. Logo:

$$\int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} (z)dzdydx$$

$$\int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} (z)dzdydx = \int_1^2 \int_0^{2-x} \left(\frac{z^2}{2}\right)\Big]_0^{2-x-y} dydx =$$

$$\int_1^2 \int_0^{2-x} \left(\frac{(2-x-y)^2}{2}\right) dydx = \int_1^2 -\left(\frac{(2-x-y)^3}{6}\right)\Big]_0^{2-x} dx =$$

$$-\int_1^2 \left(\frac{(2-x-(2-x))^3}{6}\right) - \left(\frac{(2-x)^3}{6}\right) dx = -\frac{1}{6}\int_1^2 (0)^3 - (2-x)^3\,dx =$$

$$\frac{1}{6}\int_1^2 (2-x)^3\,dx = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{(2-x)^4}{4}\right)\Big]_1^2 = \frac{1}{6}\cdot\left[\underbrace{-\frac{(2-2)^4}{4}}_{0} - \underbrace{\left(-\frac{(2-1)^4}{4}\right)}_{-1/4}\right] \Rightarrow$$

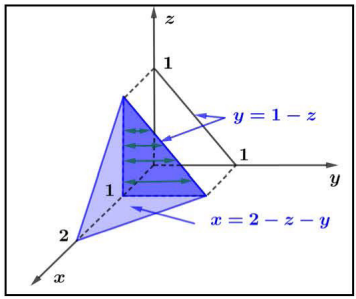
$$\boxed{\int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} (z)dzdydx = \frac{1}{24}.}$$

Vamos calcular novamente essa integral tripla mudando a ordem de integração para $dxdydz$ e verificar a validade do teorema de Fubini.

Solução: Para a ordem de integração para $dxdydz$ o sólido deve ser do tipo III. Assim:

- Os intervalos de x devem estar em função de y e z:

$\boxed{1 \le x \le 2 - z - y}$.



◆ A região precisa ser tipo II (uma vez que os intervalos de y devem estar em função de z). Essa região é a projeção do sólido no plano yz e pode ser encontrada fazendo $x = 1$ na desigualdade:

$$0 \le y \le 2 - z - \underbrace{x}_{1} \Rightarrow \boxed{0 \le y \le 1 - z}.$$

◆ $0 \le z \le 1 \Rightarrow$ intervalo numérico.

Ver a figura ao lado.

Dessa maneira, a integra tripla fica assim:

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_1^{2-z-y} (z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} zx \Big]_1^{2-z-y} dy\,dz =$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} (z - z^2 - zy)\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} \left(zy - z^2 y - z\frac{y^2}{2}\right)\Big]_0^{1-z} dz =$$

$$\int_0^1 z\left((1-z) - z(1-z) - \frac{(1-z)^2}{2}\right) dz =$$

$$\int_0^1 z(1-z)\left(1 - z - \frac{(1-z)}{2}\right) dz = \int_0^1 z(1-z)\left(\frac{(1-z)}{2}\right) dz$$

$$\frac{1}{2}.\int_0^1 (z - z^2)(1-z)\,dz = \frac{1}{2}.\int_0^1 (z - 2z^2 + z^3)\,dz =$$

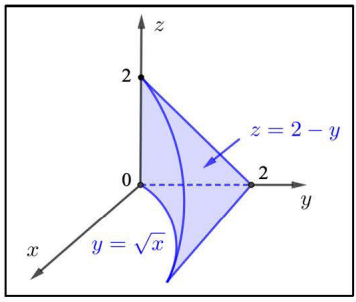
$$\frac{1}{2}.\left(\frac{z^2}{2} - 2.\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.\left(\frac{1^2}{2} - 2.\frac{1^3}{3} + \frac{1^4}{4}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{6-8+3}{12}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_1^{2-z-y} (z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{24}}.$$

O mesmo resultado.

2º exemplo: Calcule a integral tripla $\iiint_B (xy)\,dV$, onde a região B é o sólido que está na figura a seguir.

Solução: Escolhendo a ordem de integração $dz\,dy\,dx$, temos um sólido tipo I, cuja projeção do sólido no plano xy é uma região tipo I. Desse modo:



$\boxed{0 \le z \le 2 - y}$, $\boxed{\sqrt{x} \le y \le 2}$ e $\boxed{0 \le x \le 4}$.

$$\iiint_B (xy)\,dV = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \int_0^{2-y} (xy)\,dz\,dy\,dx =$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 xyz \Big]_0^{2-y} dy\,dx = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 xy(2-y)\,dy\,dx =$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 2xy - xy^2\,dydx = \int_0^4 xy^2 - \frac{xy^3}{3}\Big]_{\sqrt{x}}^2 dx =$$

$$\int_0^4 4x - \frac{8x}{3} - \left(x^2 - \frac{x^{5/2}}{3}\right)dx =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^4 4x - 3x^2 + x^{5/2}dx = \frac{1}{3}.\left(2x^2 - x^3 + \frac{2x^{7/2}}{7}\right)\Big]_0^4$$

$$\frac{1}{3}.\left(2.4^2 - 4^3 + \frac{2.4^{7/2}}{7}\right) = \frac{1}{3}.\left(32 - 64 + \frac{256}{7}\right) = \frac{1}{3}.\left(\frac{-224 + 256}{7}\right) = \frac{32}{21}.$$

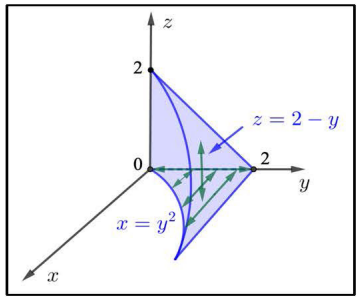
Assim:

$$\iiint_B (xy)dV = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \int_0^{2-y} (xy)dzdydx = \frac{32}{21}.$$

3º exemplo: Informe os intervalos da integral tripla da questão anterior, segundo as seguintes ordens de integração.

a) $dzdxdy$

Solução: Essa ordem de integração equivale ao sólido tipo I e região tipo II, conforme a figura ao lado.



Como o intervalo para x deve ser escrito em função de y, pela projeção do sólido no plano xy, temos:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \boxed{x = y^2}.$$

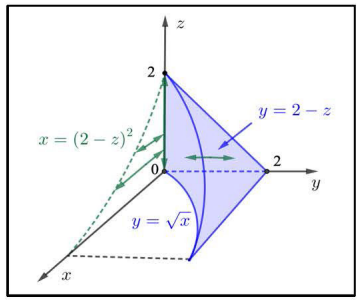
Pela mesma projeção, uma vez que o intervalo para y deve ser numérico, temos que utilizar: $0 \leq y \leq 2$.

Conclusão:

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \int_0^{2-y} (xy)dzdxdy.$$

b) $dydxdz$

Solução: Essa ordem de integração equivale ao sólido tipo II e região tipo II, conforme a figura ao lado.



Como o intervalo para y deve ser escrito em função de x e z, temos: $\sqrt{x} \leq y \leq 2 - z$ (analise a figura na horizontal e troque y e z na equação do plano).

Projetando o sólido no plano xz e uma vez que o intervalo para x deve ser escrito em função z, temos:

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = \underbrace{y^2}_{2-z} \Rightarrow \boxed{0 \leq x \leq (2-z)^2}.$$

A curva $x = (2-z)^2$ equivale a projeção da interseção do plano $y = 2 - z$ com $y = \sqrt{x}$.

Ao final, devemos utilizar: $0 \leq z \leq 2$ (ver figura).

Conclusão:

$$\int_0^2 \int_0^{(2-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{2-z} (xy)dydxdz.$$

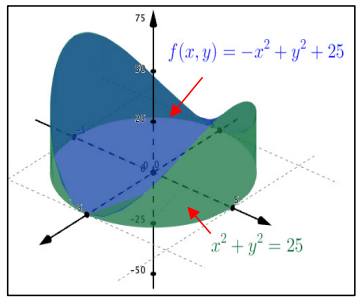
Resolva essas integrais triplas de a) e b), e constate o mesmo resultado $\frac{32}{21}$.

Observação: Não é preciso memorizar os tipos de sólidos, ou ainda, os tipos de regiões das projeções. Essas categorizações tem cunho meramente didático e servem apenas para que o leitor compreenda a análise que deve ser feita no sólido de integração, consoante a ordem de integração escolhida.

Um caso particular da aplicação de integral tripla pode ser utilizada para cálculo de volume de sólidos, para isso basta fazer $f(x,y,z) = 1$.

Exemplo: Determine o volume do sólido que está abaixo da superfície $f(x,y) = -x^2 + y^2 + 25$, acima do plano xy e limitada pelo cilindro $y^2 + x^2 = 25$.

Solução:



A região do espaço é $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -5 \leq x \leq 5, -\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}, 0 \leq z \leq -x^2 + y^2 + 25\}$.

Logo:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} \int_0^{-x^2+y^2+25} 1.dzdydx$$

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_{-5}^{5} \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} -x^2 + y^2 + 25\, dydx$$

Aplicando as coordenadas polares: $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $x = rcos\theta$ e $y = rsen\theta$, temos:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \left(-(rcos\theta)^2 + (rsen\theta)^2 + 25\right).r dr\, d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25 - r^2 cos2\theta)r.dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^5 (25r - r^3 cos2\theta)dr\, d\theta \Rightarrow$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(\frac{25r^2}{2} - \frac{r^4 cos2\theta}{4}\right)\Big|_0^5 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{625}{2} - \frac{625.cos2\theta}{4}\right) d\theta \Rightarrow$$

$$V = \left(\frac{625.\theta}{2} - \frac{625.sen2\theta}{8}\right)\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \frac{625.2\pi}{2} - \frac{625.sen2\pi}{8} \Rightarrow \boxed{V = 625\pi\, u.v}.$$

EXERCÍCIOS 24.5

1) Calcule as integrais triplas iteradas.

$a) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 (xzy)dzdydx$

$b) \int_{-1}^1 \int_{-1}^2 \int_{-2}^3 (x^2y)dzdydx$

$c) \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} (seny.cosx)dydxdz$

$d) \int_1^2 \int_1^2 \int_1^e \frac{z}{x}dxdydz$

2) Calcule as integrais triplas iteradas.

$a) \int_0^1 \int_0^x \int_0^y (x^2)dzdydx$

$b) \int_0^2 \int_{-x}^x \int_0^{x+y} (z-x)dzdydx$

$c) \int_0^{\pi} \int_0^y \int_0^x (sen(x+y+z))dzdxdy$

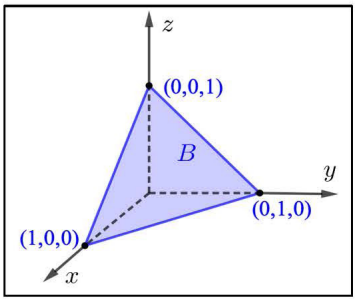
$d) \int_0^2 \int_0^{ln2} \int_{e^z}^2 (e^z)dxdzdy$

3) Monte a integral tripla iterada de cada item da questão anterior mudando a ordem de integração para $dydxdz$.

4) Calcule as integrais triplas.

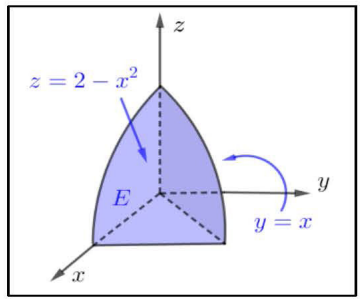
a) $\iiint_B (e^x)\, dV$

Onde B é o sólido:



b) $\iiint_E (xy)\, dV$

Onde E é o sólido:



5) Calcule a integral tripla $\iiint_B (x)\, dV$, onde B é o sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e pelo plano $z = x$ e $z = 0$.

6) Calcule a integral tripla $\iiint_B (xyz)\, dV$, onde B é o sólido limitado pelo cilindro parabólico $y = 1 - x^2$, pelo plano $z = 2y$ e pelo plano xy.

7) Determine o volume do sólido limitado pelos planos $z = 1 - x - 2y$, $x = y$, $y = 0$ e $x = 0$.

24.2.3. Integrais triplas com coordenadas cilíndricas

O sistema de coordenadas cilíndricas consiste em um ponto P do espaço representado por $(r,\ \theta,\ z)$, em que r e θ são coordenadas polares da projeção P no plano xy e z a distância dessa projeção para o ponto P. Ver a figura 24.2.3.1.

Para converter em coordenadas cilíndricas utilizamos:

$$x = r.cos\,\theta, y = r.sen\theta, r^2 = x^2 + y^2 e\ z = z$$

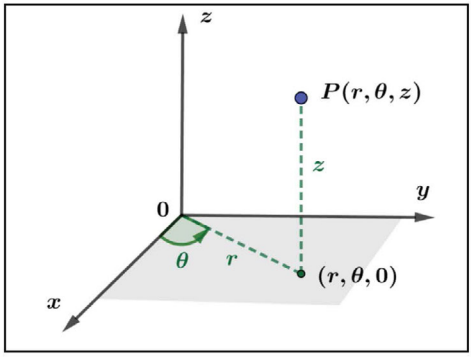


Figura 24.2.3.1

O jacobiano da transformação de três variáveis em integrais triplas é dado pela definição a seguir.

Definição 24.2.3.1: O jacobiano da transformação T dada por $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$ e $z = k(u,v,w)$ é o determinante de:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} & \frac{dx}{dw} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} & \frac{dy}{dw} \\ \frac{dz}{du} & \frac{dz}{dv} & \frac{dz}{dw} \end{vmatrix}$$

As coordenadas cilíndricas é uma extensão das coordenadas polares para três dimensões, mantendo apenas a coordenada z inalterada. Portanto, o fator de correção (jacobiano) da transformação é o mesmo r. Veja:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{dz} \\ \frac{dz}{dr} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{dz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\,\theta & -r.sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & r.cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\,\theta & -r.sen\,\theta \\ sen\,\theta & r.cos\,\theta \end{vmatrix} = r.(cos^2\theta + sen^2\theta) = r.$$

Dessa maneira, a integral tripla no sistema de coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r.cos\,\theta, r.sen\theta)}^{h_2(r.cos\,\theta, r.sen\theta)} f(r.cos\,\theta, r.sen\theta, z).r.dzdrd\theta$$

A fórmula anterior afirma que para converter uma integral tripla em coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas, devemos deixar o z como

está, substituir x por $r.cos\,\theta$, y por $r.sen\theta$, x^2+y^2 por r^2 e trocar dV por $rdzdrd\theta$. Os limites de z dependem dessas substituições, enquanto os limites de r e θ seguem os mesmos critérios das coordenadas polares da integral dupla.

A mudança para as coordenadas cilíndricas é indicada quando a integral tripla possui expressões na forma x^2+y^2 em sua composição.

Exemplo: Calcule a integral tripla

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x^2+y^2)dzdydx$$

Solução: O sólido de integração é $B=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1, r\le z\le 1\}$.

$$\iiint_B f(x,y,z)dV=\int_a^b\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)}\int_{h_1(r.cos\,\theta,r.sen\theta)}^{h_2(r.cos\,\theta,r.sen\theta)}f(r.cos\,\theta,r.sen\theta,z)r.dzdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1((r.cos\,\theta)^2+(r.sen\theta)^2)r.dzdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^2r.dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r^3dzdrd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3(1-r)dr\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{20}d\theta\Rightarrow\boxed{\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(x^2+y^2)dzdydx=\frac{\pi}{10}}.$$

2º exemplo: Use as coordenadas cilíndricas pra calcular o volume de um sólido limitado acima pelo hemisfério superior da esfera $z^2+x^2+y^2=169$, abaixo pelo plano xy e lateralmente pelo cilindro $x^2+y^2=144$.

Solução:

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{144-x^2}}^{\sqrt{144-x^2}}\int_0^{\sqrt{169-x^2-y^2}}1dzdydx$$

O sólido de integração é $B=\{(r,\theta,z)\in\mathbb{R}^3|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 12, 0\le z\le\sqrt{169-r^2}\}$, conforme figura 24.2.3.2. Desse modo,

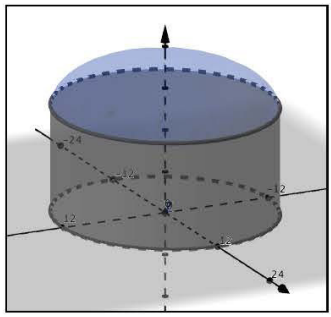


Figura 24.2.3.2

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{12}\int_0^{\sqrt{169-r^2}}1.r.dzdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{12}rz\Big|_0^{\sqrt{169-r^2}}=\int_0^{2\pi}\int_0^{12}r\sqrt{169-r^2}dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-(169-r^2)^{3/2}}{3}\right)\Big|_0^{12}d\theta=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\frac{(169-12^2)^{3/2}}{3}}_{125/3}\right)+\left(\underbrace{\frac{(169-0^2)^{3/2}}{3}}_{2197/3}\right)\Big|_0^{12}d\theta\Rightarrow\boxed{V=\frac{4144\pi}{3}\,u.v}.$$

24.2.4. Integrais triplas com coordenadas esféricas

O sistema de coordenadas esféricas consiste em um ponto P do espaço representado por $(\rho, \theta, \emptyset)$, em que $\rho = |OP|$, θ é o mesmo ângulo das coordenadas cilíndricas e $\emptyset$ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP. Ver a figura 24.2.4.1.

Para converter uma integral tripla que está em coordenadas retangulares em coordenadas esféricas, utilizamos:

$$x = \rho.sen\emptyset.\cos\theta$$
$$y = \rho.sen\emptyset.sen\theta$$
$$z = \rho.cos\emptyset$$
$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \emptyset \le \pi$$

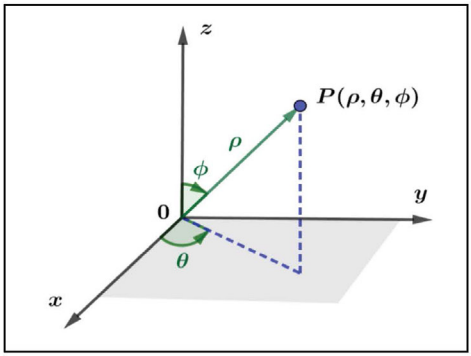


Figura 24.2.4.1

O fator de correção para essa transformação (jacobiano), conforme definição 24.2.3.1 é:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{d\rho} & \frac{dx}{d\theta} & \frac{dx}{d\emptyset} \\ \frac{dy}{d\rho} & \frac{dy}{d\theta} & \frac{dy}{d\emptyset} \\ \frac{dz}{d\rho} & \frac{dz}{d\theta} & \frac{dz}{d\emptyset} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sen\emptyset.\cos\theta & -\rho.sen\emptyset.sen\theta & \rho.cos\emptyset.\cos\theta \\ sen\emptyset.sen\theta & \rho.sen\emptyset.\cos\theta & \rho.cos\emptyset.sen\theta \\ cos\emptyset & 0 & -\rho.sen\emptyset \end{vmatrix} = \rho^2.sen\emptyset.$$

Assim, ao aplicar as coordenadas esféricas utilizamos a seguinte integral tripla:

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho.sen\emptyset.\cos\theta, \rho.sen\emptyset.sen\theta, \rho.cos\emptyset).\rho^2.sen\emptyset.d\rho d\theta d\emptyset$$

Exemplo: Calcule a integral tripla:

$$\iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$$

Onde $B = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \le 1\}$.

Solução:

A solução de

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (\sqrt{x^2+y^2+z^2})dzdydx,$$

é extremamente complicada. Vamos utilizar as coordenadas esféricas.

Como o sólido de integração é uma esfera de raio 1 centrada na origem, temos: $B = \{(\rho,\theta,\emptyset)|0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \emptyset \le \pi\}$, conforme figura 24.2.4.2. Substituindo os dados na integral de conversão, obtemos:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(\rho)\rho^2.sen\emptyset.d\rho d\theta d\emptyset$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\rho^3.sen\emptyset.d\rho d\theta d\emptyset =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}.sen\emptyset.d\theta d\emptyset = \int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}.sen\emptyset.d\emptyset =$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}.cos\emptyset.\right)\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

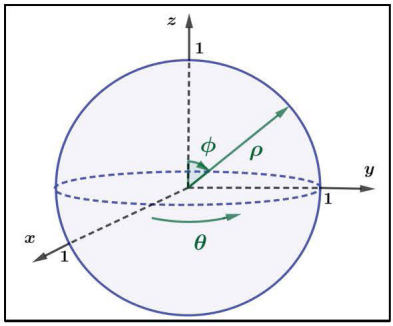


Figura 24.2.4.2

2º exemplo: Use as coordenadas esféricas para calcular a integral tripla

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}\left(z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dzdydx$$

Solução: O sólido de integração é claramente uma esfera de raio 3. Assim, $B = \{(\rho,\theta,\emptyset)|0 \le \rho \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \emptyset \le \pi\}$, substituindo na integral de conversão, temos:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}(\rho.cos\emptyset)^2.\rho.\rho^2.sen\emptyset.d\rho d\theta d\emptyset$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{3}\rho^5.cos^2\emptyset.sen\emptyset.d\rho d\theta d\emptyset = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{243}{2}.cos^2\emptyset.sen\emptyset.d\theta d\emptyset =$$

$$\int_0^{\pi}243\pi.cos^2\emptyset.sen\emptyset.d\emptyset = (-81\pi.cos^3\emptyset.)\Big]_0^{\pi} = 81\pi - (-81\pi) = 162\pi.$$

3º exemplo: Use as coordenadas esféricas para calcular o volume do sólido que fica abaixo da esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$ e acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução: Primeiro devemos observar que a esfera não está centrada na origem. Assim, vamos calcular o centro e o raio dessa esfera.

$$x^2+y^2+z^2-z = 0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+z^2-2z+1 = 0+1 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1 \Rightarrow \boxed{C(0,0,1)}\ e\ \boxed{r=1}.$$

A esfera e o cone estão na figura 24.2.4.3.

O ângulo $\emptyset$ varia entre eixo z e a superfície lateral do cone e essa, por sua vez, varia de acordo com $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Assim, ao substituir os dados das coordenadas esféricas nessa expressão obtemos:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho.cos\emptyset = \sqrt{(\rho.sen\emptyset.\cos\theta)^2+(\rho.sen\emptyset.sen\theta)^2} \Rightarrow$$

$$\rho.cos\emptyset = \sqrt{\rho^2.sen^2\emptyset.\cos^2\theta + \rho^2.sen^2\emptyset.sen^2\theta} \Rightarrow \rho.cos\emptyset = \rho.sen\emptyset \Rightarrow \emptyset = \frac{\pi}{4}.$$

Quanto ao raio ρ, sua variação máxima se dá ao longo da superfície da esfera e ao substituir os dados das coordenadas esféricas na equação da esfera, obtemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z \Rightarrow (\rho.sen\emptyset.\cos\theta)^2 + (\rho.sen\emptyset.sen\theta)^2 + (\rho.cos\emptyset)^2 = 2.\rho.cos\emptyset \Rightarrow$$

$$\rho^2.sen^2\emptyset.\cos^2\theta + \rho^2.sen^2\emptyset.sen^2\theta + \rho^2.cos^2\emptyset = 2.\rho.cos\emptyset \Rightarrow$$

$$\rho^2 = 2.\rho.cos\emptyset \Rightarrow \begin{cases}\rho = 0\\ \rho = 2cos\emptyset\end{cases} \Rightarrow 0 \le \rho \le 2cos\emptyset.$$

Como é imediato que o ângulo θ varia de 0 à 2π, concluímos que $B = \{(\rho,\theta,\emptyset)|0 \le \rho \le 2cos\emptyset, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \emptyset \le \frac{\pi}{4}\}$, conforme a figura 24.2.4.4.

Substituindo esses dados na integral de conversão, dispomos de:

$$V = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2cos\emptyset} 1.\rho^2.sen\emptyset.d\rho d\theta d\emptyset$$

$$V = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^{2cos\emptyset} sen\emptyset.d\theta d\emptyset = \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\frac{8.cos^3\emptyset.sen\emptyset}{3}d\theta d\emptyset \Rightarrow$$

$$V = \int_0^{\pi/4}\frac{8.cos^3\emptyset.sen\emptyset}{3}.\theta\Big]_0^{2\pi}d\emptyset = \int_0^{\pi/4}\frac{16\pi.cos^3\emptyset.sen\emptyset}{3}d\emptyset \Rightarrow$$

$$V = \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/4} cos^3\emptyset.sen\emptyset\, d\emptyset = \frac{16\pi}{3}\left(-\frac{cos^4\emptyset}{4}\right)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{-16\pi}{12}.\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - (1)^4\right) \Rightarrow$$

$$V = \frac{-16\pi}{12}.\left(\frac{4}{16} - 1\right) = \frac{-16\pi}{12}.\left(\frac{-12}{16}\right) = \pi \Rightarrow \boxed{V = \pi\, u.v}.$$

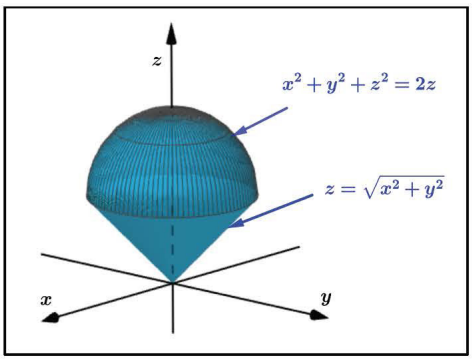


Figura 24.2.4.3

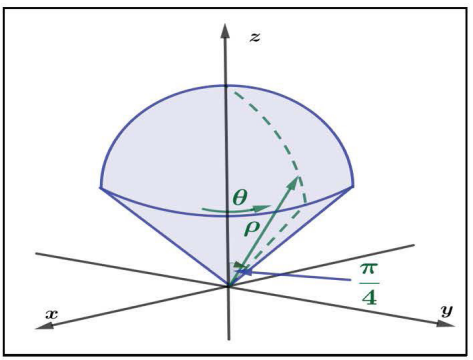


Figura 24.2.4.4

Alternativamente, poderíamos ter utilizado a integral dupla (em coordenadas polares) que está a seguir, para calcular o volume do sólido do exemplo anterior:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 + \sqrt{1 - r^2} - r\right) r dr d\theta.$$

Verifique a veracidade dos dados dessa integral dupla e calcule-a.

EXERCÍCIOS 24.6

1) Calcule as integrais triplas utilizando as coordenadas cilíndricas.

$a) \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{1}(x^2+y^2)dzdydx$

$b) \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}(xz)dzdydx$

$c) \int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dzdydx$

$d) \int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}(xy)dzdydx$

2) Calcule a integral tripla $\iiint_B (x+y)\,dV$, onde B é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

3) Calcule a integral tripla $\iiint_B (y)\,dV$, onde B é o sólido limitado superiormente pelo plano $z = x$, inferiormente pelo plano $z = 0$ e lateralmente pelos cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

4) Calcule as integrais triplas utilizando as coordenadas esféricas.

$a) \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)^{3/2}dzdydx$

$b) \int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}xydzdydx$

5) Use as coordenas esféricas para calcular o volume de um sólido limitado superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6) Para fins de cálculo de volume do sólido limitado superiormente pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$:

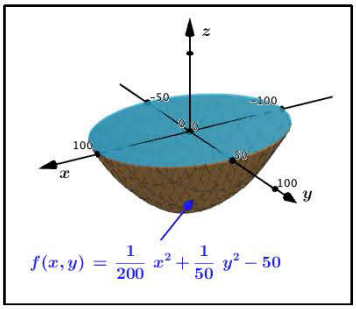
a) Indique a integral tripla utilizando as coordenadas cilíndricas.

b) Indique a integral tripla utilizando as coordenadas esféricas.

c) Calcule o volume utilizando a integral que considerar conveniente.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 24.7

1) Para fins de execução de um projeto de irrigação, precisou-se calcular o volume de água de um pequeno açude. Segundo estudos de modelagem matemática em torno desse açude, a função que melhor se aproximou de sua superfície, na escala em metros, foi a função $f(x,y)=\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{50}-50$ (conforme a figura). Qual o volume de água desse açude (em m³), aproximadamente?



2)Um estudo da viabilidade da produção e padronização de biofilmes de kefir e suas interações com extratos de açaí e de gérmen de soja, objetivou padronizar a produção de biofilmes de kefir em solução de açúcar mascavo, açúcar branco e aferir suas interações com extrato de açaí e de gérmen de soja. Um dos parâmetros utilizados nessa pesquisa, foi a rugosidade média eficaz (RMS) dada pela equação:

$$RMS=\sqrt{\iint |z(x,y)|^2 dxdy}$$

Onde $z(x,y)$ é a função da altura da área.

Fonte: (OLIVEIRA, 2016)

Com base nessa equação e desconsiderando possíveis peculiaridades dos demais parâmetros, podemos afirmar que:

a) $z(x,y)$ é sempre positivo.

b) $\iint z(x,y)dxdy$ é sempre positivo.

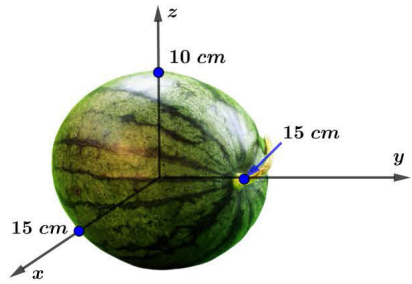
c) $\iint z(x,y)dxdy$ é sempre negativo.

d) RMS é sempre negativo.

e) RMS é sempre positivo.

3)Um aspersor agrícola distribui água em um padrão circular de 20m de raio. A vazão de água, em metros por hora, varia de acordo com a função $f(x)=e^{-2x}$, onde x é a distância, em metros, do aspersor. Qual a quantidade total de água fornecida, por hora, em um raio r $(r \leq 20m)$ a partir do centro do aspersor?

4)Ao coincidir o centro do plano tridimensional com o centro de uma melancia, encontrou-se as medidas que estão na figura seguir. Com base nesses dados, calcule a equação de um elipsoide que melhor se aproxima ao formato dessa melancia e a partir dessa equação, utilize a integral dupla ou a integral tripla para calcular o seu volume.



5)O **valor médio** de uma função contínua $f(x,y)$ em um retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$ é dado por:

$$f_m = \frac{1}{\text{Área } R} \iint_R f(x,y)dA$$

Compare essa fórmula com o teorema 21.10.4.1 (TVMI).

Com base nessa fórmula, suponha que a temperatura (em ℃) de uma hortaliça, posta em uma estufa, varia em um ponto (x,y) conforme a função $T(x,y) = 5 - x^2 - y^2$. Se a escala de x e y está em centímetros, qual a temperatura média dessa hortaliça na porção retangular $R = [0,1] \times [0,2]$?

CAPÍTULO

25

ÁLGEBRA LINEAR

ÁLGEBRA LINEAR

25. ÁLGEBRA LINEAR

Nas unidades anteriores, utilizamos sempre representações algébricas e geométricas em $\mathbb{R}^n$, tanto para $n = 2$ (objetos com duas dimensões), como vetores, retas, circunferências, funções, etc., como também para $n = 3$ (objetos com três dimensões), como vetores no espaço, planos, esferas, superfícies, etc. Nesta unidade, expandiremos nossos estudos aos espaços $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$, porém nos concentraremos apenas na representação algébrica, uma vez que a representação geométrica não é aplicável nesse contexto.

25.1. Corpos

Definição 25.1.1: Um conjunto A será chamado de corpo se for munido de operações de adição (+) e multiplicação (.), em que valem as seguintes propriedades ($\forall\, u, v, w, 0 \in A$):

1) Em relação a adição:

AD1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ $\quad (propriedade\ associativa)$;

AD2) $u + v = v + u$ $\quad (propriedade\ comutativa)$;

AD3) $\exists\, 0 \in A \mid u + 0 = u$ $\quad (existência\ de\ elemento\ neutro)$;

AD4) $\exists\, (-u) \in A \mid u + (-u) = 0$ $\quad (existência\ de\ elemento\ oposto)$.

2) Em relação a multiplicação:

MU1) $u.(v.u) = (u.v).w$ $\ (propriedade\ associativa)$;

MU2) $u.v = v.u$ $\ (propriedade\ comutativa)$;

MU3) $\exists\, \mathbf{1} \in A \mid \mathbf{1}.u = u$ $\quad (existência\ de\ elemento\ neutro)$;

MU4) $\forall\, u \in A - \{0\}, \exists\, u^{-1} \mid u.u^{-1} = 1$ $\ (existência\ de\ inverso\ multiplicativo)$;

MU5) $u.(v + w) = u.v + u.w$ $\ (propriedade\ distributiva\ com\ relação\ a\ adição)$.

Analisando os conjuntos numéricos que conhecemos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, são corpos[25] somente os conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, por exemplo, falham as propriedades AD3 e AD4, entre outras.

---

[25] Existem outros conjuntos, sem ser os numéricos já conhecidos, que podem ser corpos.

25.2. Espaços vetoriais

Definição 25.2.1: Um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{R}$ de escalares, é um conjunto não vazio sobre o qual estão definidas as operações de soma de dois elementos desse conjunto e de multiplicação de um escalar (real) por um elemento desse conjunto, conforme a seguir:

- Axioma (1): $\forall\, u, v \in V, u + v \in V$;
- Axioma (2): $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in V, \alpha u \in V$.

E além disso, devem valer as seguintes propriedades:

1) Em relação a adição ($\forall\, u, v, w, \mathbf{0} \in V$):

A1) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *(propriedade associativa da adição)*;

A2) $u + v = v + u$ *(propriedade comutativa da adição)*;

A3) $\exists\, \mathbf{0} \in V \mid u + \mathbf{0} = u$ *(existência de elemento neutro da adição)*;

A4) $\exists\, (-u) \in V \mid u + (-u) = \mathbf{0}$ *(existência de elemento oposto da adição)*.

2) Em relação a multiplicação por escalar (para $\forall\, u, v \in V$ e $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

M1) $\alpha.(\beta.u) = (\alpha.\beta).u$ *(propriedade associativa da multiplicação)*;

M2) $(\alpha + \beta).u = \alpha.u + \beta.u$ *(propriedade distributiva de $u \in V$)*;

M3) $\alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$ *(propriedade distributiva de escalar $\alpha \in \mathbb{R}$)*;

M4) $1.u = u$ *(elemento neutro escalar da multiplicação)*.

A definição anterior nos diz que, se a soma de dois elementos quaisquer de um conjunto resulta em um elemento pertencente a esse conjunto e se o produto de um número real por qualquer elemento desse conjunto, também resulta em um elemento pertencente a esse conjunto, então esse conjunto é um espaço vetorial, desde que, além disso, estejam satisfeitas todas as propriedades anteriores (A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3 e M4).

1º exemplo (O espaço vetorial nulo): Seja V um conjunto que consiste em um único elemento, denotado de $\mathbf{0}$ e definido por:

- $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$;
- $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$).

Esse conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, pois os dois axiomas (1 e 2) já estão satisfeitos ou definidos (não há o que provar), e além do mais, todas as propriedades podem ser facilmente comprovadas. Faremos a demonstração das propriedades A1 e M4 e as demais ficarão como exercício.

$$u + (v + w) = 0 + \underbrace{(0 + 0)}_{\text{Pela definição é 0.}} = 0 + 0 = 0.$$

$$(u + v) + w = \underbrace{(0 + 0)}_{\text{Pela definição é 0.}} + 0 = 0 + 0 = 0.$$

Mesmo resultado, portanto, satisfaz a propriedade A1.

$$1.u = u \Rightarrow \underbrace{1.0}_{\text{Pela definição é 0}} = 0.$$

O escalar 1 é elemento neutro, portanto, satisfeita a propriedade M4.

2º exemplo: Os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, uma vez que os axiomas e todas as propriedades da definição são válidas para vetores de $\mathbb{R}^n$.

Com efeito, o conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ com $n \in \mathbb{N}$, tem suas operações (usuais e já conhecidas) definidas por:

- (1) $u + v =$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$;

- $(2)\alpha v = \alpha.(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \dots, \alpha x_n) \in \mathbb{R}^n$.

E todas as propriedades (A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3 e M4) já são também conhecidas e comprovadamente válidas nos estudos de vetores. Logo, os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ... , $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$.

SAIBA MAIS!

Um conjunto pode ser um espaço vetorial sobre qualquer corpo, como o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, por exemplo. No entanto, neste curso, adotaremos apenas o corpo $\mathbb{R}$, o que significa que os escalares utilizados serão sempre números reais, e quando dissermos que um determinado conjunto é ou não espaço vetorial, estará subentendido que é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

3º exemplo (O espaço vetorial de matrizes 2x2): O conjunto V de todas as matrizes 2x2 com elementos reais e com as operações usuais de adição e multiplicação é um espaço vetorial real, pois:

$$(1)\ \boldsymbol{u + v} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{vmatrix} \in V.$$

$$(2)\ \boldsymbol{\alpha u} = \alpha. \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha.u_{11} & \alpha.u_{12} \\ \alpha.u_{21} & \alpha.u_{22} \end{vmatrix} \in V.$$

Além disso todas as propriedades anteriores são válidas. Demonstraremos as propriedades A2 e M3 e as demais ficarão como exercício.

$$\boldsymbol{u + v} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{v + u}.$$

$$\boldsymbol{\alpha.(u + v)} = \alpha. \begin{vmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha.(u_{11} + v_{11}) & \alpha.(u_{12} + v_{12}) \\ \alpha.(u_{21} + v_{21}) & \alpha.(u_{22} + v_{22}) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (\alpha.u_{11} + \alpha.v_{11}) & (\alpha.u_{12} + \alpha.v_{12}) \\ (\alpha.u_{21} + \alpha.v_{21}) & (\alpha.u_{22} + \alpha.v_{22}) \end{vmatrix} = \alpha. \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \alpha. \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha.u + \alpha.v}.$$

É provável que o leitor tenha percebido que o conjunto V de matrizes 2x2 com elementos reais, é um caso particular de um caso mais geral de um conjunto M de

todas as matrizes de qualquer ordem, pois

- (1) $(A + B) \in M$;
- (2) $\alpha . A \in M (\text{com } \alpha \in \mathbb{R})$.

E além disso, todas as propriedades são também válidas (verifique!). Portanto, o conjunto M de todas as matrizes de qualquer ordem (com coeficientes reais), formam um espaço vetorial.

4º exemplo: Verifique se conjunto V em $\mathbb{R}^2$ cujas operações são definidos por:

- $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1)$;
- $\boldsymbol{\alpha} v = \boldsymbol{\alpha} . (x_1, y_1) = (\boldsymbol{\alpha} x_1, \boldsymbol{\alpha} y_1)$.

É um espaço vetorial.

Solução: **Não** é um espaço vetorial, pois falha a propriedade A2 (da comutatividade). Veja:

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1)$.

$v + u = (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = (x_2 + x_1, y_2)$.

$(x_1 + x_2, y_1) \neq (x_2 + x_1, y_2)$

5º exemplo: Verifique se o conjunto V de elementos reais positivos tais que:

- $u + v = u . v$;
- $\boldsymbol{\alpha} v = v^{\alpha}$ (com $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$).

É um espaço vetorial.

Solução:

A1) $\boldsymbol{u + (v + w) = (u + v) + w}$;

$\boldsymbol{u + (v + w) = u . \underbrace{(v + w)}_{v.w} = \underbrace{u . v}_{(u+v)} . w = (u + v) + w}$.

A2) $\boldsymbol{u + v = v + u \Rightarrow}$

$\boldsymbol{u + v = u . v = v . u = v + u}$.

A3) $\exists \, \mathbf{0} \in V \mid u + \mathbf{0} = u$;

$\boldsymbol{u + 1 = u . 1 = u}$.

O elemento neutro da adição nesse espaço é o objeto 1 (ou seja, **0=1**).

A4) $\exists \, (-u) \in V \mid u + (-u) = \mathbf{0}$;

O vetor oposto -u é o vetor $1/u$, pois

$u + \frac{1}{u} = u . \frac{1}{u} = 1 = \mathbf{0}$.

M1) $\alpha . (\beta . u) = (\alpha . \beta) . u$;

$\boldsymbol{\alpha(\beta u) = (\beta u)^{\alpha} = (u^{\beta})^{\alpha} = u^{\beta . \alpha} = u^{\alpha . \beta} = (u^{\alpha})^{\beta} = \beta . u^{\alpha} = \beta . \alpha . u = (\alpha . \beta) . u}$.

M3) $\alpha . (u + v) = \alpha . u + \alpha . v$;

$\boldsymbol{(u + v) . \alpha = (u . v) . \alpha = (u . v)^{\alpha} = u^{\alpha} . v^{\alpha} = u^{\alpha} + v^{\alpha} = \alpha . u + \alpha . v = u . \alpha + v . \alpha}$.

Todas as demais propriedades são também satisfeitas (e as demonstrações ficam a cargo do leitor). Portanto, o conjunto V é um espaço vetorial.

Teorema 25.2.1: Se V é um espaço vetorial, u elemento de V e α um escalar ($\alpha \in \mathbb{R}$), então:

(a) $0.\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$;

(b) $(-1).\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$;

(c) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

SAIBA MAIS!

Utilizou-se $\mathbf{0}$ *(em negrito) como um elemento de* V *para diferenciar do* 0 *(sem negrito) escalar.*

Demonstração:

(a) $0.\boldsymbol{u} = (0+0).\boldsymbol{u}$.

$0.\boldsymbol{u} = 0.\boldsymbol{u} + 0.\boldsymbol{u}$ *(propriedade M2)*.

Pela propriedade A4 existe o objeto $-0.\boldsymbol{u}$, somando-o a ambos os membros, obtemos

$0.\boldsymbol{u} + (-0.\boldsymbol{u}) = 0.\boldsymbol{u} + 0.\boldsymbol{u} + (-0.\boldsymbol{u})$

$\underbrace{0.\boldsymbol{u} + (-0.\boldsymbol{u})}_{\mathbf{0}} = 0.\boldsymbol{u} + \underbrace{\mathbf{0}.\boldsymbol{u} + (-0.\boldsymbol{u})}_{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{0} = \underbrace{0.\boldsymbol{u} + \mathbf{0}}_{=0.\boldsymbol{u}\ por\ A3} \Rightarrow \boxed{0.\boldsymbol{u} = \mathbf{0}}$.

(b) $(-1).\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$

$(-\mathbf{1}).\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = (-\mathbf{1}).\boldsymbol{u} + \underbrace{\mathbf{1}.\boldsymbol{u}}_{M4} = \underbrace{(-1+1).\boldsymbol{u}}_{M2} = \underbrace{0.\boldsymbol{u} = \mathbf{0}}_{Por\ (a)}$

$(-\mathbf{1}).\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \mathbf{0} \Rightarrow$ *Por A4* $(-\mathbf{1}).\boldsymbol{u}$ *deve ser oposto de* $\boldsymbol{u}$, *logo:* $\boxed{(-\mathbf{1})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}}$.

(c) $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Sabemos pela propriedade A4 que

$\alpha.\boldsymbol{u} + (-\alpha\boldsymbol{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha.\underbrace{(\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}))}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$.

EXERCÍCIOS 25.1

1) Explique por que os conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{I}$ não são corpos. Quais propriedades falham?

2) Verifique, em cada caso, se o conjunto é um espaço vetorial.

a) Seja um conjunto em $\mathbb{R}^2$ cujas operações são definidas por:

- $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;
- $\alpha v = \alpha.(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

b) Seja um conjunto em $\mathbb{R}^2$ cujas operações são definidas por:

- $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- $\alpha v = \alpha.(x_1, y_1) = (\alpha x_1, 0)$.

c) Seja um conjunto em $\mathbb{R}^2$ cujas operações são definidas por:

- $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$;
- $\alpha v = \alpha.(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$.

d) Seja um conjunto de funções não vazio A em $\mathbb{R}$, cujas operações são definidas como:

- $(+g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in$ A;
- $(\alpha f)(x) = \alpha . f(x)$, para todo $x \in$ A.

3) O conjunto formado pelas imagens P de todos os polinômios com coeficientes reais, forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

4) O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ com as operações usuais padrão, forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

5) O conjunto de todos os pares em $\mathbb{R}^2$ na forma (x,y) com $x \geq 0$ com as mesmas operações padrão, forma um espaço vetorial?

6) O conjunto de todos os pares em $\mathbb{R}^2$ na forma $(0,y)$ com as mesmas operações padrão, forma um espaço vetorial?

7) Prove o seguinte teorema: "sejam V um espaço vetorial, u elemento de V e α um escalar ($\alpha \in \mathbb{R}$), se $\alpha \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, então $\alpha = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$."

8) Demonstre a **lei do cancelamento**: "sejam V um espaço vetorial de elementos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, se $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, então $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$."

25.3. Subespaço vetorial

Vimos na seção anterior que um conjunto é um espaço vetorial quando estão satisfeitos os axiomas (1) e (2) e as propriedades. Nesta seção, verificaremos se um subconjunto desse espaço vetorial é também um espaço vetorial, ao qual denominamos de **subespaço** vetorial.

Teorema 25.3.1: Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. Dizemos que S é um subespaço vetorial de V se, e somente se, S for um espaço vetorial fechado[26] com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V. Em outras palavras, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

- Axioma (1): $\forall\, u, v \in S, (u + v) \in S$;
- Axioma (2): $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow \alpha . u \in S$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se o subconjunto (não vazio) S é um subespaço vetorial de V, então S é também um espaço vetorial e portanto, estão satisfeitos os axiomas (1) e (2).

($\Leftarrow$) Por outro lado, considere um subconjunto não vazio S qualquer em que os axiomas (1) e (2) são plenamente satisfeitos. Tomemos um elemento $u \in S$ arbitrário (podemos, uma vez que é não vazio) e $\alpha \in \mathbb{R}$. Para $\alpha = 0$, no axioma (2),

[26] Dizemos que um conjunto é fechado com uma determinação operação, quando o elemento resultante dessa operação entre dois objetos desse conjunto, pertence também a esse conjunto.

temos: $0.u = \mathbf{0} \in S$ (conforme teorema 25.2.1). Utilizando o mesmo axioma (2) para $\alpha = -1$, temos: $-1.u = -u \in S$ (ainda conforme teorema 25.2.1). Substituindo no axioma (1), temos: $u + (-u) = \mathbf{0}$. O que comprova, respectivamente, que o elemento neutro, e consequentemente, o elemento oposto de V, pertencem a S.

Como as demais propriedades do espaço vetorial são estabelecidas sem precisar verificar a existência de elementos, essas são automaticamente satisfeitas, ou como costumamos dizer, são "herdadas" de V.

Além de comprovar o teorema, a demonstração acima deixa claro que para um subconjunto S ser um subespaço vetorial de V, é necessário que $\mathbf{0} \in S$. Nesse entendimento, podemos reescrever o teorema 25.3.1 adicionando essa condição.

Corolário 25.3.1: Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. Dizemos que S é um subespaço vetorial de V, se:

- $\mathbf{0} \in S$;
- Axioma (1): $\forall\, u, v \in S, (u + v) \in S$;
- Axioma (2): $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, u \in S \Rightarrow \alpha.u \in S$.

Os axiomas (1) e (2) podem ainda ser simplificados por um único axioma (se preferir), segundo o seguinte corolário.

Corolário 25.3.2: Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V. Dizemos que S é um subespaço vetorial de V, se:

- $\forall\, u, v \in S, (u + \alpha.v) \in S$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$).

A demonstração é simples e fica a cargo do leitor.

Diante do teorema 25.3.1 (ou do corolário anterior), concluímos que nem todos os subconjuntos do espaço vetorial V são subespaços vetoriais de V. Apesar de "herdar" do espaço vetorial V as propriedades: A1, A2, M1, M2, M3 e M4 (e portanto, não precisam ser verificadas), o subconjunto S precisa ainda (em qualquer ordem):

- Conter o objeto nulo ($\mathbf{0} \in S$), mas isso não é suficiente.

- Ser fechado em relação as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V (essa condição é necessária e suficiente e nela está incluída a primeira condição).

1º exemplo (O subespaço zero): Seja $S = \{0\}$ um subconjunto do espaço vetorial V. Como S é fechado pela adição e pela multiplicação por escalar, conforme a seguir:

- $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in S$;
- $\alpha.\mathbf{0} = \mathbf{0} \in S$.

Então, S é um subespaço vetorial de V.

2º exemplo: No espaço vetorial das matrizes M, as matrizes triangulares, diagonais e identidade são subespaços vetoriais de M, pois

$$\forall\, A, B \in M, temos: (A + \alpha B) \in M.$$

Observe ainda que $\mathbf{0} \in M$.

3º exemplo: Verifique se a reta $r: y = 7x$ em $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Inicialmente, percebemos que $(0,0) \in r$, mas isso não é suficiente.

Assim, sejam: $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ pontos pertencentes à reta r, temos

$$u = (x_1, y_1) \Rightarrow y_1 = 7.x_1 \ (1).$$

$$v = (x_2, y_2) \Rightarrow y_2 = 7.x_2 \ (2).$$

$$u + \alpha v = (x_1, y_1) + \alpha.(x_2, y_2) = (x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) \ (3).$$

Substituindo (1) e (2) em (3), dispomos de

$$(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) = (x_1 + \alpha.x_2, 7.x_1 + \alpha.7.x_2) = \left(\overbrace{x_1 + \alpha.x_2}^{x}, \overbrace{7.(x_1 + \alpha.x_2)}^{y=7x}\right) \in r.$$

Assim, a reta r é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

4º exemplo: Verifique se reta $s: y = 7x + 1$ em $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Sejam: $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, temos

$$u = (x_1, y_1) \Rightarrow y_1 = 7.x_1 + 1 \ (1).$$

$$v = (x_2, y_2) \Rightarrow y_2 = 7.x_2 + 1 \ (2).$$

$$u + \alpha v = (x_1, y_1) + \alpha.(x_2, y_2) = (x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) \ (3).$$

Substituindo (1) e (2) em (3):

$$(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) = (x_1 + \alpha.x_2, 7.x_1 + 1 + \alpha.(7.x_2 + 1)) \Rightarrow$$

$$(x_1 + \alpha.x_2, 7.x_1 + 1 + \alpha.7.x_2 + \alpha) \neq (x_1 + \alpha.x_2, 7.(x_1 + \alpha.x_2) + 1) \notin S.$$

Assim, a reta s **não** é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

O leitor deve ter percebido que, para esse caso, bastava apenas perceber que $(0,0) \notin s$. A intenção do desenvolvimento anterior foi meramente didático, com o intuito de mostrar que as demonstrações dos axiomas (1) e (2) são suficientes.

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços: o conjunto $\{\mathbf{0}\}$, denominado de subespaço nulo e o próprio espaço vetorial V. Esses subespaços são denominados de **subespaços triviais** de V e os demais são denominados de **subespaços próprios** de V.

Por exemplo, os subespaços triviais de $\mathbb{R}^2$ são: {0,0} e o próprio $\mathbb{R}^2$. Os subespaços próprios de $\mathbb{R}^2$ são retas que passam pela origem, como a reta $r: y = 7x$ do 3º exemplo. No $\mathbb{R}^3$, os subespaços triviais é ele mesmo e o {0, 0, 0}, enquanto os subespaços próprios são as retas e os planos que passam pela origem. Um melhor entendimento sobre esse assunto será visto em subespaços gerados.

25.4. Combinação linear

Na Álgebra Linear, uma combinação linear de um conjunto de vetores é uma soma ponderada dos vetores, onde os pesos são escalares. A combinação linear de vetores é um novo vetor, conforme a definição a seguir.

Definição 25.4.1: Sejam $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ vetores do espaço vetorial V. Dizemos que um vetor u é uma combinação linear de $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ se existirem os números reais $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, tais que

$$u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n.$$

1º exemplo: O vetor $u = (1,4)$ é combinação linear dos vetores $u_1 = (-1,2)$ e $u_2 = (1,0)$, pois $u = 2.u_1 + 3u_2$.

2º exemplo: O vetor $u = (1,4)$ **não** é combinação linear dos vetores $u_1 = (-1,2)$ e $u_2 = (1,-2)$. Com efeito, observe que

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow (1,4) = \alpha_1.(-1,2) + \alpha_2(1,-2) \Rightarrow$$

$$(1,4) = (-\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 - 2\alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 4 \end{cases}.$$

O sistema não apresenta solução, pois o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ é nulo (conforme o teorema 14.2.2.1 – volume 1). Assim, não existem α_1 e α_2, tais que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$.

3º exemplo: Sendo os vetores $u = (1,3,1)$ e $v = (0,1,1)$, o vetor $w = (0,0,3)$ **não** é combinação linear desses vetores, pois

$$w = \alpha_1.u + \alpha_2 v \Rightarrow (0,0,3) = \alpha_1.(1,3,1) + \alpha_2(0,1,1) \Rightarrow$$

$$(0,0,3) = (\alpha_1, 3\alpha_1, \alpha_1) + (0, \alpha_2, \alpha_2) \Rightarrow (0,0,3) = (\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0. \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Para $\alpha_1 = 0$ na 1ª equação, temos $\alpha_2 = 0$ na 2ª equação. No entanto, $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ e assim $\underbrace{\alpha_1}_{0} + \underbrace{\alpha_2}_{0} = 3 \Rightarrow 0 = 3$ $(um\ absurdo!)$. Logo, o sistema não apresenta solução e não existem α_1 e α_2 reais tais que $w = \alpha_1.u + \alpha_2 v$.

Porém, outro vetor $w' = (1,2,0)$ é combinação linear dos vetores u e v, pois:

$$(1,2,0) = (\alpha_1, 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1 \text{ e } \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

E assim, podemos escrever: $\boxed{w' = 1.u - 1.v}$.

Um importante teorema que está a seguir, relaciona combinações lineares e subespaços vetoriais.

Teorema 25.4.1: Seja $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n\}$ um conjunto não vazio de vetores de um espaço vetorial V.

(a) O conjunto S de todas as combinações lineares possíveis de vetores em W é um subespaço de V.

(b) Qualquer outro subespaço que contenha todos os vetores de W contém o subespaço S, ou seja, S é o "menor" dos subespaços de V.

Demonstração:

(a) Considere $u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \ldots + \alpha_n w_n$ e $v = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \ldots + \beta_n w_n$ vetores de S, então:

$$u + \alpha.v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \cdots + \alpha_n w_n + \alpha.(\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 + \cdots + \beta_n w_n) =$$

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \cdots + \alpha_n w_n + \alpha.\beta_1 w_1 + \alpha.\beta_2 w_2 + \alpha.\beta_3 w_3 + \cdots + \alpha.\beta_n w_n =$$

$$\boxed{(\alpha_1 + \alpha.\beta_1).w_1 + (\alpha_2 + \alpha.\beta_2).w_2 + (\alpha_3 + \alpha.\beta_3).w_3 + \cdots + (\alpha_n + \alpha.\beta_n).w_n} \quad (1).$$

A expressão (1) acima demonstra que $u + \alpha.v$ é uma combinação linear de vetores de W, e portanto, pertencem a S.

(b) Seja X um subespaço qualquer de V que contém todos os vetores de W. Como S é fechado na adição e na multiplicação por escalar conforme a expressão (1), então $X \supset S$. E como qualquer vetor w_k pode ser escrito como combinação linear dos demais vetores:

$$w_k = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots 1.w_k + \ldots + \alpha_n w_n.$$

S é o "menor" dos subespaços de V.

A ideia menos abstrata que trata o teorema 25.4.1 e sua demonstração, pode ser entendida na seção a seguir sobre subespaços gerados.

25.5. Espaços e subespaços gerados

Um espaço gerado é um espaço vetorial que é gerado por um conjunto finito ou infinito de vetores. O espaço gerado é o menor espaço vetorial que contém todos os vetores geradores. Essa concepção está formalizada a seguir.

Definição 25.5.1: Sejam $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$ vetores do espaço vetorial V. Denominamos de $G(w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$, o conjunto de todas as combinações lineares de $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n$. Se $G(w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$ gera todo o espaço vetorial V, dizemos que é um **espaço gerado**. Se $G(w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n)$ gera apenas um subconjunto do espaço vetorial V, dizemos que é um **subespaço gerado**.

1º exemplo: Vamos encontrar o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $(1, 2)$.

Solução: Tomando (x, y) em $\mathbb{R}^2$ como uma combinação linear de $(1, 2)$, temos

$$(x, y) = \alpha.(1, 2) \Rightarrow (x, y) = (\alpha, 2\alpha) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = 2x}.$$

Assim, $G((1, 2)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$.

A partir desse exemplo, concluímos que a interpretação geométrica do subespaço gerado em $\mathbb{R}^2$ é a seguinte:

Sendo u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$ com representação inicial na origem, o conjunto gerador $G(u)$ será uma reta que passa pela origem, onde qualquer ponto sobre essa reta representa o ponto final do vetor múltiplo αu, gerado por um valor de α arbitrário. Ver figura 25.5.1.

2º exemplo: Vamos encontrar o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(1,2,1)$ e $(1,-1,3)$.

Solução: Tomando (x,y,z) em $\mathbb{R}^3$ como uma combinação linear de $(1,2,1)$ e $(1,-1,3)$, temos

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(1,-1,3) \Rightarrow (x,y,z) = (\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = y \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = z \end{cases} \Rightarrow \boxed{z - x = 2\alpha_2} \text{ e } \boxed{2z - y = 7\alpha_2} \Rightarrow z - x = \frac{2.(2z-y)}{7} \Rightarrow$$

$$7z - 7x = 4z - 2y \Rightarrow \boxed{3z - 7x + 2y = 0}.$$

Outra solução (utilizando o escalonamento):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = y \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = z \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{x (-1)} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = y \\ 2\alpha_2 = z - x \end{cases} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{x (-2)} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ -3\alpha_2 = y - 2x \\ 2\alpha_2 = z - x \end{cases} \begin{matrix} \\ \leftarrow \text{x (2/3)} \\ \\ \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ -3\alpha_2 = y - 2x \\ 0 = \dfrac{2.(y-2x)}{3} + z - x \end{cases} \Leftrightarrow \text{O sistema só possui solução se } \frac{2.(y-2x)}{3} + z - x = 0.$$

O que nos dá $2y - 4x + 3z - 3x = 0 \Rightarrow \boxed{-7x + 2y + 3z = 0}$ e desse modo:

$$G((1,2,1),(1,-1,3)) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -7x + 2y + 3z = 0\}.$$

A interpretação geométrica do subespaço gerado em $\mathbb{R}^3$ é a seguinte: Sendo u, v vetores não nulos de $\mathbb{R}^3$ com representação inicial na origem, **o conjunto gerador $G(u,v)$ é um plano que passa pela origem do espaço**, onde qualquer ponto sobre esse plano representa o ponto final de qualquer vetor gerado pela combinação linear $\alpha u + \beta v$ (com α e β arbitrários). Ver figura 25.5.2.

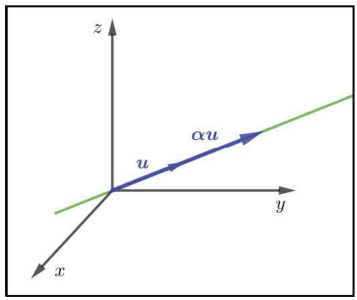


Figura 25.5.1

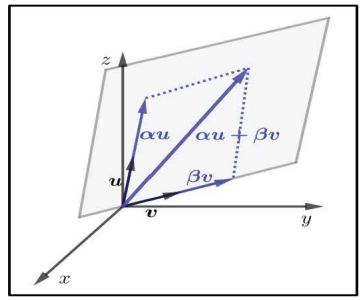


Figura 25.5.2

Contrariamente, a partir da expressão do conjunto gerador, podemos encontrar os vetores geradores de um subespaço vetorial. Para isso, basta atribuir valores arbitrários para alguma(s) incógnitas na expressão dada e encontrar o componente que falta do vetor.

Veja no exemplo anterior que $G(x,y,z) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -7x + 2y + 3z = 0\}$, e assim:

$$Para\ x = 3 \text{ e } y = 3, \text{em } 7x + 2y + 3z = 0, \text{temos } \boxed{z = 5} \Rightarrow (3,3,5).$$

$$Para\ x = 0 \text{ e } y = 3, \text{em } -7x + 2y + 3z = 0, \text{temos } \boxed{z = -2} \Rightarrow (0,3,-2).$$

Os vetores $(3,3,5)$ e $(0,3,-2)$, também geram o mesmo subespaço dos vetores $(1,2,1)$ e $(1,-1,3)$ do exemplo anterior, o que demonstra que os vetores geradores de um subespaço vetorial não é único.

Os vetores dos exemplos anteriores $\{(1,2)\}$ e $\{(1,2,1),(1,-1,3)\}$ geram apenas um subespaço específico de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Para que vetores gerem todo o espaço vetorial é preciso que qualquer vetor desse espaço possa ser escrito como combinação linear desses vetores.

Exemplo: Os vetores unitários canônicos $(1,0)$ e $(0,1)$ são vetores geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, pois qualquer vetor (a,b) pode ser escrito como combinação linear desses vetores. Veja que $(a,b) = a.(1,0) + b.(0,1)$.

2º exemplo: Os vetores unitários canônicos $(1,0,0),(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, uma vez que qualquer vetor (x,y,z) pode ser escrito como

$$(x,y,z) = x.(1,0,0) + y.(0,1,0) + z.(0,0,1).$$

3º exemplo: Os polinômios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ geram o espaço P_n, pois qualquer polinômio pode ser escrito utilizando combinação linear:

$$P_n = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots + a_n.x^n.$$

4º exemplo: Vamos verificar se os vetores $u = (1,-1,3)$, $v = (0,1,-1)$ e $w = (2,1,0)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Solução: Qualquer vetor $x = (a,b,c)$ precisa ser escrito como combinação linear dos vetores u, v e w. Nesse contexto,

$$(a,b,c) = \alpha_1.u + \alpha_2 v + \alpha_3 w \Rightarrow (a,b,c) = \alpha_1.(1,-1,3) + \alpha_2.(0,1,-1) + \alpha_3.(2,1,0) \Rightarrow$$

$$(a,b,c) = (\alpha_1, -\alpha_1, 3\alpha_1) + (0,\alpha_2,-\alpha_2) + (2\alpha_3,\alpha_3,0) \Rightarrow$$

$$(a,b,c) = (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 3\alpha_1 - \alpha_2 + 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = a \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = b. \\ 3\alpha_1 - \alpha_2 + 0 = c \end{cases}$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ é -3 (verifique!), o sistema possui solução determinada. O que significa que existem α_1, α_2 e α_3 reais tais que $(a,b,c) = \alpha_1.u + \alpha_2 v + \alpha_3 w$, provando que os vetores u, v e w geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

EXERCÍCIOS 25.2

1) Verifique, em cada caso, se o conjunto é um subespaço vetorial.

a) Um conjunto S em $\mathbb{R}^2$, definido por $S = \{(x,y)|x+y=0\}$;

b) Um conjunto S em $\mathbb{R}^2$, definido por $S = \{(x,y)|x-y=1\}$;

c) Um conjunto S em $\mathbb{R}^2$, definido por $S = \{(x,y)|x^2-y^2=0\}$;

d) Um conjunto S em $\mathbb{R}^3$, definido por $S = \{(x,y,z)|z=0\}$;

e) Um conjunto S em $\mathbb{R}^3$, definido por $S = \{(x,y,z)|z=x-2y\}$;

f) Um conjunto de matrizes M(3,3), definido por $S = \{[a_{ij}]|a_{ij}=0 \; se \; i \neq j\}$.

2) Verifique se os elementos apresentados na forma de cada item, é ou não um subespaço vetorial.

a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3|(x,0,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3|(x,x+z+1,z)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

c) $P = \{a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \cdots + a_n.x^n \,|a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ são coeficientes inteiros$\}$ em P_n;

d) $P = \{a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots + a_n.x^n \mid a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots + a_n = 0\}$ em P_n;

3) Um subconjunto de V que contém o objeto nulo é um subespaço vetorial de V?

4) No espaço vetorial das matrizes M de mesma ordem, as matrizes simétricas são subespaços vetoriais de M?

5) Verifique, em cada item, se as funções propostas são subespaços.

a) Todas as funções contínuas em $(-\infty,+\infty)$ são subespaços vetoriais de $f(-\infty,+\infty)$?

b) Todas as funções deriváveis em $(-\infty,+\infty)$ são subespaços vetoriais de $f(-\infty,+\infty)$?

c) Todas as funções contínuas $f(x)$ em $[a,b]$, tais que $\int_a^b f(x)dx = 0$, são subespaços vetoriais de $f[a,b]$?

6) Marque V ou F ao julgar se S_1 e S_2 são subespaços vetoriais de V.

a) ( ) $S_1 \cup S_2$ são subespaços vetoriais de V;

b) ( ) $S_1 \cap S_2$ são subespaços vetoriais de V;

c) ( ) $S_1 - S_2$ são subespaços vetoriais de V;

d) ( ) $V - S_2$ são subespaços vetoriais de V;

7) Encontre uma combinação linear (se existir) entre os vetores:

a) $u = (1,-5)$ e os vetores: $u_1 = (2,4)$ e $u_2 = (1,3)$;

b) $u = (2,4)$ e os vetores: $u_1 = (0,1)$ e $u_2 = (1,-1)$;

c) $u = (2,3,4)$ e os vetores: $u_1 = (0,1,-1)$, $u_2 = (1,1,0)$ e $u_3 = (1,0,0)$;

d) $u = (1,-3,2)$ e os vetores: $u_1 = (0,2,2)$, $u_2 = (-1,1,0)$ e $u_3 = (1,2,3)$.

8) Qual dos seguintes vetores é combinação linear de $u_1 = (-1,1)$?

a) $u = (1,2)$;

b) $u = (0,1)$;

c) $u = (-1,2)$;

d) $u = (-3,1)$;

e) $u = (2,-2)$.

9) Qual dos seguintes vetores é combinação linear de $u_1 = (0,-1,0)$ e $u_2 = (-1,1,0)$?

a) $u = (1,2,3)$;

b) $u = (0,1,1)$;

c) $u = (-1,2,0)$;

d) $u = (-3,1,1)$;

e) $u = (2,1,2)$.

10)Calcule o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ gerado pelo vetor $(-1,3)$. Qual a sua interpretação geométrica?

11)Calcule o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por $G = \{(1,-1,1),(1,1,0)\}$. Qual a sua interpretação geométrica?

12)Calcule dois outros vetores que geram o mesmo subespaço vetorial do item anterior.

13)Verifique se os vetores $u = (1,2)$ e $v = (3,4)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

14)Verifique se os vetores $u = (1,-1,1)$, $v = (0,0,-1)$ e $w = (1,1,3)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

15)Explique por que os vetores $u = (1,-1,1)$, $v = (0,0,-1)$ e $w = (1,-1,3)$ não geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

25.6. Dependência e independência linear

A dependência linear e independência linear são conceitos importantes em álgebra linear que se referem à relação entre vetores em um espaço vetorial.

Na seção anterior, vimos que um conjunto de vetores $G(w_1, w_2, w_3,..., w_n)$, geram um espaço vetorial V, se cada vetor de V puder ser escrito como combinação linear dos vetores $w_1, w_2, w_3,..., w_n$. Porém, a depender desses vetores, podemos ter um vetor de V expresso de maneiras diferentes ou de maneira única, utilizando combinações lineares de $w_1, w_2, w_3,..., w_n$.

Exemplo: O vetor $(3,-6) \in V$, pode ser escrito de duas (ou mais) formas utilizando os vetores $\{(-1,2),(-3,6)\}$. Veja:

$$(\mathbf{3},-\mathbf{6}) = \underbrace{3}_{\alpha_1}.(-1,2) + \underbrace{(-2)}_{\alpha_2}.(-3,6)$$

ou

$$(\mathbf{3},-\mathbf{6}) = \underbrace{-9}_{\alpha_1}.(-1,2) + \underbrace{2}_{\alpha_2}.(-3,6).$$

Porém, esse mesmo vetor $(3,-6)$, pode ser escrito de uma única maneira, se os vetores geradores forem $\{(-1,0),(0,1)\}$:

$$(\mathbf{3},-\mathbf{6}) = \underbrace{-3}_{\alpha_1}.(-1,0) + \underbrace{(-6)}_{\alpha_2}.(0,1).$$

Não existem outros valores além de $\alpha_1 = -3$ e $\alpha_2 = -6$ para que a sentença acima seja verdadeira.

Essa concepção de escrever (ou expressar) um vetor de V de forma única (ou não) está definida a seguir.

Definição 25.6.1: Se um vetor de V é expresso de forma única, utilizando combinações lineares de outros vetores $w_1, w_2, w_3,..., w_n$, dizemos que esses vetores $w_1, w_2, w_3,..., w_n$, são **linearmente independentes**. E contrariamente, **não** se escrevendo de forma única, dizemos que eles são **linearmente dependentes**.

Contudo, como saber se um conjunto de vetores são linearmente independentes ou linearmente dependentes?

O teorema a seguir nos fornece uma ferramenta útil nessa verificação.

Teorema 25.6.1: Sejam $u_1, u_2, u_3,..., u_n$ vetores do espaço vetorial V. Os vetores $u_1, u_2, u_3,..., u_n$ são **linearmente independentes (L.I)** se a equação

$$\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n = 0$$

é satisfeita somente para as soluções triviais, ou seja, se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_n = 0.$$

Caso, exista algum $\alpha_n \neq 0$, os vetores $u_1, u_2, u_3,..., u_n$ são **linearmente dependentes (L.D)**.

Demonstração:

Seja um vetor $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ do espaço vetorial V expresso de duas formas utilizando combinações lineares com os vetores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \in V$:

$$\theta_1.u_1 + \theta_2.u_2 + \theta_3.u_3 + \cdots + \theta_n.u_n = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

$$\beta_1.u_1 + \beta_2.u_2 + \beta_3.u_3 + \cdots + \beta_n.u_n = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos

$$\underbrace{(\theta_1 - \beta_1)}_{\alpha_1}.u_1 + \underbrace{(\theta_2 - \beta_2)}_{\alpha_2}.u_2 + \underbrace{(\theta_3 - \beta_3)}_{\alpha_3}.u_3 + \cdots + \underbrace{(\theta_n - \beta_n)}_{\alpha_n}.u_n = (0, 0, 0, \ldots, 0).$$

Se são escritos de forma única, então $\theta_1 = \beta_1$, $\theta_2 = \beta_2, \ldots, \theta_n = \beta_n$ o que implica em $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_n = 0$, caso contrário, existe algum $\theta_n \neq \beta_n$ resultando em $\alpha_n \neq 0$.

1º exemplo (o mesmo anterior): Vamos verificar se os vetores $u_1 = (-1, 2)$ e $u_2 = (-3, 6)$ são linearmente independentes ou dependentes.

Solução: Aplicando o teorema 25.6.1, temos

$$\alpha_1.(-1,2) + \alpha_2.(-3,6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 - 3.\alpha_2 = 0 \\ 2.\alpha_1 + 6.\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

A solução desse sistema linear homogêneo (ver subseção 14.2.3 - volume 3), está condicionada ao determinante da matriz dos coeficientes: $A = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$. Como $\det A = 0$, esse sistema possui outras soluções além da solução trivial e os vetores são linearmente dependentes (L.D).

2º exemplo (o mesmo 2º exemplo anterior): Vamos verificar se os vetores $u_1 = (-1, 0)$ e $u_2 = (0, 1)$ são linearmente independentes ou dependentes.

Solução:

$$\alpha_1.(-1,0) + \alpha_2.(0,1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 0.\alpha_2 = 0 \\ 0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

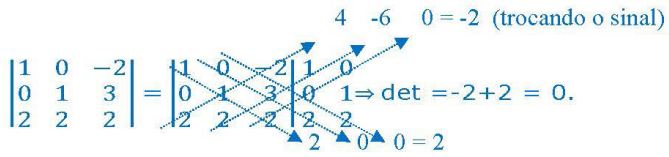
A solução desse sistema linear homogêneo está subordinada ao determinante da matriz dos coeficientes: $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$. Como $\det A = -1$, esse sistema possui somente a solução trivial e sendo assim, os vetores u_1 e u_2 são então linearmente independentes (L.I).

3º exemplo: Vamos verificar se os vetores $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ e $u_3 = (-2, 3, 2)$ são linearmente independentes ou dependentes.

Solução:

$$\alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(0,1,2) + \alpha_3(-2,3,2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1.\alpha_1 + 0.\alpha_2 - 2.\alpha_3 = 0 \\ 0.\alpha_1 + 1.\alpha_2 + 3.\alpha_3 = 0. \\ 2.\alpha_1 + 2.\alpha_2 + 2.\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Calculando o determinante de $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, encontramos:



Como detA = 0, esse sistema possui outras soluções além da solução trivial, portanto, os vetores são linearmente dependentes (L.D).

As soluções anteriores foram sempre condicionadas ao determinante de uma matriz quadrada A formada pelos vetores. Isso acontece, obviamente, quando temos n vetores em $\mathbb{R}^n$ (matriz quadrada $n \times n$). Essa constatação é ratificada pelo seguinte teorema.

Teorema 25.6.2: Seja a matriz A formada pelos vetores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ em $\mathbb{R}^n$, dispostos em linha (ou coluna), um a um. Os vetores $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ são linearmente independentes, se e somente se, detA ≠ 0 (ou de forma equivalente, se A é invertível).

Demonstração:

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ com n vetores cujos componentes são representados por a_{mn}, onde m é a posição do componente do vetor u_n e n o número do vetor u_n. Aplicando o teorema 25.6.1, temos que $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n = 0$, o que resulta em um sistema linear homogêneo da forma:

$$\begin{cases} a_{11}.\alpha_1 + a_{12}.\alpha_2 + a_{13}.\alpha_3 + \ldots + a_{1n}.\alpha_n = 0 \\ a_{21}.\alpha_1 + a_{22}.\alpha_2 + a_{23}.\alpha_3 + \ldots + a_{2n}.\alpha_n = 0 \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ \quad\quad\quad\quad \ldots \\ a_{n1}.\alpha_1 + a_{n2}.\alpha_2 + a_{n3}.\alpha_3 + \ldots + a_{nn}.\alpha_n = 0 \end{cases},$$

cuja solução depende da matriz A dos coeficientes formada pelos componentes dos vetores. Se detA ≠ 0 (conforme já vimos na subseção 14.2.3 - volume 3), o sistema apresenta apenas a solução trivial e os vetores são linearmente independentes, caso contrário, o sistema apresenta outras soluções além da trivial e, desse modo, os vetores são linearmente dependentes.

O termo "independente" ou "dependente" nos sugere uma relação de dependência (ou não) entre os vetores. O próximo teorema justifica o uso dessa terminologia.

Teorema 25.6.3: Um conjunto finito de dois ou mais vetores é:

(1) linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.

(2) linearmente independente se, e somente se, nenhum vetor pode ser escrito como uma combinação linear dos outros vetores.

Demonstração:

(1)⇒ Segundo o teorema 25.6.1, os vetores os vetores u_1, u_2, u_3,..., u_n são L.D, quando existir algum $\alpha_n \neq 0$, para qualquer n, na equação $\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n = 0$. Supondo que seja $\alpha_1 \neq 0$, então

$$\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n = 0 \Rightarrow$$
$$\alpha_1.u_1 = -\alpha_2.u_2 - \alpha_3.u_3 - \cdots - \alpha_n.u_n \Rightarrow$$
$$u_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right).u_2 + \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right).u_3 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right).u_n.$$

Demonstra que u_1 é uma combinação linear dos outros vetores.

(1)⇐ Por outro lado, sejam u_1, u_2,..., u_{n-2}, u_{n-1} vetores, agora, linearmente independentes do espaço vetorial V. Nesse caso, um vetor $u \in V$ pode ser expresso de maneira única, $u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \cdots + \alpha_{n-2}.u_{n-2} + \alpha_{n-1}.u_{n-1}$. Se outro vetor $u_n = \beta.u_{n-1} + \theta.u_{n-2}$, combinação linear de u_{n-1} e u_{n-2} for adicionado à verificação, temos

$$u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \cdots + \alpha_{n-2}.u_{n-2} + \alpha_{n-1}.u_{n-1} + \alpha_n.(\beta.u_{n-1} + \theta.u_{n-2})$$
$$u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \cdots + \alpha_{n-2}.u_{n-2} + \alpha_{n-1}.u_{n-1} + \alpha_n.\beta.u_{n-1} + \alpha_n.\theta.u_{n-2}$$
$$u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \cdots + (\alpha_{n-2} + \alpha_n.\theta).u_{n-2} + (\alpha_{n-1} + \alpha_n.\beta).u_{n-1}.$$

A última expressão demonstra que o vetor u pode ser expresso de forma não única, utilizando combinações lineares com vetores u_1, u_2,..., u_{n-2}, u_{n-1}. Portanto, esses vetores são linearmente dependentes.

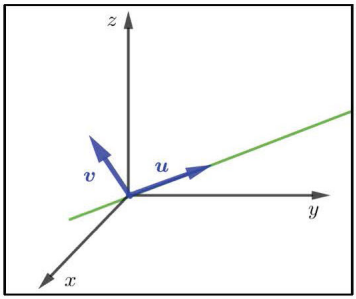
Como (2) é a contrapositiva de (1), encerramos a demonstração.

Analisemos um caso particular em que se tem n vetores em $\mathbb{R}^n$, ou seja, no caso em que se aplica o teorema 25.6.2 (matriz quadrada $n \times n$). Se há uma combinação linear entre os vetores, há uma combinação linear entre as colunas da matriz, o que segundo a 7ª propriedade dos determinantes (subseção 14.1.8 - volume 3), resulta em determinante nulo e consequentemente, em vetores linearmente dependentes.

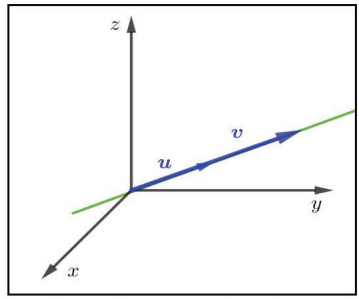
Como exemplo, o determinante da matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ formada pelos vetores do 3º exemplo anterior, é nulo, porque há uma combinação linear entre as colunas (ou os vetores). Perceba que a 3ª coluna é igual a 3 vezes a 2ª coluna, menos duas vezes a 1ª coluna ($u_3 = 3u_2 - 2u_1$).

No aspecto geométrico, podemos fazer interpretação do comportamento de vetores linearmente independentes e linearmente dependentes em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Dois vetores em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) são linearmente independentes se não pertencem a mesma reta, caso contrário, um seria múltiplo do outro e consequentemente, linearmente dependentes.

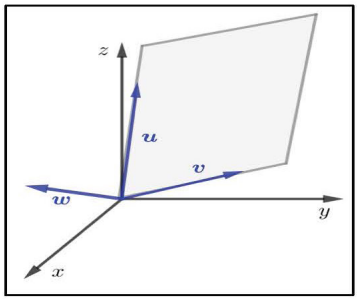


Vetores linearmente independentes

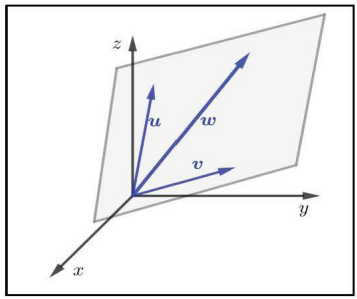


Vetores linearmente dependentes

Três vetores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes se não ficam num mesmo plano, caso contrário, um deles seria combinação linear dos outros dois e consequentemente, linearmente dependentes.



Vetores linearmente independentes



Vetores linearmente dependentes

Quando o sistema linear homogêneo resultante da equação do teorema 25.6.1 apresenta a matriz dos coeficientes não quadradas (uma vez que não existe determinante para matriz não quadrada), há dois casos a considerar.

1º caso: Quando se tem mais vetores que a dimensão n do espaço.

Para esse caso, aplicamos o seguinte teorema.

Teorema 25.6.4: Sejam os vetores $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_r$ em $\mathbb{R}^n$. Se $r > n$, então os vetores $u_1, u_2, u_3,\ldots, u_n$ são linearmente dependentes.

Demonstração: Como r resulta na quantidade de incógnitas e n na quantidade de equações, temos um sistema linear homogêneo com mais incógnitas do que equações e, segundo o teorema 14.2.3.2 (teorema do posto aplicado à sistemas homogêneos), esse sistema apresenta soluções não triviais, por consequência, os vetores são linearmente dependentes.

Comentário: Isso significa por exemplo, que 4 vetores quaisquer em $\mathbb{R}^3$(4>3), ou três vetores em $\mathbb{R}^2$ (3>2), são sempre linearmente dependentes.

2º caso: Quando se tem menos vetores que a dimensão n do espaço.

Neste caso, pode ocorrer dos vetores serem linearmente independentes ou dependentes, sendo necessário, portanto, analisar a solução do sistema linear

homogêneo do teorema 25.6.1.

Exemplo: Determine se os vetores $u_1 = (2,4,2)$ e $u_2 = (-3,-6,-3)$ em $\mathbb{R}^3$, são L.I ou L.D.

Solução: $\alpha_1.(2,4,2) + \alpha_2.(-3,-6,-3) = 0 \Rightarrow$

$$(2\alpha_1, 4\alpha_1, 2\alpha_1) + (-3\alpha_2, -6\alpha_2, -3\alpha_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0. \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

As três equações são equivalentes. Utilizando a primeira equação, temos

$$2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 3\alpha_2 \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = (3\alpha_2)/2}.$$

Como existem outras solução além da trivial, os vetores são L.D.

2º exemplo: Verifique se os vetores $u_1 = (-1,2,4,-4)$, $u_2 = (0,-1,2,-2)$ e $u_3 = (1,1,1,-1)$ em $\mathbb{R}^4$, são L.I ou L.D.

Solução:

$\alpha_1.(-1,2,4,-4) + \alpha_2.(0,-1,2,-2) + \alpha_3.(1,1,1,-1) = 0 \Rightarrow$

$(-\alpha_1, 2\alpha_1, 4\alpha_1, -4\alpha_1) + (0,-\alpha_2, 2\alpha_2, -2\alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3) = 0 \Rightarrow$

$$(-\alpha_1, 2\alpha_1, 4\alpha_1, -4\alpha_1) + (0,-\alpha_2, 2\alpha_2, -2\alpha_2) + (\alpha_3, \alpha_3, \alpha_3, -\alpha_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Como a 3ª equação e 4ª equação são equivalentes, descartamos a 4ª equação. Da 1ª equação, temos: $\alpha_1 = \alpha_3$. Substituindo essa informação na 2ª e na 3ª equação, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_1 = 0}.$$

Como a solução existente é somente a trivial, os vetores são L.I.

3º exemplo (Independência linear de polinômios): Verifique se o conjunto dado por $\{x^2, 1+x-x^2, 1+3x-x^2\}$ é linearmente independente ou dependente em P_2 (polinômios de grau 2).

Solução: Consoante ao teorema 25.6.1, a dependência ou independência linear de um conjunto de polinômios é determinada pela existência ou não de soluções não triviais da equação:

$$\alpha_1.P` + \alpha_2.P`` + \alpha_3.P```+\ldots+\alpha_n.P^n = 0.$$

Desse modo,

$$\alpha_1.x^2 + \alpha_2.(1+x-x^2) + \alpha_3.(1+3x-x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \alpha_1.x^2 + \alpha_2 + \alpha_2 x - \alpha_2 x^2 + \alpha_3 + 3\alpha_3 x - \alpha_3 x^2 = 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Verifique que esse sistema possui outras soluções além da trivial, e dessa forma, os polinômios são L.I.

EXERCÍCIOS 25.3

1)Verifique, em cada caso, se o conjunto dado é linearmente independente ou dependente.

a) $\{(1,2);(3,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

b) $\{(-1,1);(-2,2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

c) $\{(1,-1);(0,2),(5,0)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

d) $\{(1,1,0);(-2,1,0),(1,3,5)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

e) $\{(2,3,1);(-2,0,5)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

f) $\{(1,1,4);(6,3,7),(1,0,11),(1,-2,7)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

g) $\{(0,1,1,0);(0,1,0,1),(1,0,1,1),(-1,0,0,0)\}$ em $\mathbb{R}^4$;

h) $\{(1,2,3,4);(5,6,7,8),(8,7,6,5)\}$ em $\mathbb{R}^4$;

i) $\left\{\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ em M_{2x2};

j) $\{1+x,-1-x\}$ em P_1 (polinômios de grau 1).

k) $\{1+x^2,2+x+2x^2,2+3x-x^2\}$ em P_2 (polinômios de grau 2).

2)Para que valores de x, os vetores $\{(x,1,1);(1,x,0),(1,1,x)\}$ em $\mathbb{R}^2$ são linearmente dependentes?

3)Marque V para verdadeiro e F para falso.

a)( ) Um conjunto de vetores linearmente dependente possui o vetor nulo.

b)( ) Um conjunto com um único vetor não nulo é linearmente independente.

c)( ) Um conjunto que possui somente o vetor nulo é linearmente dependente.

d)( ) Um conjunto de exatamente um vetor é linearmente independente se, e só se, esse vetor não é nulo.

e)( )Um conjunto com dois vetores é linearmente independente se, e só se, nenhum dos vetores é combinação linear do outro.

f) ( )Dois vetores em $\mathbb{R}^2$ são linearmente independentes, se pertencem a mesma reta.

g)( )Dois vetores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes, se pertencem a mesma reta.

h)( )Três vetores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes, se pertencem ao mesmo plano.

25.7. Base e dimensão

A base e a dimensão são conceitos fundamentais na álgebra linear que nos permitem entender como os vetores se relacionam entre si e como podem ser representados de maneira eficiente, bem como, nos possibilita compreender a estrutura subjacente do espaço vetorial.

Uma base é um conjunto de vetores que são escolhidos de tal forma que qualquer outro vetor no espaço vetorial pode ser representado como uma combinação linear desses vetores da base. Em termos matemáticos, essa escolha deve cumprir os preceitos da definição a seguir.

Definição 25.7.1: Dizemos que um conjunto $\beta = \{u_1, u_2, u_3,..., u_n\} \subset V$ é uma **base** do espaço vetorial V se:

- β é linearmente independente;
- $\mathrm{V} = \mathrm{G}(\beta)$.

Em outras palavras, definimos como uma base de um espaço vetorial, um conjunto de vetores linearmente independentes e geradores desse espaço vetorial.

Exemplo: Vamos verificar se os vetores $u_1 = (-1,1)$ e $u_2 = (0,2)$ formam uma base vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Para ser uma base, o conjunto de vetores deve ser gerador do espaço vetorial e linearmente independentes.

1) Verificando se os vetores são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow (x,y) = \alpha_1.(-1,1) + \alpha_2.(0,2) \Rightarrow$$

$$(x,y) = (-\alpha_1 + 0.\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 0.\alpha_2 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = y \end{cases}.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes $\mathrm{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ é -2, o sistema possui solução, e os vetores são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

2) Verificando se os vetores são L.I:

$$\alpha_1.u_1 + \alpha_2 u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1.(-1,1) + \alpha_2.(0,2) = 0 \Rightarrow$$

$$(-\alpha_1 + 0.\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + 0.\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

O determinante da matriz dos coeficientes $\mathrm{A} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ é -2, esse sistema possui somente a solução trivial e, portanto, os vetores são linearmente independentes (L.I).

Como as duas condições estão satisfeitas, os vetores $u_1 = (-1,1)$ e $u_2 = (0,2)$ formam uma base vetorial de $\mathbb{R}^2$.

2º exemplo: Vamos verificar se os vetores $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,3)$ e $u_3 = (-1,0,2)$ é uma base vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

1) Verificando se os vetores são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 \Rightarrow (x,y,z) = \alpha_1.(1,1,0) + \alpha_2.(0,1,3) + \alpha_3.(-1,0,2) \Rightarrow$$

$$(x,y,z) = (\alpha_1 + 0.\alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3, 0.\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 0.\alpha_2 - \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 = y \\ 0.\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = z \end{cases}.$$

O determinante da matriz dos coeficientes $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ é -1, assim o sistema possui solução e os vetores são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

2) Verificando se os vetores são L.I:

$$\alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1.(1,1,0) + \alpha_2.(0,1,3) + \alpha_3.(-1,0,2) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(\alpha_1 + 0.\alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3, 0.\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 0.\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 = 0 \\ 0.\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

A matriz dos coeficientes é a mesma anterior. Como detA = -1, esse sistema possui somente a solução trivial e os vetores são linearmente independentes (L.I).

Com as duas condições estão satisfeitas, os vetores $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,3)$ e $u_3 = (-1,0,2)$ formam uma base vetorial de $\mathbb{R}^3$.

3º exemplo: Vamos verificar se os vetores $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,1,1)$ e $u_3 = (1,2,2)$ formam uma base vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Verificando se os vetores são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 \Rightarrow (x,y,z) = \alpha_1.(2,1,1) + \alpha_2.(1,1,1) + \alpha_3.(1,2,2) \Rightarrow$$

$$(x,y,z) = (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = y. \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = z \end{cases}$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ é 0, esse sistema não possui solução, e portanto, os vetores **não** são geradores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Isso significa que os vetores $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,1,1)$ e $u_3 = (1,2,2)$ não formam uma base vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Observando os exemplos anteriores, nota-se que para verificar se os vetores são linearmente independentes e geradores do espaço vetorial, os sistemas lineares em ambos os casos tiveram sua solução condicionada ao determinante da mesma matriz dos coeficientes. Em outras palavras, para ser uma base, é necessário que o determinante dessa matriz seja diferente de zero. Isso ocorre apenas quando se tem n vetores em um espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (matriz quadrada $n \times n$).

O teorema a seguir e sua demonstração irão nos auxiliar nos casos em que o conjunto tem uma quantidade maior ou menor que n vetores no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, estendendo-se a qualquer outros espaços vetoriais.

Teorema 25.7.1: O conjunto $\beta = \{u_1, u_2, u_3,..., u_r\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ se $r = n$, ou seja, uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tem exatamente n vetores.

Demonstração: Sejam os vetores $\beta = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_r\}$ base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

• Se $r > n$, o teorema 25.6.4 nos garante que $u_1, u_2, u_3,..., u_n$ são linearmente dependentes, portanto, não formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

• Se $r < n$, o sistema linear possui mais equações não equivalentes (n) do que incógnitas (r) e conforme o teorema 14.2.3.2 (teorema do posto – volume 1), esse sistema não apresenta soluções (sistema impossível). Portanto, os vetores não geram $\mathbb{R}^n$ e, consequentemente, não formam uma base de $\mathbb{R}^n$.

Dessa maneira, qualquer base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ tem exatamente n vetores.

A quantidade n de vetores de uma base é denominada de dimensão do espaço vetorial, conforme a definição a seguir.

Definição 25.7.2: Se V é um espaço vetorial e possui uma base com n vetores, dizemos que V tem uma **dimensão** n e indicamos por $dim V = n$. Além disso, define-se também que a dimensão de um espaço vetorial nulo é zero.

Assim, $dim\mathbb{R}^2 = 2, dim\mathbb{R}^3 = 3,..., dim\mathbb{R}^n = n$.

Os exemplos mais simples de base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, são os vetores canônicos:

$$\left\{\underbrace{(1,0,0,0,\ldots 0),(0,1,0,0,0,\ldots,0),..(0,0,0,\ldots,1)}_{n\ vetores}\right\}.$$

Pois, eles são linearmente independentes e geram o espaço vetorial.

Os vetores canônicos $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, por exemplo, formam uma base de $\mathbb{R}^2$, pois são L.I e geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Veja que

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det \mathrm{A} = 1\ (\neq 0)\ e\ dim\mathbb{R}^2 = 2.$$

Os vetores canônicos $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$, pois são L.I e geram o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, uma vez que

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \det A = 1\ (\neq 0). Veja\ que\ dim\mathbb{R}^3 = 3.$$

Observações importantes sobre a dimensão de um espaço vetorial:

Observação 1: A dimensão de um espaço vetorial é o número de vetores linearmente independentes necessários para gerar todo o espaço, no entanto, há uma exceção quando se trata do espaço vetorial nulo, que contém apenas o vetor nulo. No caso do espaço vetorial nulo, o único vetor nulo gera todo o espaço, mas

este vetor não é linearmente independente. Podemos ilustrar isso com um exemplo: considere o vetor nulo $(0,0)$ e a equação do teorema 25.6.1:

$$\alpha_1.u_1 = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_1.(0,0) = 0 \quad (1)$$

Essa equação não apresenta apenas a solução trivial $\alpha_1 = 0$, isto é, esse vetor não é linearmente independente e, portanto, não forma uma base do espaço vetorial nulo. A ausência de vetores linearmente independentes nos permite definir a dimensão deste espaço como zero. Em uma perspectiva geométrica, a equação (1), para qualquer valor de α_1, gera apenas um único ponto $(0,0)$ nesse espaço e um ponto é adimensional. Por outro lado, qualquer outro vetor que não seja nulo em (1) geraria uma reta, que tem uma dimensão.

Observação 2: Nem todos os espaços vetoriais possuem dimensão finita, ou seja, possuem uma quantidade finita de vetores em sua base. O conjunto $\mathbb{R}[x]$, formado por polinômios de coeficientes reais, por exemplo, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, mas possui dimensão infinita.

Demonstração:

Suponha uma base finita de $\mathbb{R}[x]$ formada pelos polinômios: $\{P_1, P_2,..., P_n\}$. Qualquer polinômio resultante da combinação linear dessa base tem no máximo, grau n. Porém, o polinômio $Q(x) = x^{n+1} \in \mathbb{R}(x)$ e não pode ser escrito como combinação linear dessa base. Portanto, $\{P_1, P_2,..., P_n\}$ não é uma base de $\mathbb{R}(x)$, e essa base não é finita.

Como toda teoria desenvolvida nesse curso versa sobre espaços vetoriais de dimensão finita, não à toa, fixamos o grau dos polinômios de $\mathbb{R}(x)$ como polinômio P_n de grau n. Assim, qualquer polinômio pode ser escrito utilizando uma combinação linear da base finita canônica: $\{1, x, x^2, x^3, ..., x^n\}$. Para uma base não canônica temos o seguinte exemplo.

4º exemplo: Verifique se os polinômios $\{1, 1+4x-x^2, 1+x+2x^2\}$ formam um base em P_2 (polinômios de grau 2).

Solução:

$$\alpha_1.P` + \alpha_2.P`` + \alpha_3.P```+...+ \alpha_n.P^n = 0.$$

$$\alpha_1.1 + \alpha_2.(1+4x-x^2) + \alpha_3.(1+x+2x^2) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{matrix}\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_2 x - \alpha_2 x^2 + \alpha_3 + \alpha_3 x + 2\alpha_3 x^2 = 0 \\ (-\alpha_2 + 2\alpha_3)x^2 + (4\alpha_2 + \alpha_3)x + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ é 9 (não nulo) o sistema possui somente a solução trivial, e por consequência, os polinômios são linearmente independentes.

Agora, vamos verificar se os polinômios em questão geram qualquer polinômio de grau 2:

$$\alpha_1.1+\alpha_2.(1+4x-x^2)+\alpha_3.(1+x+2x^2)=ax^2+bx+c \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=c \\ 4\alpha_2+\alpha_3=b \\ -\alpha_2+2\alpha_3=a \end{cases}.$$

Esse sistema possui a mesma matriz dos coeficientes do sistema anterior e seu determinante, como já vimos, é 9 (não nulo). Isso comprova que os polinômios $\{1, 1+4x-x^2, 1+x+2x^2\}$ geram todo e qualquer polinômio do 2º grau (P_2). Como esses também são L.I, podemos concluir que formam uma base em P_2.

5º exemplo: Determine se as matrizes $M_1=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}$, $M_2=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}$, $M_3=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}$ e $M_4=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$, formam uma base do espaço vetorial das matrizes 2x2.

Solução: Para ser uma base, o conjunto das matrizes devem ser geradores do espaço vetorial e linearmente independentes.

$$\alpha_1.\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\alpha_2.\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\alpha_3.\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\alpha_4.\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & y\\ z & w\end{vmatrix}.$$

Qualquer matriz $\begin{vmatrix}x & y\\ z & w\end{vmatrix}$ pode ser expressa utilizando combinações lineares das matrizes analisadas, basta fazer: $\alpha_1=x$, $\alpha_2=y$, $\alpha_3=z$ e $\alpha_4=w$. Assim, geram o espaço vetorial das matrizes 2x2.

Agora, analisando a equação:

$$\alpha_1.\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\alpha_2.\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}+\alpha_3.\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\alpha_4.\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix},$$

essa possui apenas a solução trivial. O que implica dizer que as matrizes analisadas são linearmente independentes.

Por esses motivos, M_1, M_2, M_3 e M_4, formam uma base do espaço vetorial das matrizes 2x2 e $dim\mathrm{M}_{2x2}=4$.

De uma forma geral, em termos de matrizes, $dimM_{mxn}=m.n$.

6º exemplo: Verifique se o conjunto $\beta=\{(1,0,1),(0,0,1)\}$ forma uma base do $\mathbb{R}^3$.

Solução: Sabemos de imediato, pelo teorema 25.7.1, que β **não** é uma base de $\mathbb{R}^3$, pois possui uma quantidade de vetores menor que a dimensão do espaço vetorial. Faremos a verificação apenas como exercício.

$$\alpha_1.(1,0,1)+\alpha_2.(0,0,1)=0 \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases} \Rightarrow Somente\ solução\ trivial \Rightarrow vetores\ são\ L.I.$$

Mas, $(x,y,z)=\alpha_1.(1,0,1)+\alpha_2.(0,0,1) \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=x\\ 0=y\\ \alpha_1+\alpha_2=z\end{cases}$, não gera todos os vetores de $\mathbb{R}^3$, portanto, β não é uma base do $\mathbb{R}^3$.

7º exemplo: Verifique se o conjunto $\beta = \{(1,0),(0,1),(1,2)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Sabemos de imediato, pelo teorema 25.7.1, que β **não** é uma base de $\mathbb{R}^2$, pois possui uma quantidade de vetores maior que a dimensão do espaço vetorial. Faremos a verificação apenas como exercício.

$(x,y) = \alpha_1.(1,0) + \alpha_2.(0,1) + \alpha_3.(1,2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = x \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = y \end{cases}$ o sistema apresenta solução, basta atribuir qualquer valor para α_3 (por exemplo). Assim, β gera o $\mathbb{R}^3$.

Mas, $\alpha_1.(1,0) + \alpha_2.(0,1) + \alpha_3.(1,2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$. A solução não é somente a trivial, os vetores são L.D e β não é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Convém observar que os vetores do 6º exemplo são L.I, mas não geram o espaço $\mathbb{R}^2$ e os vetores do 7º exemplo geram o espaço $\mathbb{R}^2$, mas não são L.I. Conforme foi demonstrado no teorema 25.7.1 (verifique!).

O teorema a seguir qualifica o conjunto solução de um sistema linear homogêneo como um subespaço vetorial de $V = \mathbb{R}^n$.

Teorema 25.7.2: Seja S um conjunto solução de um sistema linear homogêneo em V, S é um subespaço vetorial de V.

Demonstração: Com efeito, se $u, v \in S$, temos: $(u + \alpha.v) \in S$. Basta tomar α como um possível parâmetro nulo ou não, da solução. Perceba ainda que $0 \in S$.

O teorema a seguir relaciona a dimensão de um espaço vetorial V com a dimensão de um subespaço S de V.

Teorema 25.7.3: Sejam V um espaço vetorial de dimensão n e S um subespaço vetorial de V, então $dimS \leq dimV$. E além disso, se $dimS = dimV$, então $S = V$.

Demonstração: Se S é um subespaço não nulo, então existe ao menos um vetor não nulo u_1 independente. Se ele gera S, então temos uma base $\beta_1 = \{u_1\}$ de dimensão 1. Caso não gere S, então existe um vetor $u_2 \notin G(u_1)$. O conjunto $\{u_1, u_2\}$ é L.I. Se gera S, então temos uma base $\beta_1 = \{u_1, u_2\}$ de dimensão 2. Se não, aplicamos o processo anterior de forma recorrente até n. Como o conjunto β_n linearmente independente tem no máximo n vetores (conforme teorema 25.6.4), concluímos que $dimS \leq dimV$ e a igualdade ocorrerá quando β_n gerar o espaço vetorial de V.

Os passos dessa demonstração nos mostram que é possível adicionar vetores a um subconjunto de V de forma a "completar" uma base de V, consoante ao teorema a seguir.

Teorema 25.7.4 (teorema do completamento): Qualquer subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V de dimensão finita, pode ser completado de modo a formar uma base de V.

8º exemplo: Encontre uma base e a dimensão do (sub)espaço solução dos sistemas lineares homogêneos a seguir.

a) $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-y+2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$

Solução: Vamos escalonar o sistema.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-y+2z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases} \overset{\text{x 1}}{\Leftarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2x-y+2z=0 \\ 0+2y+0=0 \Rightarrow \boxed{y=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-z=0 \\ -2x+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=z}.$$

Atribuindo um parâmetro t para x, encontramos a solução

$$S=(x,y,z) \Rightarrow S=\{t.(1,0,1)\}.$$

Como o vetor é L.I, tem-se que a base é $(1,0,1)$ e a dimensão é $dimS=1$.

b) $\begin{cases} x+2y-z-w=0 \\ 2x+y-3z+2w=0 \end{cases}$

Solução: Vamos escalonar o sistema.

$$\begin{cases} x+2y-z-w=0 \\ 2x+y-3z+2w=0 \end{cases} \overset{\text{x (-2)}}{\Leftarrow} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-w=0 \\ -3y-z+4w=0 \end{cases}.$$

Atribuindo parâmetro t e s, para z e w, respectivamente na 2ª equação, temos:

$$-3y-t+4s=0 \Rightarrow \boxed{y=\frac{4}{3}s-\frac{1}{3}t}.$$

Substituindo na 1ª equação:

$$x+2y-z-w=0 \Rightarrow x=-2\left(\frac{4}{3}s-\frac{1}{3}t\right)+t+s \Rightarrow$$

$$x=-2\left(\frac{4}{3}s-\frac{1}{3}t\right)+t+s \Rightarrow x=-\frac{5}{3}s+\frac{5}{3}t \Rightarrow$$

$$S=(x,y,z,w)=\left(-\frac{5}{3}s+\frac{5}{3}t,\frac{4}{3}s-\frac{1}{3}t,t,s\right) \Rightarrow s.\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},0,1\right)+t.\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},1,0\right).$$

Solução: $S=\left\{s.\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},0,1\right)+t.\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},1,0\right)\right\}$.

Como os vetores são L.I, então a base é $\left\{\left(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},0,1\right),\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},1,0\right)\right\}$ e a dimensão é $dimS=2$.

Observações importantes:

- Os vetores do subespaço solução em sistemas lineares homogêneos, como no exemplo anterior, derivados por meio do processo de escalonamento, são automaticamente geradores do subespaço, pois representam todas as soluções possíveis do sistema, e além disso, são também linearmente independentes, uma vez que o processo de escalonamento nos garante que um vetor não possa ser expresso como uma combinação linear dos outros.

- A dimensão do subespaço solução de sistemas lineares que apresentam apenas a solução trivial (o vetor nulo) é nulo (isto é, $dimS=0$).

EXERCÍCIOS 25.4

1) Verifique se o conjunto de vetores forma uma base no espaço vetorial dado.

a) $\{(1,0);(-1,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

b) $\{(-1,4);(-2,8)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

c) $\{(-1,0);(2,1);(0,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

d) $\{(1,1)\}$ em $\mathbb{R}^2$;

e) $\{(1,0,1);(1,1,1);(-1,0,0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

f) $\{(1,0,-1);(0,0,1);(2,0,-2)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

g) $\{(1,2,3);(4,5,6);(-1,2,7),(8,9,11\}$ em $\mathbb{R}^3$;

h) $\{(1,1,1);(-1,0,1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

i) $\{(1,2,3,4);(5,6,7,8),(8,7,6,5)\}$ em $\mathbb{R}^4$;

j) $\{(1,0,-1,4);(5,6,0,-1),(4,3,0,0),(0,1,2,-2),(4,2,7,-1)\}$ em $\mathbb{R}^4$;

k) $\{(1,2,-2,0);(0,1,0,-1),(2,0,3,0),(0,1,1,-3),\}$ em $\mathbb{R}^4$;

l) $\{(1,1,1,0);(0,2,0,-2),(1,2,3,0),(1,6,3,-4),\}$ em $\mathbb{R}^4$.

2) Verifique se as matrizes

$$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

formam uma base em M_{2x2}.

3) Explique por que 5 matrizes quaisquer não formam uma base em M_{2x2}.

4) Verifique se os polinômios $\{2+4x,-1-2x\}$ formam um base em P_1 (polinômios de grau 1).

5) Verifique se os polinômios $\{x^2,1+x-x^2,2x-x^2\}$ formam um base em P_2 (polinômios de grau 2).

6) Encontre uma base e a dimensão do espaço solução dos sistemas lineares homogêneos a seguir.

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + 3y + 7z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ 2x + y - 2z + w = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y - 3z + 2w = 0 \\ 3x + y - 2z + w = 0 \end{cases}$

7) Encontre a base dos seguintes subespaços vetoriais indicados em cada caso.

a) A reta $2x - y = 0$ de $\mathbb{R}^2$.

b) A reta $x = 2t$, $y = t$ e $z = 3t$ de $\mathbb{R}^3$.

c) O plano $2x - 3y = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

d) O plano $x - 2y - 4z = 0$ de $\mathbb{R}^3$.

e) Todos os vetores na forma $(a, b, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.

f) Todos os vetores na forma (a, b, c, d) em que $a = b = c = d$ de $\mathbb{R}^4$.

g) Todos os polinômios na forma $a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3$ em que $a_1 = 0$ de P_3 (polinômios de grau 3).

8) Marque V para verdadeiro e F para falso.

a) ( ) Se um conjunto de vetores geram um espaço vetorial, então esses vetores formam uma base desse espaço vetorial.

b) ( ) Se um conjunto de vetores são linearmente independentes, então esses vetores formam uma base desse espaço vetorial.

c) ( ) Se um conjunto de vetores são linearmente independentes e geram o espaço vetorial, então esses vetores formam uma base desse espaço vetorial.

d) ( ) O espaço vetorial formados pelos polinômios (P_n) de grau n, possui dimensão $dim P_n = n$.

e) ( ) O espaço vetorial formados pelos polinômios (P_n) de grau n, possui dimensão $dim P_n = n + 1$.

f) ( ) O espaço vetorial formados pelas matrizes M_{nxm}, possui dimensão $dim M_{nxm} = n.m + 1$.

g) ( ) Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

h) ( ) Se uma base de um espaço vetorial V possui n vetores, então um subconjunto de V com mais de n vetores será linearmente independente.

i) ( ) Se uma base de um espaço vetorial V possui n vetores, então um subconjunto de V com menos de n vetores não gera V.

j) ( ) O espaço vetorial nulo tem dimensão 1 por conter um único vetor nulo.

9) Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 25.7.5: Seja um espaço vetorial V com $dim V = n$ e S um conjunto em V com exatamente n vetores. Então, S será uma base de V se, e somente se, S for L.I ou S gerar V.

25.8. Coordenadas e mudança de base

25.8.1. Coordenadas

As coordenadas de um vetor em relação a um conjunto de vetores base são os números que descrevem como o vetor pode ser expressado como uma combinação linear desses vetores base. Esses números formam os elementos de um outro vetor, denominado de vetor de coordenadas, conforme a definição a seguir.

Definição 25.8.1.1: Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ uma base do espaço vetorial V. Se $u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n$, então os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ são denominados de **coordenadas** de u em relação à base α. E o vetor $[u]_\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é denominado de **vetor de coordenadas** de u em relação à α.

O vetor de coordenadas de $u = (x, y)$, por exemplo, em relação à base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, é o próprio vetor (x, y), uma vez que: $(x, y) = x.(1,0) + y.(0,1)$. Enquanto que para outra base não canônica, o vetor de coordenadas depende dos vetores da base escolhida.

Exemplo: O vetor de coordenadas de $u = (2,4)$ em relação a base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é o próprio vetor $u = (2,4)$. Porém, para a base $\{(1,2),(2,3)\}$ o seu vetor de coordenadas é $[u]_\alpha = (2,0)$. Veja o cálculo:

$$u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n$$

$$(2,4) = \alpha_1.(1,2) + \alpha_2.(2,3)$$

$$(2,4) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 4 \end{cases}$$

Escalonando e resolvendo o sistema, encontramos o vetor de coordenadas: $[u]_\alpha = (2,0)$. Assim: $(2,4) = \mathbf{2}.(1,2) + \mathbf{0}.(2,3)$.

A figura 25.8.1.1, mostra o vetor $(2,4)$ representado pelas duas formas, segundo a base canônica $\{(1,0),(0,1)\}$ de cor azul e segundo a base $\{(1,2),(2,3)\}$ de cor vermelha.

Essa é a ideia por trás de uma ferramenta matemática muito útil em se representar um mesmo objeto matemático em sistemas de coordenadas diferentes, denominada de **mudança de coordenadas**.

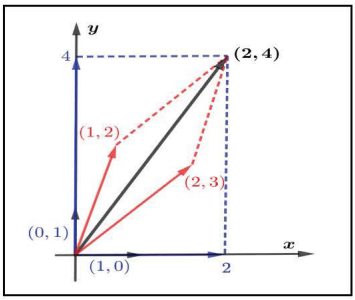


Figura 25.8.1.1

Os polinômios na forma $a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \ldots + a_n.x^n$ tem como vetor de coordenadas os próprios coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ em relação à base $\{1,$

$x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$. Porém, para uma base diferente, o vetor de coordenadas muda.

Exemplo: Vamos calcular o vetor de coordenadas de $p = 2 + x - 2x^2$ em relação a base $\alpha = \{1 + x, 1 - 2x, 2 - x^2\}$.

Solução:

$$p = \alpha_1 . u_1 + \alpha_2 . u_2 + \alpha_3 . u_3 + \cdots + \alpha_n . u_n$$

$$2 + x - 2x^2 = \alpha_1 . (1 + x) + \alpha_2 . (1 - 2x) + \alpha_3 . (2 - x^2)$$

$$2 + x - 2x^2 = \alpha_1 + \alpha_1 . x + \alpha_2 - 2\alpha_2 . x + 2\alpha_3 - \alpha_3 x^2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1 \\ -\alpha_3 = -2 \end{cases}.$$

Da última equação, encontramos $\boxed{\alpha_3 = 2}$. Substituindo na 1ª equação, temos

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2.2 = 2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = -1} \; e \; \boxed{\alpha_1 = -1}.$$

Desse modo, o vetor de coordenadas desse polinômio, segundo a base informada, é:

$$[p]_\alpha = (-1, -1, 2).$$

Observe que: $p = 2 + x - 2x^2 = -\mathbf{1}.(1 + x) + (-\mathbf{1}).(1 - 2x) + \mathbf{2}.(2 - x^2)$.

Importante: É evidente que diante da definição 25.8.1.1, a ordem dos vetores de uma base $\{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ influencia no vetor de coordenadas $[u]_\alpha$. Para evitar essa confusão, utilizaremos uma única ordem para os vetores da base, ou seja, utilizaremos sempre uma **base ordenada**. E para evitar repetições, todas as bases mencionadas a partir desse momento, serão implicitamente bases ordenadas.

3º exemplo: Os vetores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 3, 1)$ e $u_3 = (1, 2, -2)$ formam uma base vetorial de $\mathbb{R}^3$. Encontre o vetor de coordenadas de $u = (1, 4, -2)$ em relação a base.

Solução:

$$u = \alpha_1 . u_1 + \alpha_2 . u_2 + \alpha_3 . u_3 + \cdots + \alpha_n . u_n$$

$$(1, 4, -2) = \alpha_1 . (1, 1, 1) + \alpha_2 . (1, 3, 1) + \alpha_3 . (1, 2, -2)$$

$$(1, 4, -2) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4. \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Escalonando e resolvendo o sistema, encontramos o vetor de coordenadas:

$$[u]_\alpha = (-1, 1, 1).$$

Se a base for a base canônica $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, o vetor de coordenadas é o próprio vetor $(1, 4, -2)$. Veja:

$$(1, 4, -2) = \alpha_1 . (1, 0, 0) + \alpha_2 . (0, 1, 0) + \alpha_3 . (0, 0, 0) \Rightarrow [u]_\alpha = (1, 4, -2).$$

Sabemos que ao mudar a base do espaço vetorial, o vetor de coordenadas de um determinado objeto do espaço vetorial (vetor, polinômio, matriz etc.) também muda. Essa mudança de base e seus efeitos causados entre os vetores de coordenadas é o nosso próximo foco de estudo.

25.8.2. Mudança de base

Definição 25.8.2.1: Se mudarmos uma base (antiga) $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ para alguma base (nova) $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ de um espaço vetorial V, então o velho vetor de coordenadas $[u]_\alpha$ está relacionado a um novo vetor de coordenadas $[u]_\beta$ pela equação:

$$[u]_\beta = [T]_\beta^\alpha . [u]_\alpha .$$

Onde $[T]_\beta^\alpha$ é uma matriz denominada de **matriz de transição (ou matriz mudança de base)** de α para β, formada pelos vetores de coordenadas da base antiga α em relação à base nova β, postos em coluna.

A definição acima, nos diz que devemos calcular os vetores de coordenadas de cada vetor da base antiga em relação à base nova, e pô-los em forma de coluna em uma matriz. Essa matriz será a matriz de transição de uma base para a outra.

Exemplo: Sejam $\alpha = \{(1,2),(2,3)\}$ base do primeiro exemplo anterior e a base canônica $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$. Encontre $[T]_\beta^\alpha$ e $[T]_\alpha^\beta$.

Solução: Para calcular $[T]_\beta^\alpha$ (matriz de transição de α para β), devemos expressar os vetores da base antiga α em termos dos elementos da nova base β. Do seguinte modo:

$$\begin{cases} \overbrace{(1,2)}^{\alpha} = a_1 . \overbrace{(1,0)}^{\beta} + a_2 . \overbrace{(0,1)}^{\beta} \\ (2,3) = b_1 . (1,0) + b_2 . (0,1) \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas lineares $\begin{cases} a_1 + 0.a_2 = 1 \\ 0.a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} b_1 + 0.b_2 = 2 \\ 0.b_1 + b_2 = 3 \end{cases}$, encontramos $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$ e $b_2 = 3$. Assim, $[T]_\beta^\alpha = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$.

Para calcular $[T]_\alpha^\beta$ (matriz de transição de β para α), devemos expressar os vetores da base antiga β em termos dos elementos da nova base α. Da seguinte maneira:

$$\begin{cases} (1,0) = a_1 . (1,2) + a_2 . (2,3) \\ (0,1) = b_1 . (1,2) + b_2 . (2,3) \end{cases}.$$

Resolvendo os sistemas lineares $\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 1 \\ 2a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} b_1 + 2b_2 = 0 \\ 2b_1 + 3b_2 = 1 \end{cases}$, encontramos $a_1 = -3$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$ e $b_2 = -1$. Dessa forma: $[T]_\alpha^\beta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Na subseção anterior, vimos que os vetores de coordenadas de $u = (2,4)$ para as essas mesmas bases, foram respectivamente: $[u]_\alpha = (2,0)$ para a base $\alpha = \{(1,2),(2,3)\}$ e $[u]_\beta = (2,4)$ para a base $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$. Agora, perceba que:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \end{vmatrix}}_{[u]_\beta} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{[T]_\beta^\alpha} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}}_{[u]_\alpha} .$$

É conveniente utilizar os vetores na forma matricial, uma vez que o dispositivo de transição é uma matriz.

E que:

$$\underbrace{\begin{vmatrix}2\\0\end{vmatrix}}_{[u]_\alpha} = \underbrace{\begin{vmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}}_{[T]_\alpha^\beta} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix}2\\4\end{vmatrix}}_{[u]_\beta}.$$

Outro fato interessante é que a matriz de transição $[T]_\alpha^\beta$ (do exemplo anterior) é formada pelo próprios vetores da base α dispostos em coluna. Isso acontece quando a base de destino (base nova β) é canônica. Conforme o teorema a seguir.

Teorema 25.8.2.1: Sejam duas bases, uma base α qualquer de um espaço vetorial V de dimensão finita e uma base β **canônica**, a matriz $[T]_\beta^\alpha$ é formada pelos vetores da base α dispostos em coluna.

Demonstração:

$$\begin{cases} a_1.(1,0,\ldots,0) + a_2.(0,1,\ldots,0) + a_3.(0,0,1,\ldots,0) + \ldots + a_n.(0,0,\ldots,1) = (a_1, a_2, a_3, \ldots a_n) \\ b_1.(1,0,\ldots,0) + b_2.(0,1,\ldots,0) + b_3.(0,0,1,\ldots,0) + \ldots + b_n.(0,0,\ldots,1) = (b_1, b_2, b_3, \ldots b_n) \\ \vdots \\ z_1.(1,0,\ldots,0) + z_2.(0,1,\ldots,0) + z_3.(0,0,1,\ldots,0) + \ldots + z_n.(0,0,\ldots,1) = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n) \end{cases}.$$

O que resulta em vetores de coordenadas iguais aos vetores da base antiga.

Existe uma relação entre as matrizes de transição $[T]_\beta^\alpha$ e $[T]_\alpha^\beta$, conforme o teorema a seguir.

Teorema 25.8.2.2: Sejam duas bases α e β de um espaço vetorial V de dimensão finita, a matriz $[T]_\beta^\alpha$ é invertível e sua inversa é $[T]_\alpha^\beta$.

Demonstração: Por definição, $[u]_\alpha = [T]_\beta^\alpha.[u]_\beta$ e $[u]_\beta = [T]_\alpha^\beta.[u]_\alpha$. Substituindo a primeira equação na segunda, temos: $[u]_\beta = [T]_\alpha^\beta.[T]_\beta^\alpha.[u]_\beta$. A igualdade só é possível se $[T]_\alpha^\beta.[T]_\beta^\alpha = I$ (matriz identidade), o que equivale a dizer que a inversa de $[T]_\beta^\alpha$ é $[T]_\alpha^\beta$ (e vice-versa). A existência da inversa é demonstrada no teorema 25.9.3.1.

Observe que as matrizes de transição $\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix}-3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}$ do exemplo anterior são inversas.

2º exemplo: Sejam $\alpha = \{(1,2),(2,3)\}$ e $\beta = \{(2,2),(1,3)\}$. Encontre $[T]_\beta^\alpha$ e $[T]_\alpha^\beta$.

Solução: Para calcular $[T]_\beta^\alpha$ (matriz de transição de α para β), devemos expressar os vetores da base antiga α em termos dos elementos da nova base β. Assim:

$$\begin{cases} (1,2) = a_1.(2,2) + a_2.(1,3) \\ (2,3) = b_1.(2,2) + b_2.(1,3) \end{cases}.$$

Resolvendo os sistemas, encontramos $a_1 = 1/4$, $a_2 = 1/2$, $b_1 = 3/4$ e $b_2 = 1/2$. Dessa forma: $[T]_\beta^\alpha = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$.

Para calcular uma matriz inversa, use o método de eliminação de Gauss-Jordan ou o teorema 14.1.9.1 presente na subseção 14.1.9 do volume 3.

A matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$ é a inversa de $[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{vmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}$, que neste caso é $\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 2 & -1\end{vmatrix}$.

Outra solução para encontrar $[T]_{\alpha}^{\beta}$, como já sabemos, é expressar os vetores da base antiga β em termos dos elementos da nova base α e resolver os sistemas lineares.

3º exemplo: Sejam as bases $\beta=\{(1,1,-1),(0,3,1),(1,-1,0)\}$, $\alpha=\{(2,1,1),(1,2,1),(-1,1,-2)\}$ e a base canônica $e=\{(1,0,0),(0,0,1),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Calcule:

a) $[\,T\,]_{e}^{\beta}$

Solução: O teorema 25.8.2.1 nos garante que a matriz $[\,T\,]_{e}^{\beta}$ é formada pelo próprios vetores da base β dispostos em coluna (uma vez que a base e é canônica). Assim:

$$[\,T\,]_{e}^{\beta}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

b) $[\,T\,]_{\beta}^{e}$

Solução: Resolver três sistemas lineares com três incógnitas e três equações é trabalhoso. Melhor é calcular a inversa de $[\,T\,]_{e}^{\beta}$, que nesse caso, é:

$$[\,T\,]_{\beta}^{e}=\begin{vmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{vmatrix}.$$

c) $[\,T\,]_{\beta}^{\alpha}$

Solução: Para calcular $[T]_{\beta}^{\alpha}$ (matriz de transição de α para β), devemos expressar os vetores da base antiga α em termos dos elementos da nova base β. Assim, temos:

$$\begin{cases}(2,1,1)=a_1.(1,1,-1)+a_2.(0,3,1)+a_3.(1,-1,0)\\ (1,2,1)=b_1.(1,1,-1)+b_2.(0,3,1)+b_3.(1,-1,0)\\ (-1,1,-2)=c_1.(1,1,-1)+c_2.(0,3,1)+c_3.(1,-1,0)\end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, encontramos $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=2$, $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=1$, $c_1=\frac{6}{5}$, $c_2=-\frac{4}{5}$ e $c_3=-\frac{11}{5}$.

Dessa forma: $[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & \frac{6}{5}\\ 1 & 1 & -\frac{4}{5}\\ 2 & 1 & -\frac{11}{5}\end{vmatrix}$.

d) $[\,T\,]_{\alpha}^{\beta}$

Solução: Basta calcular a inversa da matriz anterior, que nesse caso é:

$$[\,T\,]_{\alpha}^{\beta} = \begin{vmatrix} \frac{7}{6} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

e) O vetor de coordenadas do vetor (3, 1, 3) na base β.

Solução:

$$u = \alpha_1.u_1 + \alpha_2.u_2 + \alpha_3.u_3 + \cdots + \alpha_n.u_n$$

$$(3,1,3) = a_1.(1,1,-1) + a_2.(0,3,1) + a_3.(1,-1,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 0.\alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 0.\alpha_3 = 3 \end{cases}.$$

Escalonando e resolvendo o sistema, encontramos o vetor de coordenadas:

$$[u]_{\beta} = (-1,2,4).$$

f) O vetor coordenadas do vetor (3, 1, 3) na base α.

Solução: Vamos utilizar as informações já calculadas na igualdade $[u]_{\alpha} = [\,T\,]_{\alpha}^{\beta}.[u]_{\beta}$.

$$[u]_{\alpha} = \begin{vmatrix} \frac{7}{6} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right).$$

Use os mesmos passos do item anterior e comprove esse mesmo vetor de coordenadas.

O processo de calcular matrizes de transição usando a definição, consiste, em geral, em resolver n sistemas lineares com n incógnitas e n equações (em $\mathbb{R}^n$), tornando o processo dispendioso para $n \geq 4$. O teorema a seguir, que utiliza a inversa e a multiplicação de matrizes, pode ser uma solução alternativa viável para esse problema.

Teorema 25.8.2.3: A matriz de transição $[\,T\,]_{\beta}^{\alpha}$ é o produto da inversa da matriz formada pelos vetores (em coluna) da base nova β, pela matriz dos vetores (em coluna) da base antiga α. Isso equivale a:

$$[\,T\,]_{\beta}^{\alpha} = \left[[T]_{e}^{\beta}\right]^{-1}.[T]_{e}^{\alpha}$$

Demonstração: Os vetores de cada base em coluna formando matrizes, segundo o teorema 25.8.2.1, equivale as matrizes $[T]_{e}^{\alpha}$ e $[T]_{e}^{\beta}$ (onde e é a base canônica). Utilizando a definição 25.8.2.1 para esses casos, temos:

$$[u]_e = [T]_{e}^{\alpha}.[u]_{\alpha}$$

$$[u]_e = [T]_{e}^{\beta}.[u]_{\beta}.$$

Igualando as equações:

$$[T]_{e}^{\beta}.[u]_{\beta} = [T]_{e}^{\alpha}.[u]_{\alpha}$$

Multiplicando à esquerda pela inversa de $[T]_e^{\beta}$ representada por $\left[[T]_e^{\beta}\right]^{-1}$, temos

$$\underbrace{\left[[T]_e^{\beta}\right]^{-1}\cdot[T]_e^{\beta}}_{I}\cdot[u]_{\beta}=\left[[T]_e^{\beta}\right]^{-1}\cdot[T]_e^{\alpha}\cdot[u]_{\alpha}$$

$$[u]_{\beta}=\underbrace{\left[[T]_e^{\beta}\right]^{-1}\cdot[T]_e^{\alpha}}_{[T]_{\beta}^{\alpha}}\cdot[u]_{\alpha}=\boxed{[T]_{\beta}^{\alpha}=\left[[T]_e^{\beta}\right]^{-1}\cdot[T]_e^{\alpha}}.$$

Exemplo (2º exemplo anterior): Sejam $\alpha=\{(1,2),(2,3)\}$ e $\beta=\{(2,2),(1,3)\}$. Encontre $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

Solução: $[T]_{\beta}^{\alpha}=\left[\begin{vmatrix}2&1\\2&3\end{vmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}.$

Compare com a matriz de transição do 2º exemplo anterior.

2º exemplo (3º exemplo anterior): Sejam as bases $\alpha=\{(2,1,1),(1,2,1),(-1,1,-2)\}$ e $\beta=\{(1,1,-1),(0,3,1),(1,-1,0)\}$. Calcule $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

Compare com a matriz de transição do 3º exemplo anterior.

Solução:

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\left[\begin{bmatrix}1&0&1\\1&3&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{vmatrix}\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}\Rightarrow[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{vmatrix}0&0&\frac{6}{5}\\1&1&-\frac{4}{5}\\2&1&-\frac{11}{5}\end{vmatrix}.$$

3º exemplo: Sejam as bases $\alpha=\{\vec{u}=(1,0,2),\vec{v}=(1,1,1),\vec{w}=(-1,0,-1)\}$ e $\beta=\{\vec{u}'=(1,1,1),\vec{v}'=(0,1,1),\vec{w}'=(1,1,0)\}$. Se $\vec{x}=-2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$, como devemos escrever o vetor $\vec{x}$ em relação à β?

Solução: O vetor de coordenadas na base α é $[x]_{\alpha}=(-2,1,-3)$. Para calcular o vetor de coordenadas desse vetor na base β, precisamos de $[T]_{\beta}^{\alpha}$.

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\left[[T]_e^{\beta}\right]^{-1}\cdot[T]_e^{\alpha}.$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\left[\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\right]^{-1}\cdot\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&1&0\\0&1&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&1&-2\\-1&0&1\\-2&0&1\end{vmatrix}.$$

$$[u]_{\beta}=[T]_{\beta}^{\alpha}\cdot[u]_{\alpha}$$

$$[u]_{\beta}=\begin{vmatrix}3&1&-2\\-1&0&1\\-2&0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Desse forma: $\vec{x}=\vec{u}'-\vec{v}'+\vec{w}'$.

Substitua os vetores em $\vec{x}=\vec{u}'-\vec{v}'+\vec{w}=-2\vec{u}+\vec{v}-3\vec{w}$ e confirme a igualdade.

EXERCÍCIOS 25.5

1) Encontre o vetor de coordenadas de u em relação à base α, em cada caso.
   a) $u = (1,3)$ em relação à base $\alpha = \{(1,1),(1,2)\}$;
   b) $u = (-2,2)$ em relação à base $\alpha = \{(-1,3),(0,5)\}$;
   c) $u = (x,y)$ em relação à base $\alpha = \{(-1,-1),(0,1)\}$.

2) Encontre o vetor de coordenadas de u em relação à base α, em cada caso.
   a) $u = (1,2,1)$ em relação à base $\alpha = \{(1,1,3),(1,2,1),(1,-2,1)\}$;
   b) $u = (-1,5,2)$ em relação à base $\alpha = \{(-1,1,2),(1,1,-1),(0,1,1)\}$;
   c) $u = (x,y,z)$ em relação à base $\alpha = \{(-2,0,2),(3,1,-1),(0,0,1)\}$.

3) Encontre o vetor de coordenadas de p em relação à base α, em cada caso.
   a) $p = 1 - 10x + 20x^2 - 13x^3$ em relação à base $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$;
   b) $p = 1 + 2x$ em relação à base $\alpha = \{1 + x, 1 - 2x\}$;
   c) $p = 1 + x - 2x^2$ em relação à base $\alpha = \{1 + x + x^2, 1 - x^2, 1 + 2x^2\}$.

4) Encontre o vetor de coordenadas de $A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ em relação à base $\alpha = \left\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}$.

5) Sejam um vetor $\vec{u}$ e uma base α de $\mathbb{R}^n$, mostre que o vetor de coordenadas de $\vec{u}$ em relação à α, pode ser dado por: $[u]_\alpha = \left[[T]_e^\alpha\right]^{-1} . \vec{u}$.

6) Sejam $\alpha = \{(1,1),(2,3)\}$ e $\beta = \{(0,2),(1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.
   a) Encontre o vetor coordenadas de $u = (1,3)$ em relação à α;
   b) Encontre $[T]_\beta^\alpha$;
   c) Encontre $[T]_\alpha^\beta$;
   d) Encontre o vetor coordenadas de $u = (1,3)$ em relação à β;

7) Sejam $\alpha = \{(1,0),(-1,1)\}$ e $\beta = \{(0,1),(-1,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.
   a) Encontre o vetor coordenadas de $u = (1,2)$ em relação à α;
   b) Encontre $[T]_\beta^\alpha$;
   c) Encontre $[T]_\alpha^\beta$;
   d) Encontre o vetor coordenadas de $u = (1,2)$ em relação à β;

8) Sejam $\alpha = \{(1,1),(2,1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $[T]_\beta^\alpha = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.
   a) Encontre $[T]_\alpha^\beta$;
   b) Demonstre que, de uma forma geral, temos: $[T]_e^\beta = [T]_e^\alpha . [T]_\alpha^\beta$;

c) Use a igualdade anterior para encontrar a base β.

9) Sejam $\alpha = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,1,-2)\}$ e $\beta = \{(1,0,-1),(0,2,1),(1,1,0)\}$, bases de $\mathbb{R}^3$.

a) Encontre o vetor coordenadas de $u = (1,1,2)$ em relação à α;

b) Encontre $[T]_{\beta}^{\alpha}$;

c) Encontre $[T]_{\alpha}^{\beta}$;

d) Encontre o vetor coordenadas de $u = (1,1,2)$ em relação à β;

10) Sejam $\alpha = \{\vec{u} = (2,1,2), \vec{v} = (3,4,5), \vec{w} = (1,1,1)\}$ e $\beta = \{\vec{u}' = (1,2,3), \vec{v}' = (0,0,1), \vec{w}' = (2,2,0)\}$. Se $\vec{x} = -3\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w}$, como devemos escrever o vetor $\vec{x}$ em relação à β?

11) Sejam $\alpha = \{(1,-1,1),(1,0,1),(0,1,-2)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

a) Encontre $[T]_{\alpha}^{\beta}$;

b) Encontre a base β (Dica: use a igualdade da questão 8-b).

12) Quanto a mudança de base, marque a opção incorreta.

a) Se α e β são bases de um espaço vetorial, então existe uma matriz de transição $[T]_{\alpha}^{\beta}$.

b) As matrizes de mudança de base (transição) são invertíveis.

c) O produto $[T]_{\alpha}^{\beta}.[T]_{\beta}^{\alpha}$ é igual a matriz identidade.

d) O produto $[T]_{e}^{\beta}.[T]_{e}^{\alpha}$ é igual a matriz identidade.

e) Vale a igualdade $[u]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha}.[u]_{\alpha}$.

13) Quanto ao vetor de coordenadas, marque a opção incorreta.

a) O vetor de coordenadas de $u = (a,b)$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$ é formado pelos componentes de u.

b) O vetor de coordenadas de $v = (a,b,c)$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$ é formado pelos componentes de v.

c) O vetor de coordenadas de $p = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ em relação à base $\alpha = \{1, x, x^2, x^3\}$ é formado pelos coeficientes de p.

d) O vetor de coordenadas de $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ em relação à base $\alpha = \left\{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}$ é formado pelos elementos de A.

e) Se o vetor de coordenadas de um objeto em relação à uma base α é igual ao vetor de coordenadas em relação à outra base β, então as bases α e β são iguais.

25.9. Transformações lineares

Nesta seção, trataremos de funções cujos domínios e contradomínios são espaços vetoriais e que, além disso, resguardam as operações de adição de vetores e de multiplicação de vetores por um escalar. Esses tipos de funções são denominadas de função de transformação linear.

Definição 25.9.1: Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma função de transformação $T: V \to W$ é dita linear sempre que:

- $\boxed{T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)}$ $(ocorrer\ a\ linearidade\ da\ soma)$;
- $\boxed{T(\alpha.u_1) = \alpha.T(u_1)}$ $(ocorrer\ a\ linearidade\ do\ produto)$.

Observações:

– As duas sentenças podem ser resumidas em uma única:

$$T(u_1 + \alpha.u_2) = T(u_1) + \alpha.T(u_2).$$

– No caso especial em que $V = W$, ou seja, $T: V \to V$, a transformação linear é denominada **operador linear** do espaço vetorial V.

Exemplo: A função $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y) = x - y$ é uma transformação linear, pois sendo $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(u_1 + \alpha.u_2) = T[(x_1, y_1) + \alpha.(x_2, y_2)] = T(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) =$$
$$T(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) = x_1 + \alpha.x_2 - (y_1 + \alpha.y_2) =$$
$$x_1 + \alpha.x_2 - y_1 - \alpha.y_2 = \underbrace{x_1 - y_1}_{T(u_1)} + \alpha.\underbrace{(x_2 - y_2)}_{T(u_2)} = T(u_1) + \alpha.T(u_2).$$

2º exemplo: A função: $\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) = (x - y, x + z) \end{cases}$ é uma transformação linear, pois sendo $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(u_1 + \alpha.u_2) = T[(x_1, y_1, z_1) + \alpha.(x_2, y_2, z_2)] = T(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2, z_1 + \alpha.z_2) =$$
$$(x_1 + \alpha.x_2 - (y_1 + \alpha.y_2), x_1 + \alpha.x_2 + (z_1 + \alpha.z_2)) =$$
$$(x_1 - y_1 + \alpha.(x_2 - y_2), x_1 + z_1 + \alpha(x_2 + z_2)) =$$
$$\underbrace{(x_1 - y_1, x_1 + z_1)}_{T(u_1)} + \alpha.\underbrace{(x_2 - y_2, x_2 + z_2)}_{T(u_2)}.$$

3º exemplo: A função: $\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) = (x^2, z) \end{cases}$ **não** é uma transformação linear.

Com efeito, para $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow T(u_1) = ({x_1}^2, z_1)$, para $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \Rightarrow T(u_1) = ({x_2}^2, z_2)$ e para $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(u_1) + \alpha.T(u_2) = ({x_1}^2, z_1) + \alpha.({x_2}^2, z_2) \Rightarrow \boxed{T(u_1) + \alpha.T(u_2) = ({x_1}^2 + \alpha {x_2}^2, z_1 + \alpha z_2)}.$$

Enquanto que:

$$T(u_1 + \alpha.u_2) = T\left[(x_1, y_1, z_1) + \alpha.(x_2, y_2, z_2)\right] = T(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2, z_1 + \alpha.z_2) \Rightarrow$$
$$\boxed{T(u_1 + \alpha.u_2) = ((x_1 + \alpha.x_2)^2, z_1 + \alpha.z_2)} \neq T(u_1) + \alpha.T(u_2).$$ Verifique!

4º exemplo: A função: $\begin{cases} T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) = (x+1,x) \end{cases}$ **não** é uma transformação linear.

De fato, se $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$T(u_1 + \alpha.u_2) = T[(x_1,y_1) + \alpha.(x_2,y_2)] = T(x_1 + \alpha.x_2, y_1 + \alpha.y_2) \Rightarrow$$

$$\boxed{T(u_1 + \alpha.u_2) = (x_1 + \alpha.x_2 + 1, x_1 + \alpha.x_2)}.$$

$$T(u_1) + \alpha.T(u_2) = (x_1 + 1, x_1) + \alpha.(x_2 + 1, x_2) = \boxed{(x_1 + \alpha.x_2 + \alpha + 1, x_1 + \alpha.x_2)}.$$

Como $(x_1 + \alpha.x_2 + 1, x_1 + \alpha.x_2) \neq (x_1 + \alpha.x_2 + \alpha + 1, x_1 + \alpha.x_2)$ a transformação **não** é linear.

Teorema 25.9.1: Se $T:V \to W$ for uma transformação linear, então:

- $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- $T(u - v) = T(u) - T(v)$.

Demonstração: Como $0.u = \mathbf{0}$, então:

$\boldsymbol{T(0) = T(0.u) = 0.T(u) = 0.}$

$\boldsymbol{T(u - v) = T(u + (-1)v) = T(u) + T((-1)v) = T(u) + (-1)T(v) = T(u) - T(v).}$

Nos exercícios será cobrada a demonstração que $T(-u) = -T(u)$ com base nesse teorema.

O teorema 25.9.1 pode ser uma excelente ferramenta de verificação, pois ele garante que para uma transformação ser linear é preciso que ela transforme um vetor nulo em outro vetor nulo. Veja que isso não ocorre no 4º exemplo anterior, pois a transformação $\begin{cases} T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) = (x+1,x) \end{cases}$ transforma o vetor nulo$(0,0)$ em um vetor não nulo $(1,0)$ e, portanto, não é uma transformação linear (não sendo necessário verificar as outras condicionantes).

Entretanto, a recíproca desse teorema não é válida. Transformar um vetor nulo em outro vetor nulo, é uma condição necessária mas não suficiente para implicar em uma transformação linear. Perceba que na transformação $\begin{cases} T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) = (x^2,z) \end{cases}$ do 3º exemplo anterior, que $T(0,0,0) = (0,0)$, porém essa transformação não é linear.

Teorema 25.9.2: Se $T:V \to W$ é uma transformação linear, $\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ uma base do espaço vetorial V e $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$ um vetor de V, então:

- $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) \ldots \alpha_n T(v_n)$;
- E a transformação linear $T(v)$ é única.

Demonstração:

Aplicando a transformação definição 25.9.1 em $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$, temos:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) + T(\alpha_3 v_3) + \cdots + T(\alpha_n v_n);$$

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) + \cdots + \alpha_n T(v_n).$$

Quanto à unicidade, os vetores de $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ formam um base, portanto, os coeficientes α_1, α_2, α_3, ..., α_n (da combinação linear) são únicos. Na hipótese de haver duas transformações lineares $T(v)$ e $T'(v)$ distintas, podemos escrevê-las como: $T(v_i) = w_i$ e $T'(v_i) = w_i$ e assim,

$$T(v) = \alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{w_1} + \alpha_2 \underbrace{T(v_2)}_{w_2} + \alpha_3 \underbrace{T(v_3)}_{w_3} + \cdots + \alpha_n \underbrace{T(v_n)}_{w_n}.$$

$$T(v) = \alpha_1 \underbrace{T'(v_1)}_{w_1} + \alpha_2 \underbrace{T'(v_2)}_{w_2} + \alpha_3 \underbrace{T'(v_3)}_{w_3} + \cdots + \alpha_n \underbrace{T'(v_n)}_{w_n} = T'(v_i).$$

As condições e as consequências do teorema 25.9.2 são claras, sendo β uma base de V, implica que a transformação $T: V \to W$ é única. Isso nos permite calcular a função de uma transformação linear $T: V \to W$, a partir dos vetores dessa base β e de W.

Exemplo: Calcule a função da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (0,1,3)$ e $T(1,2) = (-1,1,4)$.

Solução: Como os vetores $(1,1)$ e $(1,2)$ são L.I e $n = dim\mathbb{R}^2 = 2$, temos uma base. Denotando $v = (x,y)$, temos:

$$(x,y) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,2) \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 + \alpha_2 \\ y = \alpha_1 + 2.\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = y - x \\ \alpha_1 = 2x - y \end{cases}$$

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) \Rightarrow T(x,y) = (2x-y).T(1,1) + (y-x).T(1,2)$$

$$T(x,y) = (2x-y).(0,1,3) + (y-x).(-1,1,4)$$

$$T(x,y) = (x-y, 2x-y+y-x, 6x-3y+4y-4x) \Rightarrow \boxed{T(x,y) = (x-y, x, 2x+y)}.$$

Para testar a veracidade dessa função, vamos substituir os dados do exemplo:

$$T(x,y) = (x-y, x, 2x+y) \Rightarrow \begin{cases} T(1,1) = (1-1, 1, 2.1+1) = (0,1,3) \\ T(1,2) = (1-2, 1, 2.1+2) = (-1,1,4) \end{cases} (ok!).$$

2º exemplo: Calcule a função da transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,1,2) = (-1,5)$, $T(1,2,3) = (-2,7)$ e $T(1,1,1) = (0,4)$.

Solução: Como os vetores $(1,1,2)$, $(1,2,3)$ e $(1,1,1)$ são L.I e $n = dim\mathbb{R}^3 = 3$, temos uma base. Denotando $v = (x,y,z)$, dispomos de:

$$(x,y,z) = \alpha_1.(1,1,2) + \alpha_2.(1,2,3) + \alpha_3.(1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = x \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = y \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = y \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos: $\alpha_1 = x - 2y + z$, $\alpha_2 = -x + y$ e $\alpha_3 = x + y - z$. Substituindo:

$$T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3)$$

$$T(x,y,z) = (x - 2y + z).T(1,1,2) + (-x + y).T(1,2,3) + (x + y - z).T(1,1,1)$$

$$T(x,y,z) = (x - 2y + z).(-1,5) + (-x + y).(-2,7) + (x + y - z).(0,4)$$

$$T(x,y,z) = (-x + 2y - z, 5x - 10y + 5z) + (2x - 2y, -7x + 7y) + (0, 4x + 4y - 4z).$$

$$\boxed{T(x,y,z) = (x - z, 2x + y + z)}.$$

Faça o teste com os vetores.

25.9.1. Núcleo e imagem

Definição 25.9.1.1: Seja $T:V \to W$ uma transformação linear. Denominamos de **núcleo** de T e denotamos por $Nuc(T)$, o conjunto de vetores de V que T transforma em vetor nulo (em W), ou seja,

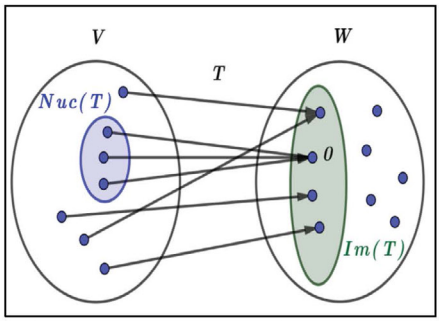
$$Nuc(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

Em outras palavras, o núcleo de uma transformação linear $T:V \to W$ é o conjunto de todos os vetores (em V) que são transformados em zero pela transformação. Veja a representação do núcleo na figura 25.9.1.1.

Definição 25.9.1.2: Seja $T:V \to W$ uma transformação linear. Denominamos de **Imagem** de T e denotamos por $Im(T)$, o conjunto de todas as possíveis respostas de T. Isto é,

$$Im(T) = \{T(v) \in W; v \in V\}.$$

De outra forma, a imagem de uma transformação linear $T:V \to W$ é o conjunto de todos os vetores (em W) obtidos pela transformação dos vetores do espaço original V. A representação da imagem está na figura 25.9.1.1.



Representação do núcleo e da imagem de uma transformação linear.
Figura 25.9.1.1

Teorema 25.9.1.1: Seja $T:V \to W$ uma transformação linear, então:

- $Nuc(T)$ é subespaço de V;
- $Im(T)$ é subespaço de W.

Demonstração:

Devemos demonstrar que $\forall\, u, v \in Nuc(T)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ implica em $(u + \alpha v) \in Nuc(T)$.

$$T(u + \alpha v) = \underbrace{T(u)}_{0} + \alpha.\underbrace{T(v)}_{0} = 0 \Rightarrow T(u + \alpha v) \in Nuc(T).$$

Agora, devemos demonstrar que $\forall\, u, v \in V$ de imagens $T(u) = w_1$, $T(v) = w_2 \in Im(T)$, implica em $(w_1 + \alpha w_2) \in Im(T)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Isso é imediato, uma vez que:

$$\underbrace{T(u + \alpha v)}_{\in Im(T)} = \underbrace{T(u)}_{w_1} + \alpha.\underbrace{T(v)}_{w_2} \Rightarrow (w_1 + \alpha w_2) \in Im(T).$$

Observe ainda que o vetor nulo pertence à ambos subespaços vetoriais.

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear definida por $T(x,y) = (x-y, x, 2x+y)$.

Como núcleo $Nuc(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$, isso nos dá o sistema:

$$(x-y, x, 2x+y) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}.$$

Cuja solução é $\boxed{x = y = 0}$.

Logo, $\boxed{Nuc(T) = \{(0,0)\}}$ e a dimensão desse subespaço é $\boxed{Dim(Nuc(T)) = 0}$.

A imagem dessa transformação linear é dado por $Im(T) = \{(x-y, x, 2x+y)\}$, que pode ser escrito na forma: $x.(1,1,2) + y.(-1,0,1)$. Como os vetores: $\{(1,1,2), (-1,0,1)\}$ são L.I (verifique!), temos uma base do subespaço $Im(T)$ e desse modo, $\boxed{Dim(Im(T)) = 2}$.

2º exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x-2y, 2x+z)$.

$Nuc(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$. Resolvendo o sistema

$$(x-2y, 2x+z) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x+z=0' \end{cases}$$

encontramos $\boxed{Nuc(T) = \{(2y, y, -4y); y \in \mathbb{R}\}}$, que pode ser escrito também na forma $y.(2,1,-4)$, resultando em uma base $\{(2,1,-4)\}$. Assim, $\boxed{Dim(Nuc(T)) = 1}$.

A $Im(T) = (x-2y, 2x+z)$ pode ser escrito como $x(1,2) + y(-2,0) + z(0,1)$. Embora sejam três vetores, uma base de $\mathbb{R}^2$ tem no máximo dimensão 2. Considerando os vetores L.I $\{(1,2), (-2,0)\}$ como a base, temos $\boxed{Dim(Im(T)) = 2}$.

3º exemplo (Transformação nula): Seja $T: V \to W$ uma transformação linear nula.

Como T transforma cada vetor de V em $\mathbf{0}$, então $Nuc(T) = V$;

Como $\mathbf{0}$ é a única imagem de T, então $Im(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Quanto às dimensões, temos: $Dim(Im(T)) = DimV = Dim(Nuc(T)) = 0$.

Teorema 25.9.1.2 (Teorema do núcleo e da imagem): Seja $T: V \to W$ uma transformação linear onde tem V dimensão finita, então

$$\boxed{Dim(Nuc(T)) + Dim(Im(T)) = DimV.}$$

Demonstração: Suponhamos que $Dim(Nuc(T)) = m$ e $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ uma base de $Nuc(T)$. Como $Nuc(T)$ é subespaço de V, então $m \leq DimV$.

Caso $m = DimV$, o teorema 25.7.3, nos garante que $Nuc(T) = V$ e, consequentemente, que

$$Im(T) = \{0\} \Rightarrow Dim(Im(T)) = 0.$$

Provando que a fórmula é válida.

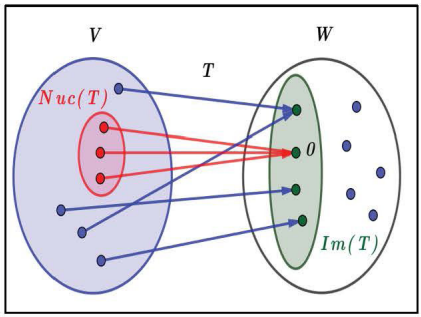


Figura 25.9.1.2

Caso $m < DimV$, como a ilustração da figura 25.9.1.2, o teorema 25.7.4 (teorema do completamento) nos diz que pode-se completar $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ de forma obter uma base de V. Completemos então α com n vetores de modo a formar a base:

$$\beta = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}.$$

Devemos mostrar apenas que $\{T(v_{m+1}), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base de $Im(T)$, uma vez que os outros vetores: $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3), \ldots, T(v_m)\}$, são nulos.

Como os vetores $\{T(v_{m+1}), \ldots, T(v_n)\}$ geram $Im(T)$, vamos mostrar que são linearmente independentes:

$$\beta_{m+1}T(v_{m+1}) \ldots + \beta_n T(v_n) = 0 \Rightarrow \beta_{m+1}v_{m+1} + .. \beta_n v_n \in Nuc(T).$$

Como α é uma base, então $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n \in Nuc(T)$, e assim:

$$\beta_{m+1}v_{m+1} + \cdots + \beta_n v_n = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m$$

$$\beta_{m+1}v_{m+1} + \cdots + \beta_n v_n - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 - \cdots - \alpha_m v_m = 0.$$

A única solução para essa equação consiste em todos coeficientes nulos (uma vez que é uma base), resultando inclusive em $\beta_{m+1} = \ldots = \beta_n = 0$. Provando o teorema.

Vamos analisar a validade desse teorema no três exemplos anteriores.

• No 1º exemplo, a transformação linear $\begin{cases} T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y) = (x-y, x, 2x+y) \end{cases}$ apresentou $\boxed{Dim(Nuc(T)) = 0}$ e $\boxed{Dim(Im(T)) = 2}$, como $\boxed{DimV = 2}$, dispomos de

$$\underbrace{Dim(Nuc(T))}_{0} + \underbrace{Dim(Im(T))}_{2} = \underbrace{DimV}_{2}.$$

• No 2º exemplo, $\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) = (x-2y, 2x+z) \end{cases}$ apresentou $\boxed{Dim(Nuc(T)) = 1}$ e

$\boxed{Dim(Im(T)) = 2}$, como $\boxed{DimV = 3}$, isso no dá:

$$\underbrace{Dim(Nuc(T))}_{1} + \underbrace{Dim(Im(T))}_{2} = \underbrace{DimV}_{3}.$$

• Enquanto a transformação nula do 3º exemplo, apresentou $Dim(Im(T)) = DimV = Dim(Nuc(T)) = 0$, o que confere que:

$$\underbrace{Dim(Nuc(T))}_{0} + \underbrace{Dim(Im(T))}_{0} = \underbrace{DimV}_{0}.$$

Teorema 25.9.1.3: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear, temos que T é injetiva se, e somente se, $Nuc(T) = 0$.

Demonstração: Como $0 \in Nuc(T)$, então $T(0) = 0$. Se $v \in Nuc(T)$, então $T(v) = 0$. Havendo injetividade, só há uma hipótese: a igualdade $(v = 0 \Rightarrow Nuc(T) = 0)$.

Agora, suponhamos que $Nuc(T) = 0$ e tomemos $u, v \in V$. Se $T(v) = T(u)$, isso equivale a

$$T(v) - T(u) = 0 \Rightarrow T(v - u) = 0 \Rightarrow v - u = 0 \Rightarrow v = u.$$

Demonstrando ser a função injetiva.

Teorema 25.9.1.4: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita. Se $DimV = DimW$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T é injetiva;

(b) $Nuc(T) = 0$;

(c) T é sobrejetiva;

(d) T é bijetiva.

(e) T transforma uma base de V em uma base de W.

Demonstração: Os itens (a) e (b) já foram demonstrados.

Se $Nuc(T) = 0$, pelo teorema do núcleo e da imagem, $Dim(Im(T)) = DimV$. Na hipótese de $DimV = DimW$, implica em $Dim(Im(T)) = DimW$, e pelo teorema 25.7.3, em $Im(T) = W$ e esse último, em sobrejetividade. A injetividade e sobrejetividade implica em bijetividade.

A demonstração do item (e) será cobrada nos exercícios.

Quando ocorre a bijetividade, dizemos que os espaços vetoriais envolvidos são **isomorfos** ou que a transformação linear é um **isomorfismo**. Caso o isomorfismo (a bijeção) ocorra em um operador linear $T: V \to V$, dizemos que é um **automorfismo**.

O teorema anterior nos garante que, só há um isomorfismo (bijetividade) em uma transformação linear $T: V \to W$ se $DimV = DimW$. E obviamente, só haverá bijetividade (isomorfismo), se $DimV = DimW$, conforme o teorema a seguir.

Teorema 25.9.1.5: Dois espaços V e W de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, $DimV = DimW$.

A transformação linear $T: P_{n-1} \to \mathbb{R}^n$, por exemplo, é sobrejetiva e injetiva (isomorfismo), pois a base natural $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ de P_n gera todo o espaço $\mathbb{R}^n$:

$$a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + \cdots + a_n.x^n \to (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n).$$

Os espaços vetoriais $M_{m\times n}$ e $\mathbb{R}^{m.n}$ são isomorfos, considerando a base natural: $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ de $M_{m\times n}$, pois essa gera todo o espaço $\mathbb{R}^{m.n}$. Como exemplo, veja a transformação linear $T: M_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$:

$$a_0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + a_1.\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + a_2.\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + a_3.\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \to (a_0, a_1, a_2, a_3).$$

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x-y, x)$.

Como $Nuc(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}$, isso nos dá o sistema:

$$(x-y, x) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

E a seguinte solução: $\boxed{Nuc(T) = \{(0,0,z); z \in \mathbb{R}\}}$, que pode ser escrita na forma $z.(0,0,1)$, resultando em base $\{(0,0,1)\}$. Assim, $\boxed{Dim(Nuc(T)) = 1}$.

A $Im(T) = (x-y, x)$ pode ser escrito como $x(1,1) + y(-1,0)$. Como os vetores: $\{(1,1), (-1,0)\}$, são L.I, temos: $\boxed{Dim(Im(T)) = 2}$.

A função T é sobrejetiva, pois $DimV = Dim(Im(T))$. Mas não é injetiva, uma vez que $Nuc(T) \neq 0$.

2º exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x,y) = (x-2y, 2x-4y)$.

Resolvendo os sistema:

$$(x-2y, 2x-4y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases},$$

encontramos $\boxed{Nuc(T) = \{(2y, y); y \in \mathbb{R}\}}$, que pode ser escrito na forma $y.(2,1)$ **e** resultando em base $\{(2,1)\}$. Assim, $\boxed{Dim(Nuc(T)) = 1}$.

A $Im(T) = (x-2y, 2x-4y)$ pode ser escrito como $x(1,2) + y(-2,-4)$. Os vetores: $\{(1,2), (-2,-4)\}$ **não** são L.I. Dessa forma: $\boxed{Dim(Im(T)) = 1}$.

A função T não é sobrejetiva, pois $DimV > Dim(Im(T))$. E nem injetiva, porque $Nuc(T) \neq 0$.

Observe nesse exemplo, que por mais que $DimV = DimW$, não temos um isomorfismo, pois $\{(1,2), (-2,-4)\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$. Ser uma base é uma condição necessária para ser um isomorfismo, conforme o teorema 25.9.1.4 - item (e), e também suficiente, conforme o teorema 25.9.1.6 que está nos exercícios. De uma forma geral, quando se diz que: "dois espaços V e W de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, $DimV = DimW$", está subentendido que o isomorfismo ocorre entre as bases de ambos os espaços vetoriais.

EXERCÍCIOS 25.6

1) Determina se a função é uma transformação linear, em cada caso.

a) A função $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $T(x,y)=cx$ $(c\in\mathbb{R})$;

b) A função $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $T(x,y)=x+2y$;

c) A função $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $T(x,y)=xy$;

d) A função $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x+y,z+2)$;

e) A função $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y)=(x+y,x-y,x^2)$;

f) A função $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z,w)=(x,x^2,0)$;

g) A função $T:\mathbb{R}^2\to M_{2x2}$ definida por $T(x,y)=\begin{bmatrix} x & y \\ x+y & x-y \end{bmatrix}$;

h) A função $T:M_{2x2}\to\mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)=x+y-3z+w$;

i) A função $T:M_{2x2}\to\mathbb{R}$ definida por $T\left(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\right)=x^2$;

j) A função $T:M_{m\times n}\to M_{m\times n}$ definida por $T(A)=A^t$ (onde A^t é a transposta de A);

k) A função $T:P_2\to P_2$ definida por $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_1(x-1)+(a_2+1)x^2$;

l) A função $T:f(x)\to f(x)$ de funções integráveis, definida por:

$$T(f(x))=c.\int f(x)\,dx\ (c\in\mathbb{R}).$$

2)Sendo uma transformação linear T em que $T(u)=3u$ e $T(v)=5v$. Calcule em função de u e v:

a) $T(u+v)$; b) $T(u-2v)$.

3)Dada uma transformação linear qualquer T, prove que $T(-u)=-T(u)$.

4) Calcule a função da transformação linear, em cada caso.

a) $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $T(-2)=5$;

b) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tal que $T(1,-1)=5$ e $T(3,2)=5$;

c) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0)=(1,1)$ e $T(0,2)=(0,-6)$;

d) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1)=(1,0,3)$ e $T(-1,0)=(-1,-1,-1)$;

e) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(0,1,1)=(2,-1)$, $T(1,2,0)=(8,1)$ e $T(1,1,1)=(4,4)$.

f) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que $T(0,4,6)=(0,10,6)$, $T(-1,2,7)=(-1,9,7)$ e $T(5,2,-3)=(5,-1,-3)$.

5)Calcule a base e a dimensão dos núcleos e das imagens das transformações lineares de cada item da questão anterior. E verifique quais dessas transformações lineares são injetivas, sobrejetivas e bijetivas.

6)Calcule $Nuc(T)$ e $Im(T)$ das transformações lineares T a seguir e faça uma interpretação geométrica de cada conjunto.

a) $\begin{cases} T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) = (x+2y, 5x-y) \end{cases}$

b) $\begin{cases} T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) = (x+y, 4x+4y) \end{cases}$

c) $\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) = (x-2y-z, 2x+y+2z, -3x+2y-z) \end{cases}$

d) $\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) = (x, y+x, -x+2y-z) \end{cases}$

7)Verifique em quais transformações lineares da questão anterior tem-se um isomorfismo.

8)Encontre uma transformação linear: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor: $\{(1,5)\}$.

9)Encontre uma transformação linear: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelos vetores: $\{(1,2,0), (-1,0,3)\}$.

10)Encontre uma transformação linear: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja gerada pelos vetores: $\{(3,2,1), (-1,2,5), (0,1,4\}$ e verifique se é um automorfismo.

11)Explique por que não existe uma transformação linear $T: V \to W$ injetiva quando $DimV > DimW$. De forma similar, explique por que essa transformação não pode ser sobrejetiva quando $DimV < DimW$.

12)Verdadeiro ou falso:

a) ( ) O núcleo de uma transformação linear é um espaço vetorial;

b) ( ) A imagem de uma transformação linear é um espaço vetorial;

c) ( ) A imagem de uma transformação linear é um subespaço vetorial do núcleo;

d) ( ) A imagem de uma transformação linear $T: V \to W$ é um subespaço vetorial de V;

e) ( ) O núcleo de uma transformação linear $T: V \to W$ é um subespaço vetorial de V;

f) ( ) Seja a transformação linear $T: V \to W$. O subconjunto formado por todos os vetores de V cujas imagens em W são não nulas é um subespaço vetorial de V.

g) ( ) O vetor nulo é elemento do núcleo e da imagem de uma transformação linear.

h) ( ) Uma transformação linear é injetiva, se ela é sobrejetiva.

i) ( ) Se uma transformação linear entre espaços vetoriais de mesma dimensão é injetiva, então ela é sobrejetiva.

j) ( ) Se uma transformação linear entre espaços vetoriais de mesma dimensão é sobrejetiva, então ela é bijetiva.

k) ( )Se vetor nulo é o único elemento do núcleo, então a transformação linear é um isomorfismo.

l) ( ) Se $DimV = DimW$, então a transformação linear $T: V \to W$ é um isomorfismo.

m) ( ) Existe algum subespaço de M_{2x5} que é isomorfo à $\mathbb{R}^9$.

n) ( ) Qualquer espaço vetorial de dimensão m é isomorfo à $\mathbb{R}^m$.

13)Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 25.9.1.6: Seja $T: V \to W$ um isomorfismo. Então $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ é uma base de V se, e somente se, $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3), \ldots, T(v_m)\}$ é uma base de W.

14)(SSPM) O núcleo da transformação linear $T(x, y, z) = (x + y - z, x - y - z, ax + y + z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tem dimensão 1. Sendo assim, pode-se afirmar que a é igual a

a) -2

b) -1

c) 0

d) 1

e) 2

15)(IFMT) Sobre a transformação linear $T: \mathrm{M}(2,2) \to \mathbb{R}^4$, dada por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a + c + d, c + b + d, b + c, b)$ é correto afirmar:

a) T é uma função injetiva, mas não sobrejetiva.

b) T é uma função injetiva e sobrejetiva.

c) T é uma função sobrejetiva, mas não injetiva.

d) T não é uma função.

e) Não é possível afirmar nada sobre a injetividade de T.

16)(VUNESP) Dada a transformação linear $T: \mathrm{P}_2 \to \mathbb{R}^4$, em que $T(ax^2 + bx + c) = (-a - 3c, a + 3b, 2a + 6c, -b + c)$ é correto afirmar que ela

a) É um isomorfismo, pois é injetora mas não sobrejetora.

b) Não é isomorfismo, pois é injetora mas não sobrejetora.

c) É isomorfismo, pois é injetora e sobrejetora.

d) Não é isomorfismo, pois é sobrejetora, mas não injetora.

e) Não é isomorfismo, pois não é injetora e também não é sobrejetora.

25.9.2. Matriz de uma transformação linear

Vimos em mudança de base que podemos associar uma matriz de transição de uma base para outra em um mesmo espaço vetorial. Nesta subseção, iremos calcular a matriz de transição entre bases de espaços vetoriais diferentes, denominada **matriz da transformação linear.**

Sejam $T: V \to W$ uma transformação linear e as bases $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$ de V e W, respectivamente. Podemos escrever o vetor $T(v_i)$ de modo único, conforme o teorema 25.9.2, usando a base β, da seguinte forma:

$$\boxed{T(v_i) = a_{1i}w_1 + \ldots + a_{ji}w_j + \ldots + a_{mi}w_m \quad com\ 1 \leq i \leq n\ e\ 1 \leq j \leq m.} \quad (1).$$

Agora, seja $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \ldots + \alpha_n v_n$ um vetor de V. O mesmo teorema 25.9.2 nos permite inferir que

$$\boxed{T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \alpha_3 T(v_3) + \ldots + \alpha_n T(v_n)} \quad (2).$$

Substituindo (1) em (2), encontramos

$$[T(v)]_\beta = \alpha_1(a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m) + \alpha_2(a_{12}w_1 + \cdots + a_{m2}w_m) + \cdots + \alpha_n(a_{1n}w_n + \ldots + a_{mn}w_m).$$

Tal expressão pode ser escrita na forma matricial como:

$$[T(v)]_\beta = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}}_{[T]_\beta^\alpha} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{[v]_\alpha}$$

$[T]_\beta^\alpha$ é a matriz de transformação linear da base α para a base β, consoante a definição a seguir.

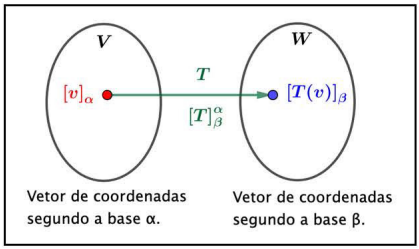
Definição 25.9.2.1: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$, bases de V e W, respectivamente. Denomina-se **matriz da transformação linear** uma matriz $[T]_\beta^\alpha$ de ordem $m \times n$, tal que:

$$\boxed{[T(v)]_\beta = [T]_\beta^\alpha . [v]_\alpha.}$$

A matriz de transformação linear é uma representação matricial que relaciona as coordenadas dos vetores de uma base para as coordenadas dos vetores de outra base, em espaços vetoriais distintos. Essa transformação ocorre entre as coordenadas dos vetores e não diretamente entre os vetores em si, permitindo que a transformação seja independente do sistema de coordenadas adotado.

Para esclarecer, quando um vetor é expresso como uma combinação linear dos vetores de uma base, a matriz de transformação linear atua nas coordenadas desse

vetor, produzindo as coordenadas correspondentes na outra base. Esse processo está ilustrado na figura a seguir.



Nesse contexto, para calcular a matriz de uma transformação linear, podemos seguir os seguintes passos:

1) Escolha uma base (sugerimos que sejam canônicas) para o espaço vetorial V e outra base para o espaço vetorial W. Caso essas bases não sejam informadas.

2) Calcule os vetores gerados aplicando a transformação linear nos vetores da base de origem α.

3) Encontre os vetores de coordenadas de cada um dos vetores gerados, segundo à base β.

4) Organize os vetores de coordenadas em colunas formando uma matriz. Essa matriz é a matriz da transformação linear.

Exemplo: Sejam as bases $\alpha = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Vamos calcular $[T]^\alpha_\beta$, onde $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y) = (x, 2x-y, 2y)$.

Solução: Como as bases já foram informadas, vamos calcular os vetores gerados aplicando a transformação linear segundo os vetores da base α.

$$T(x,y) = (x, 2x-y, 2y) \Rightarrow \begin{cases} T(1,1) = (1,1,2) \\ T(0,1) = (0,-1,2) \end{cases}.$$

Agora, vamos encontrar os vetores de coordenadas de cada um desses vetores gerados, segundo a base β.

$$(1,1,2) = a_{11}.(1,0,1) + a_{21}.(0,1,0) + a_{31}.(1,1,0).$$

$$\begin{cases} a_{11} + a_{31} = 1 \\ a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{11} = 2 \end{cases} \Rightarrow a_{11} = 2;\ a_{31} = -1 \ e \ a_{21} = 2.$$

$$(0,-1,2) = a_{12}.(1,0,1) + a_{22}.(0,1,0) + a_{32}.(1,1,0).$$

$$\begin{cases} a_{12} + a_{32} = 0 \\ a_{22} + a_{32} = -1 \\ a_{12} = 2 \end{cases} \Rightarrow a_{12} = 2;\ a_{32} = -2 \ e \ a_{22} = 1.$$

Por fim, escrever esses vetores de coordenadas dispostos em coluna:

$$[T]^\alpha_\beta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Definição 25.9.2.2: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear e $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_m\}$, bases de V e W, respectivamente. Podemos escrever uma transformação linear em forma de matriz da seguinte maneira:

$$T(X) = [Im].[X]_\alpha.$$

Onde $[Im]$ é a matriz formada pelos vetores da base de $Im(T)$ dispostos em coluna e $[X]_\alpha$ um vetor de coordenadas genérico na base α em forma de coluna.

No exemplo anterior, $T(x,y) = (x, 2x - y, 2y)$ pode ser escrito como $T(x,y) = x.(1,2,0) + y.(0,-1,2)$. O que equivale na forma matricial em:

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{[Im]} . \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[X]_\alpha}.$$

Como $Im(T)$ é um subespaço de W gerado pelos vetores em coluna de $[Im]$, denominamos $Im(T)$ de **espaço coluna** da matriz $[Im]$.

Uma solução alternativa utilizando matrizes: A matriz de transição entre bases de um mesmo espaço vetorial, segundo o teorema 25.8.3, é dado por

$$[\,T\,]_\beta^\alpha = \left[[T]_e^\beta\right]^{-1}.[T]_e^\alpha.$$

Esse teorema pode ser aplicado a espaços vetoriais distintos de mesma dimensão e, além disso, a transformação em si nos garante a extensão para espaços vetoriais distintos de dimensões distintas. Desse modo, podemos substituir $[T]_e^\alpha$ por $[Im].[T]_e^\alpha$:

$$\boxed{[\,T\,]_\beta^\alpha = \left[[T]_e^\beta\right]^{-1}.[Im].[T]_e^\alpha}.$$

Conforme o teorema 25.9.2.1 seguir.

As notações $[T]_e^\beta$ e $[T]_e^\alpha$ utilizadas em mudança de base - subseção 25.8.2, referem-se às matrizes de mudança de base de β e α para a base canônica (e), respectivamente. Para evitar confusão com a matriz de transformação linear, utilizaremos as notações $[\beta]$ e $[\alpha]$, para representar as matrizes formadas pelos vetores das bases β e α em forma de coluna.

Teorema 25.9.2.1: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear com α e β, bases de V e W, respectivamente. A matriz de transformação linear $[\,T\,]_\beta^\alpha$, pode ser dado pelo produto matricial:

$$[\,T\,]_\beta^\alpha = [\beta]^{-1}.[Im].[\alpha]$$

Assim, para encontrar $[\,T\,]_\beta^\alpha$ devemos multiplicar: a inversa da matriz dos vetores de β, pelo produto da matriz dos vetores de $Im(T)$ com a matriz dos vetores

de α. Todos os vetores, em cada caso, dispostos em coluna.

No exemplo anterior, $[\beta]=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ sua inversa é $[\beta]^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}$, a matriz $[Im]=\underbrace{\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{vmatrix}}$ e $[\alpha]=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$. Assim,

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\\0&2\end{vmatrix}.\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\1&-1\\2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\2&1\\-1&-2\end{vmatrix}.$$

Mesma matriz do exemplo anterior.

Embora a função de transformação linear $T:V\to W$ seja única, ou seja, independa das bases escolhidas para V e W, a matriz de transformação associada a essa transformação, depende dessas bases (analise o produto matricial do teorema 25.9.2.1). Ao recalcular o exemplo anterior em outra base, o resultado da matriz de transformação linear será diferente.

2º exemplo: Sejam as bases $\alpha=\{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta=\{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Vamos calcular $T(x,y)$ de $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, sabendo que $[T]_{\beta}^{\alpha}=\begin{vmatrix}2&2\\2&1\\-1&-2\end{vmatrix}$.

Solução: Esse exemplo é o processo inverso do 1º exemplo.

1º passo: Devemos calcular o vetor de coordenadas de um vetor genérico (x,y) segundo a base α e dispô-los em forma de matriz.

$$(x,y)=a(1,1)+b.(0,1)\Rightarrow a=x\ e\ b=y-x\Rightarrow\begin{vmatrix}x\\y-x\end{vmatrix}.$$

Isso significa que o vetor de coordenadas de qualquer vetor (x,y) é $(x,y-x)$, segundo a base α .

2º passo: Multiplicar a matriz de transformação por esse vetor de coordenadas.

$$\begin{vmatrix}2&2\\2&1\\-1&-2\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}x\\y-x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2y\\y+x\\-2y+x\end{vmatrix}.$$

Significa que qualquer vetor de coordenadas $(x,y-x)$ segundo a base α é transformado em um vetor de coordenadas $(2y,y+x,-2y+x)$ consoante a base β.

3º passo: Como esse é um vetor de coordenadas segundo a base β, devemos multiplicar os seus elementos pela base β. Logo,

$$T(x,y)=2y(1,0,1)+(y+x)(0,1,0)+(-2y+x)(1,1,0)$$

$$T(x,y)=(2y-2y+x,y+x-2y+x,2y)\Rightarrow\boxed{T(x,y)=(x,2x-y,2y)}.$$

Uma solução alternativa pode ser encontrada utilizando o produto de matrizes, conforme a seguir.

Isolando a matriz $[Im]$ do teorema 25.9.2.1, temos:

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = [\beta]^{-1}.[Im].[\alpha]$$

$$[\beta].[T]_{\beta}^{\alpha} = \underbrace{[\beta][\beta]^{-1}}_{I}.[Im].[\alpha]$$

$$[\beta].[T]_{\beta}^{\alpha} = [Im].[\alpha]$$

$$[\beta].[T]_{\beta}^{\alpha}.[\alpha]^{-1} = [Im].\underbrace{[\alpha].[\alpha]^{-1}}_{I}$$

$$[Im] = [\beta].[T]_{\beta}^{\alpha}.[\alpha]^{-1}$$

Segunda a definição 25.9.2.2, $T(X) = [Im].[X]_{\alpha}$, o que nos dá:

$$\boxed{T(X) = [\beta].[T]_{\beta}^{\alpha}.[\alpha]^{-1}.[X]_{\alpha}}.$$

Demonstrando o seguinte teorema.

Teorema 25.9.2.2: Seja $T: V \to W$ uma transformação linear com α e β, bases de V e W, respectivamente. A transformação linear $T(x,y)$ pode ser dado pelo produto matricial:

$$T(X) = [\beta].[T]_{\beta}^{\alpha}.[\alpha]^{-1}.[X]_{\alpha}$$

O exemplo anterior pode ser resolvido da seguinte forma:

$$T(x,y) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}.\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}}_{[\alpha]^{-1}}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} =$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}.\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}.\begin{vmatrix}2y\\ x+y\\ x-2y\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x\\ 2x-y\\ 2y\end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{T(x,y) = (x, 2x-y, 2y)}.$$

3º exemplo: Sejam as bases $\alpha = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\beta = \{(1,0),(0,1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Vamos calcular $[T]_{\beta}^{\alpha}$, onde $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T(x,y,z) = (x-2y, 2x+z)$.

Solução:

$$T(1,0,0) = (1,2) = a_{11}.(1,0) + a_{21}.(0,1) \Rightarrow a_{11} = 1 \text{e } a_{21} = 2;$$

$$T(0,1,0) = (-2,0) = a_{12}.(1,0) + a_{22}.(0,1) \Rightarrow a_{12} = -2 \; e \; a_{22} = 0;$$

$$T(0,0,1) = (0,1) = a_{13}.(1,0) + a_{23}.(0,1) \Rightarrow a_{13} = 0 \; e a_{23} = 1.$$

$$\text{Assim, } [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Caso α e β sejam bases canônicas, a matriz de transformação linear $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é a própria matriz $[Im]$ da transformação. Pois,

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \underbrace{[\beta]^{-1}}_{identidade}.[Im].\underbrace{[\alpha]}_{identidade} \Rightarrow [T]_{\beta}^{\alpha} = [Im].$$

O exemplo anterior poderia ser resolvido da seguinte forma:

$$T(x,y,z) = (x-2y, 2x+z) = x(1,2) + y.(-2,0) + z.(0,1).$$

A matriz de transformação é, portanto, $[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4º exemplo: Calcule a função da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1) = (0,1,3)$ e $T(1,2) = (-1,1,4)$.

Solução:

1º passo: Devemos calcular o vetor de coordenadas de um vetor genérico (x,y) segundo a base α e dispô-los em forma de matriz.

$$(x,y) = a(1,1) + b.(1,2) \Rightarrow a = y + 2x \text{ e } b = y - x \Rightarrow \begin{vmatrix} -y+2x \\ y-x \end{vmatrix}.$$

2º passo: Considerando a base canônica para β (base de destino), a matriz de transformação será dado por:

$$(0,1,3) = a_{11}.(1,0,0) + a_{21}.(0,1,0) + a_{31}.(0,0,1) \Rightarrow a_{11} = 0, a_{21} = 1 \text{ e } a_{31} = 3;$$

$$(-1,1,4) = a_{21}.(1,0,0) + a_{22}.(0,1,0) + a_{32}.(0,0,1) \Rightarrow a_{21} = -1, a_{22} = 1 \text{ e } a_{32} = 4.$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Observe que ao considerar a base β canônica, a matriz de transformação coincide com as imagens dos vetores.

3º passo: Multiplicar a matriz de transformação pelo vetor de coordenadas.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} -y+2x \\ y-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y \\ x \\ 2x+y \end{vmatrix}.$$

4º passo: Como esse é um vetor de coordenadas segundo a base β, devemos multiplicar os seus elementos pela base β.

$$T(x,y) = (x-y)(1,0,0) + x(0,1,0) + (2x+y)(0,0,1) \Rightarrow \boxed{T(x,y) = (x-y, x, 2x+y)}.$$

Outra solução utilizando produto matricial:

$$T(X) = [\beta].[T]_{\beta}^{\alpha}.[\alpha]^{-1}.[X]_{\alpha}.$$

Considerando a base canônica para β, a matriz de transformação será formada pelas imagens dos vetores:

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Além disso,

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\alpha]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nesses termos,

$$T(X) = \underbrace{[\beta]}_{I}.\underbrace{[T]_{\beta}^{\alpha}}_{\substack{imagem \\ dos\ vetores}}.[\alpha]^{-1}.[X]_{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$T(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x \\ 2x+y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{T(x,y) = (x-y, x, 2x+y)}.$$

25.9.3. Operador linear

Quando a transformação linear for de um espaço vetorial V nele mesmo ($T: V \to V$), dizemos que essa transformação é um **operador linear** do espaço vetorial V e a matriz associada $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é uma **matriz do operador linear** de V.

Teorema 25.9.3.1: Sejam α e β duas bases de um espaço de dimensão finita V. A matriz $[T]_{\beta}^{\alpha}$ do operador linear $T: V \to V$ é invertível e sua inversa é a matriz $[T]_{\alpha}^{\beta}$.

Demonstração:

Pela definição 25.9.2.1, temos: $[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha}.[v]_{\alpha}$ e $[T(v)]_{\alpha} = [T]_{\alpha}^{\beta}.[v]_{\beta}$.

Como é um operador linear $T: V \to V$, temos: $[v]_{\alpha} = [T(v)]_{\alpha}$ e $[T(v)]_{\beta} = [v]_{\beta}$. Substituindo, encontramos:

$$[T(v)]_{\beta} = [T]_{\beta}^{\alpha}.[T]_{\alpha}^{\beta}.[v]_{\beta}.$$

A igualdade só e possível se $[T]_{\alpha}^{\beta}.[T]_{\beta}^{\alpha} = I$ (matriz identidade), o que equivale a dizer que a inversa de $[T]_{\beta}^{\alpha}$ é $[T]_{\alpha}^{\beta}$ (e vice-versa). A existência dessa inversa é garantida pelo isomorfismo, pois a função de transformação linear é bijetiva.

Para encontrar a função inversa da transformação T^{-1} podemos utilizar a fórmula matricial a seguir.

De acordo com o teorema 25.9.2.2:

$$T(X) = [\beta].[T]_{\beta}^{\alpha}.[\alpha]^{-1}.[X]_{\alpha}.$$

A inversa, trocando as bases, é:

$$\boxed{T^{-1}(X) = [\alpha].[T]_{\alpha}^{\beta}.[\beta]^{-1}.[X]_{\beta}}$$

Exemplo: Sendo o operador linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x-y, -x+2y)$. Vamos calcular $T^{-1}(x,y)$.

Solução: Considerando as bases canônicas.

$$T(x,y) = (x-y, -x+2y) = x(1,-1) + y(-1,2).$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sua inversa é: $[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Logo: $T^{-1}(X) = \underbrace{[\alpha]}_{I}.[T]_{\alpha}^{\beta}.\underbrace{[\beta]^{-1}}_{I}.[X]_{\beta} = [T]_{\alpha}^{\beta}.[X]_{\beta}$.

$$T^{-1}(x,y) = [T]_{\alpha}^{\beta}.[X]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{T^{-1}(x,y) = (2x+y, x+y)}.$$

A imagem do vetor $(1, 2)$, por exemplo, é:

$$T(x,y) = (x-y, -x+2y) \Rightarrow T(1,2) = (1-2, -1+2.2) = (-1,3).$$

De forma inversa, o vetor cuja imagem é $(-1, 3)$ é o vetor:

$$T^{-1}(x,y) = (2x+y, x+y) \Rightarrow T^{-1}(-1,3) = (2.(-1)+3, -1+3) = (1,2).$$

2º exemplo: Sejam as bases $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,0),(1,-1,0)\}$, $\alpha = \{(2,1,1),(1,2,1),(-1,1,-2)\}$. Vamos calcular $T^{-1}(x,y,z)$, onde $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$.

Solução:

$$T(x,y,z) = x.(1,1,0) + y.(-1,1,0) + z.(0,0,1) \Rightarrow [Im] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\beta]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = [\beta]^{-1}.[Im].[\alpha] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}}.$$

Sua inversa é:

$$[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

$$T^{-1}(X) = [\alpha].[T]_{\alpha}^{\beta}.[\beta]^{-1}.[X]_{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$T^{-1}(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$\boxed{T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2}, z\right)}.$$

A imagem do vetor (1, 1, 0), por exemplo, é: $T(1,1,0) = (0,2,0)$.

De forma inversa, o vetor cuja imagem é $(0,2,0)$ é o vetor: $T^{-1}(0,2,0) = (1,1,0)$.

Como já dito anteriormente, embora a matriz de transformação linear mude de acordo com as bases, a função de transformação é única. Se o objetivo for apenas o cálculo de T^{-1} é indicado utilizar a base canônica. Veja:

$[Im] = [T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sua inversa é: $[T]_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Assim:

$$T^{-1}(x,y,z) = [T]_{\alpha}^{\beta}.[X]_{\beta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{-x+y}{2}, z\right)}.$$

Dentre os operadores lineares, podemos destacar os mais importantes do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$, que são as **reflexões, projeções, rotações e homotetias**. Vejamos alguns exemplos:

– Uma **reflexão** em $\mathbb{R}^2$ em torno do eixo x é dada pela matriz de transformação $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ou seja, $T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x,-y)$. Ver figura 25.9.3.1.

– Uma **projeção** em $\mathbb{R}^3$ sobre o plano xy é dada pela matriz de transformação $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, $T(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x,y,0)$. Ver figura 25.9.3.2.

– Uma **rotação** sob o ângulo θ em $\mathbb{R}^2$ a partir do eixo x, pode ser dada pelas coordenadas polares $(x = r.os\theta, y = r.sen\theta)$, através da matriz de transformação $\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$, onde $T(x,y) = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ver figura 25.9.3.3.

– Uma **homotetia** é dada pela transformação linear na forma $T(v) = cv$ (com $c \in \mathbb{R}$), podendo ocorrer dilatação, contração ou inversão de acordo com o valor de c. Veja uma contração em $\mathbb{R}^3$ na figura 25.9.3.4.

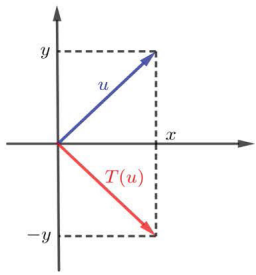


Figura 25.9.3.1

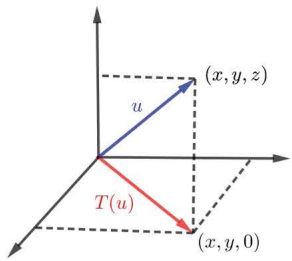


Figura 25.9.3.2

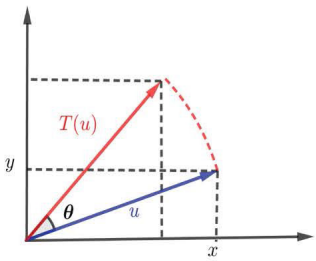


Figura 25.9.3.3

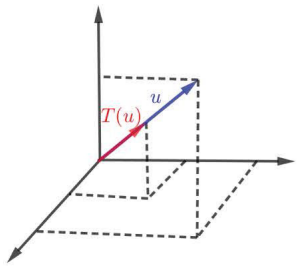


Figura 25.9.3.4

EXERCÍCIOS 25.7

1) Calcule a matriz da transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T(x,y,z) = x - y - 4z$.

2) Calcule a função $T(x,y)$ e a inversa $T^{-1}(x,y)$ da transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(5,1) = (3,6)$ e $T(1,5) = (6,2)$.

3) Calcule a matriz da transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y) = (2x + y, x - 2y, y - x)$.

4) Calcule a função $T(x,y)$ da transformação linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1,2,5) = (1,8)$, $T(-1,5,-4) = (6,0)$ e $T(1,2,3) = (1,6)$.

5) Sejam as bases $\alpha = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Calcule $[T]_\beta^\alpha$ onde $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y) = (x, x - y, y)$.

6) Sejam as bases $\alpha = \{(1,0,-1),(0,1,0),(1,1,1)\}$ e $\beta = \{(1,0),(0,-1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Calcule $[T]_\beta^\alpha$, onde $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é dada por $T(x,y,z) = (3x, x - y - z)$.

7) Sejam as bases $\alpha = \{(1,2),(0,1)\}$ e $\beta = \{(-1,0,-1),(0,1,1),(1,1,0)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Calcule $T(x,y)$, sabendo que $[T]_\beta^\alpha = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

8) Sejam as bases $\alpha = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Calcule $[T]_\beta^\alpha$, $[T]_\alpha^\beta$ e a inversa $T^{-1}(x,y)$, cuja transformação linear é dada por $T(x,y) = (2x + 3y, 4x - y)$.

9) Sejam as bases $\beta = \{(1,0,-1),(0,1,0),(1,-1,0)\}$, $\alpha = \{(2,1,1),(1,2,1),(-1,1,-2)\}$. Calcule $[T]_\beta^\alpha$, $[T]_\alpha^\beta$ e a inversa $T^{-1}(x,y,z)$, onde $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y,z) = (x - 2y, x + 2y, 2z)$.

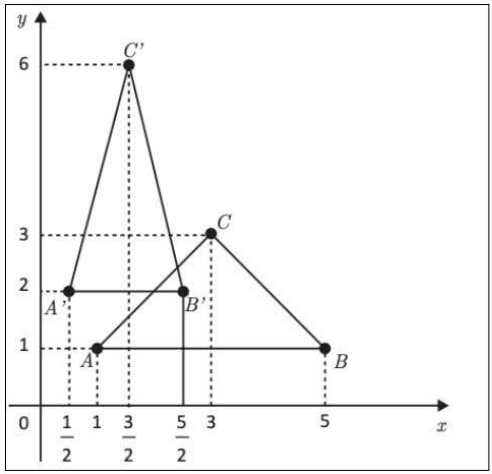
10) Dado o operador linear $T(x,y) = (x, x - y)$ em $\mathbb{R}^2$. Encontre uma base β sabendo que a base $\alpha = \{(2,1),(-1,2)\}$ e $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

11) Dado o operador linear $T(x,y,z) = (x, x - y, x - z)$ em $\mathbb{R}^3$. Encontre uma base α sabendo que a base $\beta = \{(2,1,1),(-1,0,2),(-1,-1,-1)\}$ e $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

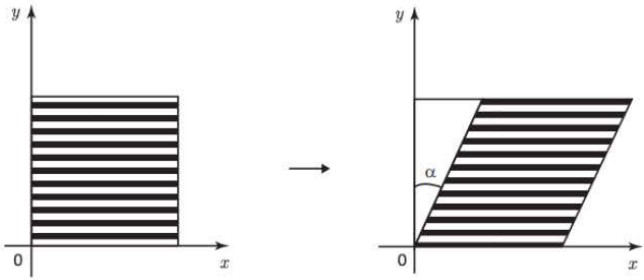
12) Seja uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to M_{2\times 2}$. Qual a ordem da matriz $[T]_\beta^\alpha$?

13) (ENADE 2017 – MATEMÁTICA) A respeito das transformações lineares no plano, avalie as afirmações a seguir.

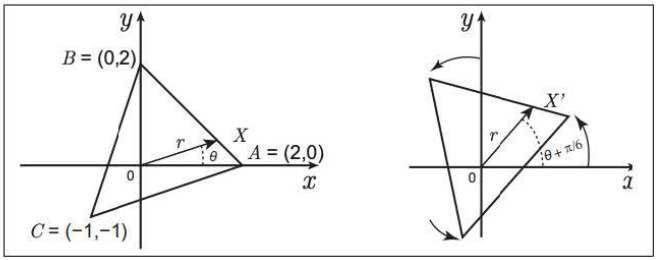
I – Sabendo que uma transformações de escala é um operador linear no plano cartesiano que multiplica a abscissa x de um ponto por um fator m e sua respectiva ordenada y por um fator n, a matriz associada à transformação de escala que leva, na figura ao lado, o triângulo ABC ao triângulo A'B'C' tem determinante igual a 1/2.



II – A transformação linear que leva a região plana hachurada do gráfico à esquerda na região hachurada do gráfico à direita é dada por $T(x,y) = (x, y + x.tg\alpha)$.



III – Na figura a seguir, a matriz de transformação linear que efetua a mudança do triângulo à esquerda para a posição mostrada à direita é $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.



É correto o que se afirma em:

a) I apenas; b) III, apenas; c)I e II, apenas; d)II e II apenas; e)I, II e III.

14) (ENADE 2021 – MATEMÁTICA) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada pela reflexão em torno do eixo x, seguida da rotação de 90º no sentido anti-horário e da dilatação de fator 2.

Com base nessas informações, é correto afirmar que T(20,24) é igual a:

a)(40, 48). b)(48, 40). c) (40, -48). d)(48, -40). e)(-48, -40).

15) (IFRO)Dadas as bases $\beta = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\delta = -\{(0,3,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, assinale a alternativa que apresenta a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ cuja matriz é $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) $T(x,y) = (x, -x + 9y, -x - 3y)$

b) $T(x,y) = (x, -x - 9y, x - 3y)$

c) $T(x,y) = (x, -10x + 9y, -4x + 3y)$

d) $T(x,y) = (x, -x + 9y, -4x + 3y)$

e) $T(x,y) = (x, -10x + 9y, 4x - 3y)$

16) (FEPESE) Relacione as matrizes abaixo com seus respectivos significados quanto às transformações lineares no espaço.

$$1.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2.\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad 3.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$4.\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad 5.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 6.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

( ) Matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao plano $x0y$.

( ) Matriz de transformação de projeção no espaço sobre o plano $x0z$.

( ) Matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao eixo y.

( ) Matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao plano $x0z$.

( ) Matriz de transformação de reflexão no espaço em relação ao eixo x.

( ) Matriz de transformação de reflexão na origem no espaço.

Assinale a alternativa que indica a sequência correta, de cima para baixo.

a) 1, 5, 4, 6, 3, 2.

b) 1, 6, 4, 5, 2, 3.

c) 2, 4, 6, 1, 3, 5.

d) 4, 6, 2, 5, 1, 3.

e) 6, 5, 1, 3, 4, 2.

25.9.4. Autovalores e autovetores

Os autovetores e os autovalores são conceitos importantes em álgebra linear que possuem muitas aplicações práticas como a resolução de sistemas de equações lineares, a diagonalização de matrizes e a análise de estabilidade de sistemas dinâmicos.

Definição 25.9.4.1: Seja $T: V \to V$ um operador linear. Denominamos de **autovalor** de T, um número real λ, se existir um vetor não nulo v, denominado de **autovetor**, tal que $T(v) = \lambda v$. Os espaços gerados pelos autovetores de cada autovalor é denominado de **autoespaço**.

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear $T(x,y) = (x - y, x + 3y)$. Vamos determinar os autovalores e os autovetores desse operador.

Solução:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow (x - y, x + 3y) = \lambda(x,y) \Rightarrow \begin{cases} x - y = \lambda x \\ x + 3y = \lambda y \end{cases} (1).$$

$$y = x - \lambda x \Rightarrow x + 3y = \lambda y \Rightarrow x + 3(x - \lambda x) = \lambda(x - \lambda x) \Rightarrow$$

$$x + 3x - 3\lambda x = \lambda x - \lambda^2 x \Rightarrow x(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0.$$

Como $x = 0$ implica em $y = 0$ e em vetor nulo (o que não pode ocorrer pela definição), resta $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2} \Rightarrow autovalor$.

Substituindo em (1), temos:

$$\begin{cases} x - y = \lambda x \\ x + 3y = \lambda y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -x}.$$

Assim, o autoespaço de T gerado pelo autovalor $\lambda = 2$, são os autovetores na forma $(x, -x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Observe que qualquer vetor na forma $(x, -x)$, pode ser transformado utilizando

$$T(x,-x) = \underbrace{2}_{Autovalor} \cdot \underbrace{(x,-x)}_{Autovetor},$$

sem utilizar a transformação linear original $T(x,y) = (x - y, x + 3y)$. Faça os testes!

2º exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear $T(x,y) = (y, -x)$. Vamos determinar os autovalores e os autovetores desse operador.

Solução:

$$T(x,y) = \lambda(x,y) \Rightarrow (y, -x) = \lambda(x,y) \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda x \\ -x = \lambda y \end{cases} \Rightarrow$$

$$-x = \lambda^2 x \Rightarrow x(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } \lambda^2 + 1 = 0.$$

Como $x = 0$ implica em $y = 0$ e vetor nulo, resta $\lambda^2 + 1 = 0$. Como não possui soluções reais, T não possui autovalores e nem autovetores.

25.9.5. Polinômio característico

Definição 25.9.5.1: Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Denominamos a matriz $t.I_n - A$ de **matriz característica** de A e o determinante dessa matriz, de **polinômio característico** $P_A(t)$.

Teorema 25.9.5.1: Seja $T: V \to V$ um operador linear e $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Um número real λ é um autovalor de T se, e somente se, λ é raiz do polinômio característico da matriz característica $[T]_\alpha^\alpha$, ou seja:

$$\boxed{\lambda.I_n - [T]_\alpha^\alpha = 0}$$

Demonstração:

Pela definição 25.9.2.1 (de matriz de transformação linear), temos

$$[T(v)]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha.[v]_\alpha \quad (1).$$

Da definição 25.9.4.1 (de autovetor e autovalor), temos

$$[T(v)]_\alpha = \lambda[v]_\alpha \quad (2).$$

Substituindo (1) em (2), dispomos de

$$\lambda[v]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha.[v]_\alpha.$$

O que equivale a:

$$\lambda[v]_\alpha - [T]_\alpha^\alpha.[v]_\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{(\lambda.I_n - [T]_\alpha^\alpha).[v]_\alpha = 0}\ (3).$$

Como v é o vetor não nulo, a solução do sistema linear homogêneo deve possuir soluções não triviais, ou seja, quando o determinante da matriz $\lambda.I_n - [T]_\alpha^\alpha$ for zero. Provando ser λ raiz do polinômio característico.

A expressão (3) nos remete ao seguinte teorema.

Teorema 25.9.5.2: v é um autovetor de T associado a λ se, e somente se, $[v]_\alpha$ é uma solução não trivial do sistema homogêneo $(\lambda.I_n - [T]_\alpha^\alpha).[v]_\alpha = 0$.

A demonstração das recíprocas desses teoremas ficam a cargo do leitor.

1º exemplo (o mesmo anterior): Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear $T(x,y) = (x-y, x+3y)$. Vamos determinar os autovalores e os autovetores desse operador.

Solução: Segundo o teorema 25.9.5.1, temos:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda.I_n - [T]_\alpha^\alpha = \lambda.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \Rightarrow \det = (\lambda-1)(\lambda-3)+1 \Rightarrow \det = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow$$

$$\det = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \Rightarrow \det = (\lambda-2)^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}\ \text{(multiplicidade 2).}$$

Pelo teorema 25.9.5.2, dispomos de:

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = -x}.$$

Assim, o autoespaço de T gerado pelo autovalor $\lambda = 2$, são os autovetores na forma $(x, -x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$.

2º exemplo (o mesmo anterior): Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear $T(x, y) = (y, -x)$. Vamos determinar os autovalores e os autovetores desse operador.

Solução:

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \lambda . I_n - [T]_{\alpha}^{\alpha} = \lambda . \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \Rightarrow det = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Como não possui soluções reais, T não possui autovalores e nem autovetores.

3º exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear $T(x, y, z) = (y + x, -x - y + z, -x + y + 2z)$. Vamos determinar os autovalores e os autovetores desse operador.

Solução:

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda . I_n - [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda + 1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$det = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Claramente $\lambda = 1$ é solução. Assim, o polinômio característico pode ser escrito da seguinte forma: $(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$. Cujas soluções são os autovalores: $\lambda = 1, \lambda = 2$ e $\lambda = -1$. Desse modo, para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = 0} \; e \; \boxed{z = x}.$$

O autoespaço de T gerado pelo autovalor $\lambda = 1$, são os autovetores na forma $(x, 0, x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$. Enquanto para $\lambda = 2$ é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = x} \; e \; \boxed{z = 4x}.$$

O autoespaço de T gerado pelo autovalor $\lambda = 2$, são os autovetores na forma $(x, x, 4x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$. Já para $\lambda = -1$, encontramos

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = -2x} \; e \; \boxed{z = x}.$$

O autoespaço de T gerado pelo autovalor $\lambda = -1$, são os autovetores na forma $(x, -2x, x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Importante observar que, como os autovalores λ são raízes de um polinômio, pode ocorrer de λ ser raiz real, raiz real com multiplicidade ou raiz complexa. Segundo a definição 25.9.4.1, apenas as raízes reais podem ser autovalores.

25.9.6. Diagonalização de operadores

O objetivo dessa subseção é encontrar, se possível, uma base α para um operador linear $T: V \to V$ de forma que a matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ seja uma matriz diagonal. Esse processo é denominado de diagonalização de operadores. Para entendê-lo, precisamos inicialmente de algumas definições e teoremas.

Definição 25.9.6.1 (Matriz semelhante): Se A e B forem matrizes quadradas, dizemos que B é **semelhante** a A, se existir alguma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}.A.P$.

Propriedades das matrizes semelhantes:

– Se B é semelhante a A, então A é semelhante a B.

Com efeito, se:

$$B = P^{-1}.A.P \Rightarrow P.B = P.P^{-1}.A.P \Rightarrow P.B.P^{-1} = A.P.P^{-1} \Rightarrow \boxed{P.B.P^{-1} = A}.$$

– Os determinantes de A e B são iguais.

De fato, pois:

$$B = P^{-1}.A.P \Rightarrow \det(B) = det(P^{-1}.A.P) \Rightarrow \det(B) = det(P^{-1}).det\,(A).det(P) \Rightarrow$$

$$\det(B) = \underbrace{det(P^{-1}).det(P)}_{1}.det\,(A) \Rightarrow \boxed{\det(B) = det\,(A)}.$$

Definição 25.9.6.2: Uma matriz A é dita **diagonalizável** se for semelhante a alguma matriz diagonal, ou seja, se existir uma matriz invertível P tal que $P^{-1}.A.P$ é diagonal. Quando isso ocorre dizemos que P **diagonaliza** A.

Teorema 25.9.6.1: O operador linear $T: V \to V$ admite uma base α pela qual a matriz $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é diagonal se, e somente se, essa base α for formada pelos autovetores de T.

Demonstração:

Seja $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ uma base de V pela qual $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ é uma matriz diagonal. Suponha que $[T]_{\alpha}^{\alpha}$ seja:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Para cada $1 \leq i \leq n$, temos

$$T(v_i) = 0.v_1 + \ldots + 0.v_{i-1} + a_i v_i + 0.v_{i+1} + \ldots + 0.v_n = a_i v_i \quad (1).$$

Segue que v_i é um autovetor associado ao autovalor a_i.

Agora, suponhamos que $\alpha = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ é uma base de V formada pelos autovetores de T. Assim: $T(u_i) = b_i u_i$ e pela definição, temos

$$[T(u)]_\alpha = [T]_\alpha^\alpha . [u]_\alpha \Rightarrow b_i u_i = [T]_\alpha^\alpha . [u]_\alpha \Rightarrow b_i u_i = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix} . [u]_\alpha .$$

Provando que $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz diagonal.

Vamos mostrar como consequência desse teorema, que a matriz $[\alpha]$ formada pelos autovetores de T diagonaliza $[T]_\alpha^\alpha$.

Pelo teorema 25.9.2.1, temos que

$$[T]_\beta^\alpha = [\beta]^{-1} . [Im] . [\alpha].$$

Fazendo $\beta = \alpha = \{u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n\}$ como uma base de V formada pelos autovetores de T, segue que

$$[T]_\alpha^\alpha = [\alpha]^{-1} . [Im] . [\alpha].$$

Pelo teorema 25.9.6.1 (anterior), $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz diagonal e pela definição 25.9.6.2, $[\alpha]$ diagonaliza $[T]_\alpha^\alpha$, uma vez que $[T]_\alpha^\alpha$ e $[Im]$ são semelhantes. E além disso, $[T]_\alpha^\alpha$ resulta em uma matriz diagonal formada pelos autovalores de T.

O problema que norteia essas afirmações é que nem todo operador linear possui autovetores e, quando possui, nem sempre eles são linearmente independentes. Além disso, mesmo quando os autovetores são linearmente independentes, pode ocorrer de haver uma quantidade inferior à dimensão do espaço vetorial do operador linear. A solução para esse impasse e a certeza da diagonalização de um operador linear estão consolidadas no teorema seguinte.

Teorema 25.9.6.2: Seja um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita n. $[T]_\alpha^\alpha$ é diagonalizável se, e somente se, T possui n autovetores linearmente independentes.

Demonstração: Se T é um operador linear de um espaço vetorial V de dimensão finita n, então:

($\Rightarrow$) Se $[T]_\alpha^\alpha$ é diagonalizável, então pela definição 25.9.6.2, existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}.A.P$ é diagonal. Pelo teorema 25.9.6.1, essa matriz P é formada pelos autovetores de T. Como P precisa ser invertível, T precisa possuir n autovetores linearmente independentes.

($\Leftarrow$) Por outro lado, se T possui n autovetores linearmente independentes, podemos ter uma base α formada por esses autovetores, assim, pelo teorema 25.9.6.1, $[\alpha]$ diagonaliza $[T]_\alpha^\alpha$.

Diante do exposto, segue um roteiro para diagonalização de um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita n.

1º passo: Calcular os autovalores e autovetores.

2º passo: Verificar se existem n autovetores linearmente independentes, caso contrário, o operador linear não é diagonalizável.

3º passo: Formar uma matriz P com os autovetores de T. Essa matriz diagonaliza o operador linear.

4º passo: Se certificar que $P^{-1}.A.P$ é uma matriz diagonal cujas entradas são os autovalores do operador linear.

No 1º exemplo anterior, vimos que o operador linear só possui um autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidade 2, que gera autovetores na forma $(x, -x)$. Como não é possível gerar autovetores L.I, o operador não é diagonalizável.

O 2º exemplo é um operador não diagonalizável porque não possui autovalores. Vamos ao 3º exemplo anterior.

3º exemplo (anterior): Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear $T(x,y,z) = (y + x, -x - y + z, -x + y + 2z)$. Vamos verificar se esse operador é diagonalizável.

Solução:

Vimos que $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e os autovalores foram: $\lambda = 1, \lambda = 2$ *e* $\lambda = -1$.

Para $\lambda = 1$, os autovetores são na forma $(x, 0, x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda = 2$, os autovetores são na forma $(x, x, 4x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Para $\lambda = -1$, os autovetores são na forma $(x, -2x, x)$, com $x \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Tomando $x = 1$, temos a matriz: $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ (são vetores L.I). Assim, sua inversa é:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Essa matriz diagonaliza $[T]_{\alpha}^{\alpha}$. Veja:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A \text{ ou } [T]_{\alpha}^{\alpha}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

E a matriz resultante é uma matriz diagonal cujas entradas são os autovalores.

4º exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear $T(x,y,z) = (3x, x+2y, -x+y+2z)$. Vamos verificar se esse operador é diagonalizável.

Solução:

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda . I_n - [T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 0 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$det = (\lambda - 3).(\lambda - 2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3 \; e \; \lambda = 2 \; (multiplicidade\; 2).$$

Para $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{y = -x} \; e \; \boxed{z = -2x} \Rightarrow (x, -x, -2x) \Rightarrow x.(1, -1, -2)$$

Para $\lambda = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{x = 0} \; e \; \boxed{y = 0} \Rightarrow (0, 0, z) \Rightarrow z.(0, 0, 1)$$

Como o operador linear possui apenas 2 autovetores linearmente independentes em um espaço vetorial de dimensão 3, concluímos que ele não é diagonalizável .

EXERCÍCIOS 25.8

1) Determine os autovalores e os autovetores dos seguintes operadores lineares:

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (x+y, -4x-3y)$.

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (2x+2y, y)$.

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x,y) = (2x-3y, 5x+5y)$.

d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (x+y, x+z, y-z)$.

e) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x,y,z) = (x, x+2z, y-z)$.

f) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por $T(x,y,z,w) = (x, x+z, -y-z, w-z)$.

g) $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ dado por $T\left(\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} x+2y-2z & y+z \\ 2z & 2w \end{vmatrix}$.

2) Encontre uma matriz P que diagonaliza os seguintes operadores lineares.

a) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -13 & -3 & 4 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3) Demonstre o seguinte teorema:

Teorema 25.9.6.3: Seja um operador linear T em um espaço vetorial V de dimensão finita n. Se T possui n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

4) Mostre que a recíproca do teorema não é válida, para isso, verifique que o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (-2z, x+2y+z, x+3z)$ é diagonalizável, embora possua autovalores não distintos.

5) Os autovalores de um operador linear são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 3$, cujos autovetores associados são, respectivamente: $v_1 = (1,2)$ e $v_2 = (0,1)$. Determine $T(x,y)$.

6) Os autovalores de um operador linear são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -2$, cujos autovetores associados são, respectivamente: $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_2 = (2,1,0)$. Determine $T(x,y,z)$.

7) Demonstre que o conjunto formado pelos autovetores de um operador linear $T:\mathrm{V} \to \mathrm{V}$ é um subespaço vetorial de V.

8) Demonstre que, se:

$$B = P^{-1}.A.P$$

Em que a matriz A é diagonalizável, então:

$$A^m = P^{-1}.B^m.P$$

9) Use a expressão do item anterior para calcular A^{20}, sendo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

10) (FADESP-UFPA) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (x+2y+3z, -x+2y-z, 3x+2y+z)$. Pode-se afirmar, sobre T, que

a) É diagonalizável.
b) Tem um único autovalor real
c) Tem dois autovalores reais
d) (1,0,1) é autovetor.
e) Não tem autovalores reais.

11) (MS CONCURSOS) Sejam $T: V \to V$ um operador linear e V o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Se $v \in V$, $v \neq 0$, é um autovetor do operador linear T com autovalor igual a -2, então os vetores v e $T(v)$ têm a mesma direção e:

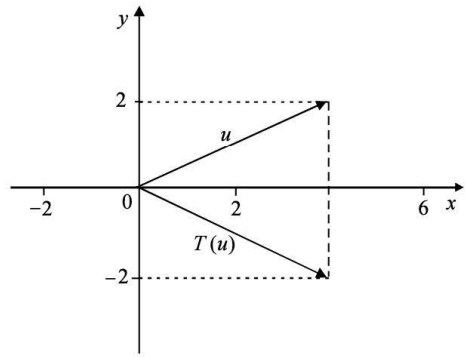
a) Sentidos opostos, além do módulo de v ser o dobro do módulo de $T(v)$.

b) Mesmo sentido, além do módulo de v ser o dobro do módulo de $T(v)$.

c) Sentidos opostos, além do módulo de v ser a metade do módulo de $T(v)$.

d) Mesmo sentido, além do módulo de v ser a metade do módulo de $T(v)$.

12) (ENADE 2008 – MATEMÁTICA) Uma transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ faz uma reflexão em relação ao eixo horizontal, conforme mostrado na figura a seguir.



Essa transformação T:

a) é dada por $T(x, y) = (-x, y)$.

b) tem autovetor $(0, -1)$ com autovalor associado igual a 2.

c) tem autovetor $(2, 0)$ com autovalor associado igual a 1.

d) tem autovalor de multiplicidade 2.

e) não é invertível.

13) (ENADE 2005 – MATEMÁTICA) O que é correto afirmar a respeito de um operador linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que possua os números 2 e 3 como únicos autovalores?

a) Pode existir uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz desse operador é da forma $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Existe base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz desse operador tem uma linha Nula.

c) Existe uma base de $\mathbb{R}^3$ na qual a matriz desse operador é da forma $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

d) É possível que o autoespaço associado a algum dos autovalores de T tenha dimensão 2.

e) O polinômio característico de T é igual a $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

25.10. Espaço com produto interno

Vimos em geometria analítica plana e espacial a definição de produto escalar entre dois vetores no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Nesta seção, estenderemos essa definição não só ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, como também a outros espaços vetoriais, chamados de **espaços com produto interno.**

Definição 25.10.1: Um produto interno em um espaço vetorial V é uma função que associa um número real $\langle u, v\rangle$ a cada par de vetores de V em que são válidos os seguintes axiomas:

(1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

(2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

(3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle v, u\rangle$;

(4) $\langle v, v\rangle \geq 0$;

(5) $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

Definição 25.10.2: Sejam os vetores $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ em $\mathbb{R}^n$. Definimos o **produto escalar** ou **produto interno usual** $\langle u, v\rangle$, como o número real dado por:

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots x_ny_n$$

É possível demonstrar que todos os axiomas da definição 25.10.1 são válidos para esse produto escalar, ou seja, que esse produto é um caso especial de produto interno em $\mathbb{R}^n$. Pela simplicidade, demonstraremos apenas o axioma (1) e as demais ficarão a cargo do leitor.

Sendo $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, segue que

$$\langle u, v\rangle = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n).$$

Pela definição 25.10.2, o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \ldots x_ny_n.$$

Isso equivale a

$$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 + \ldots y_nx_n = \langle v, u\rangle.$$

A seguir está um exemplo de produto interno não usual em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo: Sejam os vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\langle u, v\rangle = 5x_1.y_1 + 2.x_2.y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Devemos verificar se os cinco axiomas da definição 25.10.1 são válidos. Faremos a demonstração dos axiomas (1) e (2) e os demais ficarão como exercício.

$$\langle v, u\rangle = 5y_1.x_1 + 2.y_2.x_2 = 5x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 = \langle u, v\rangle.$$

Fazendo $w = (z_1, z_2)$, temos

$$\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle = 5x_1.z_1 + 2.x_2.z_2 + 5y_1.z_1 + 2.y_2.z_2 =$$
$$5(x_1 + y_1).z_1 + 2z_2(x_2 + y_2) = \langle u + v, w\rangle.$$

Outro exemplo de um produto interno (demonstração a cargo do leitor), pode ser dado em um espaço vetorial das matrizes $M_{n\times n}$, conforme a definição a seguir.

Definição 25.10.3: Sejam duas matrizes U e V de ordem n. Podemos definir o produto interno entre U e V como:

$$\langle U, V\rangle = Tr(U^T V)$$

Onde $Tr(U^T V)$ significa o traço da matriz $U^T V$, que equivale a soma dos elementos da diagonal principal.

Para entendermos como ocorre esse produto interno, veja o caso para as matrizes de ordem 2:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix} e\ V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \langle U, V\rangle = u_1.v_1 + u_2.v_2 + u_3.v_3 + u_4.v_4.$$

Em outras palavras, basta somar o produto dos elementos correspondentes (na mesma posição) de cada matriz.

Exemplo: Sejam as matrizes $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ u e $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ em $M_{3\times 3}$. Calcule o produto interno $\langle U, V\rangle$ consoante a definição 25.10.3.

Solução:

$$\langle U, V\rangle = \langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \rangle$$

$$\langle U, V\rangle = 1.0 + 0.2 + 1.(-1) + 2.1 - 1.2 + 2.2 - 4.0 - 2.(-1) + 3.0 \Rightarrow \boxed{\langle U, V\rangle = 5}.$$

Além disso, podemos utilizar a definição de produto interno para calcular distância e comprimento de vetores em espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, utilizando as definições a seguir.

Definição 25.10.3: Denominamos de **norma** ou **comprimento** do vetor de V e denotamos por $|v|$ o número real:

$$\boxed{|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle}}$$

Quando $|v| = 1$, dizemos que v é unitário.

Para $\mathbb{R}^2$, por exemplo, sendo $v = (x_1, x_2)$, temos

$$|v| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{x_1 x_1 + x_2 x_2} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}.$$

O que condiz com o comprimento de vetor já visto.

Definição 25.10.4: A **distância** entre dois vetores u e v de V denotada por $d(u,v)$ é definida por:

$$d(u,v) = |u-v| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$$

No $\mathbb{R}^n$, essa definição coincide com a distância entre dois pontos considerando o vetor posição. No $\mathbb{R}^3$ por exemplo, sendo $u=(x_1,x_2,x_3)$ e $v=(y_1,y_2,y_3)$, segue que

$$d(u,v) = |u-v| = |(x_1-y_1, x_2-y_2,\ x_3-y_3)|$$
$$d(u,v) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

O que corresponde a distância entre dois pontos no espaço.

A partir dessas definições e dos axiomas do produto interno é possível encontrar produtos internos, normas e distâncias, envolvendo operações entre vetores.

Exemplo: Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^n$ tal que $\langle u,v\rangle = 5$, $|v|=2$ e $|u|=1$, calcule:

a) $\langle u+v, 2u-3v\rangle$

Solução: Aplicando os axiomas da definição, temos:

$$\langle u+v, 2u-3v\rangle = \langle u+v, 2u\rangle - \langle u+v, 3v\rangle = \langle u,2u\rangle + \langle v,2u\rangle - \langle u,3v\rangle - \langle v,3v\rangle$$
$$\langle u+v, 2u-3v\rangle = 2.\underbrace{\langle u,u\rangle}_{|u|^2} + 2.\langle v,u\rangle - 3.\langle u,v\rangle - 3.\underbrace{\langle v,v\rangle}_{|v|^2}$$
$$\langle u+v, 2u-3v\rangle = 2.1 + 2.5 - 3.5 - 3.4 \Rightarrow \boxed{\langle u+v, 2u-3v\rangle = -15}.$$

b) $|u+v|$

Solução: Sendo dois vetores $u=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_n)$ e $v=(y_1,\ y_2,\ y_3,\ldots,\ y_n)$ em $\mathbb{R}^n$, temos

$$u+v = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ldots,\ x_n+y_n)$$
$$|u+v|^2 = (x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2+(x_3+y_3)^2+\ldots(x_n+y_n)^2$$
$$|u+v|^2 = (x_1^2+2x_1y_1+y_1^2)+(x_2^2+2.x_2y_2+y_2^2)+$$
$$({x_3}^2+2x_3y_3+{y_3}^2)+\ldots({x_n}^2+2x_ny_n+{y_n}^2)$$
$$|u+v|^2 = \underbrace{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2)}_{|u|^2} + \underbrace{(y_1^2+y_2^2+y_3^2+\cdots+y_n^2)}_{|v|^2} +$$
$$2.\underbrace{(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+\ldots x_ny_n)}_{\langle u,v\rangle}$$
$$\boxed{|u+v|^2 = |u|^2+|v|^2+2.\langle u,v\rangle}.$$

Será demonstrado adiante que essa identidade é válida para qualquer espaço vetorial e não somente para $\mathbb{R}^n$.

Assim, $|u+v|^2 = 1^2+2^2+2.5 = 15 \Rightarrow \boxed{|u+v| = \sqrt{15}}$.

25.10.1. Ângulo entre vetores e ortogonalidade

Sabemos do teorema 13.3.2.2 que o ângulo α entre os vetores não nulos u e v é dado por: $cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|u|.|v|}$ ($0° \leq \alpha \leq 180°$). A demonstração desse teorema foi feita com vetores em $\mathbb{R}^2$ e pode ser, seguindo os mesmo passos, facilmente demonstrada para o $\mathbb{R}^n$, conforme a definição a seguir (já utilizando a notação de produto interno atual).

Definição 25.10.1.1: O ângulo α entre os vetores u e v de um espaço vetorial com produto interno V pode ser dado por:

$$\boxed{\alpha = arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|.|v|}\right)} \quad ou \quad \boxed{cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{|u|.|v|}} \quad \text{Com } 0° \leq \alpha \leq 180°.$$

Exemplo: O ângulo α entre os vetores $u = (1,0,-1)$ e $v = (1,0,0)$ em $\mathbb{R}^3$ é:

Solução:

$$\langle u,v\rangle = 1.1 + 0.0 + (-1).0 = 1.$$

$$|u| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

$$|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1.$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|.|v|}\right) = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}.1}\right) \Rightarrow \alpha = arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{4}}.$$

2º exemplo: O ângulo α entre os vetores $u = (1,2,-1,0)$ e $v = (0,1,0,1)$ em $\mathbb{R}^4$ é:

Solução:

$$\langle v,u\rangle = 1.0 + 2.1 + (-1).0 + 0.1 = 2.$$

$$|u| = \sqrt{\langle u,u\rangle} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{6}.$$

$$|v| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|u|.|v|}\right) = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{6}.\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}.$$

α mede aproximadamente $35{,}26°$.

A fórmula da definição 25.10.1.1 pode ser estendida à espaços vetoriais arbitrários (e não só o $\mathbb{R}^n$). Para demonstração, precisamos do próximo teorema.

Teorema 25.10.1.1 (desigualdade de Cauchy-Schwarz[27]): Se u e v são vetores de um espaço vetorial com produto interno V, então:

$$\boxed{|\langle u, v\rangle| \leq |u|.|v|}$$

Demonstração: Suponhamos u e v não nulos. Então, para qualquer $k \in \mathbb{R}$, temos pelo axioma (4) da definição 25.10.1 que $\langle ku + v, ku + v\rangle \geq 0$. Isso equivale a

$$k^2\langle u, u\rangle + 2.\langle u, v\rangle k + \langle v, v\rangle \geq 0.$$

Como a equação polinomial e o coeficiente do termo k^2 são não negativos, segue que o discriminante da equação quadrática precisa ser um número não positivo. Assim:

$$4.\langle u, v\rangle^2 - 4.\langle u, u\rangle.\langle v, v\rangle \leq 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle.\langle v, v\rangle \Rightarrow$$

$$\langle u, v\rangle^2 \leq |u|^2.|v|^2 \Rightarrow \boxed{|\langle u, v\rangle| \leq |u|.|v|} \quad (1).$$

Demonstrando o teorema.

Pode-se demonstrar ainda que a igualdade desse teorema ocorre se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes. Essa demonstração será cobrada no exercícios.

A desigualdade em (1) pode ser escrita sem o módulo em $\langle u, v\rangle$, da seguinte forma:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{|u|.|v|} \leq 1.$$

Como $\frac{\langle u,v\rangle}{|u|.|v|}$ assume uma única vez, cada valor no intervalo [-1, 1], podemos associar a expressão $\frac{\langle u,v\rangle}{|u|.|v|}$ ao cosseno de um ângulo α entre dois objetos u e v, com $0° \leq \alpha \leq 180°$, estendendo a definição 25.10.1.1 a qualquer espaço vetorial com produto interno.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz pode ser utilizada também para demonstrar outras desigualdades.

Exemplo: Demonstre que $|u + v| \leq |u| + |v|$.

Solução:

$$|u + v|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle = \langle u, u\rangle + 2.\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \Rightarrow$$

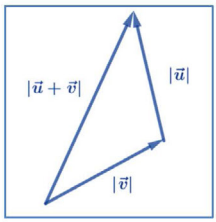
$$\boxed{|u + v|^2 = |u|^2 + 2.\langle u, v\rangle + |v|^2}$$ Igualdade já demonstrada para o $\mathbb{R}^n$.

Substituindo a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle u, v\rangle| \leq |u|.|v|$, temos

$$|u + v|^2 \leq |u|^2 + 2.|u|.|v| + |v|^2 \Rightarrow |u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2 \Rightarrow \boxed{|u + v| \leq |u| + |v|.}$$

[27] Esse teorema foi demonstrado por Augustin Cauchy (1789-1857) para produtos internos usuais em $\mathbb{R}^n$ e a demonstração geral, para espaços vetoriais arbitrários, foi feita por Hermann Schwarz (1843-1921).

Essa última desigualdade é denominada de desigualdade triangular, pois a representação vetorial da soma de dois vetores e os seus comprimentos, nos remete a ideia de desigualdade entre os lados de um triângulo.



Uma consequência da definição 25.10.1.1 é que $\langle u, v\rangle = 0$ se, e somente se, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (verifique!). Assim, podemos estender um conceito mais abrangente de perpendicularidade, a ortogonalidade entre objetos de um espaço vetorial com produto interno. Conforme a seguir.

SAIBA MAIS!

A perpendicularidade é um caso particular da ortogonalidade. Duas retas ortogonais no espaço, por exemplo, são ditas perpendiculares, se existir um ponto em comum.

Definição 25.10.1.2: Dizemos que dois vetores u e v de um espaço vetorial com produto interno V são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$.

Definição 25.10.1.3: Se S for um subespaço de um espaço com produto interno V, então o conjunto de todos os vetores em V que são ortogonais a cada vetor em S é denominado complemento ortogonal de S e denotado por $S^{\perp}$.

Exemplo: Seja um subespaço S de $\mathbb{R}^3$ representado pelo plano $2x + 3y - z = 0$ que passa pela origem. Um conjunto de vetores (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais a cada vetor de S é:

Solução: $\langle (x, y, \overbrace{2x + 3y}^{z}), (a, b, c)\rangle = ax + by + 2cx + 3cy = 0.$

Fazendo $x = 0$, obtemos: $3c = -b$. Fazendo $y = 0$, obtemos: $2c = -a$.

O que resulta em: $S^{\perp} = \{c \in \mathbb{R} |\ (a, b, c) = (-2c, -3c, c)\}$, uma reta que passa pela origem. Observe que $(-2c, -3c, c)$ possui mesma direção do vetor (2, 3, -1) normal ao plano S.

Teorema 25.10.1.2: Seja S um subespaço de um espaço vetorial com produto interno V. Então:

i) $S^{\perp}$ é um subespaço de V;

ii) $S \cap S^{\perp} = \mathbf{0}$;

iii) $(S^{\perp})^{\perp} = S$.

Demonstração: É imediato que $\mathbf{0} \in S^{\perp}$. Tomemos u e v não nulos em $S^{\perp}$, $k \in \mathbb{R}$ e $s \in S$. Assim:

$$\langle u + kv, s\rangle = \langle u, s\rangle + k.\langle v, s\rangle = 0 + k.0 = \mathbf{0}.$$

O que demonstra que $u + kv$ é ortogonal a cada vetor de S. Portanto, é um subespaço de V.

As demonstrações ii) e iii) ficam a cargo do leitor.

Definição 25.10.1.4: Dizemos que um conjunto de vetores em V é um **conjunto ortogonal**, se quaisquer dois vetores distintos do conjunto forem ortogonais. Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é dito **conjunto ortonormal**.

Exemplo: O conjunto $\{(0,2,0),(1,0,-3),(3,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é um conjunto ortogonal, pois:

$$\langle(0,2,0),(1,0,-3)\rangle = 0;\ \langle(1,0,-3),(3,0,1)\rangle = 0 \text{ e } \langle(0,2,0),(3,0,1)\rangle = 0.$$

Um conjunto ortonormal pode ser gerado a partir de um conjunto ortogonal. Para isso, basta dividir cada vetor do conjunto pela sua norma.

$$\left\{\frac{(0,2,0)}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}},\frac{(1,0,-3)}{\sqrt{1^2+0^2+(-3)^2}},\quad \frac{(3,0,1)}{\sqrt{3^2+0^2+1^2}}\right\} = \left\{\frac{(0,2,0)}{2},\frac{(1,0,-3)}{\sqrt{10}},\quad \frac{(3,0,1)}{\sqrt{10}}\right\}$$

$$\boxed{\left\{(0,1,0),\left(\frac{\sqrt{10}}{10},0,\frac{-3\sqrt{10}}{10}\right),\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},0,\frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}.}$$

Note que cada vetor possui norma 1. Esse processo é denominado de **normalização**.

Outro exemplo imediato de bases ortonormais são as bases canônicas espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Verifique!

Teorema 25.10.1.3: Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos de V é linearmente independente.

Demonstração: Seja um conjunto ortogonal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$. Supondo:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 . v_2 + \ \ldots \alpha_n . v_n = 0.$$

Tomemos um vetor arbitrário $v_k \in \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, com $i \leq k \leq n$. Então

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_1 . v_2 + \ \ldots \alpha_n . v_n \ , v_k \ \rangle = \langle 0 \ , v_k \ \rangle = 0.$$

Por outro lado $\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_1 . v_2 + \ \ldots \alpha_n . v_n \ , v_k \ \rangle$, pode ser escrito como

$$\alpha_1 . \langle v_1, v_k \rangle + \ \alpha_2 . \langle v_2, v_k \rangle + \ldots + \alpha_k . \langle v_k, v_k \rangle + \ldots \alpha_n . \langle v_n, v_k \rangle = 0.$$

Já que $\langle v_n, v_k \rangle = 0$, para $n \neq k$, segue que $\alpha_k . \langle v_k, v_k \rangle = 0$. Como v_k é um vetor não nulo de V, então a única solução é $\alpha_k = 0$. Demonstrando que o conjunto é linearmente independente.

O teorema a seguir mostra que é possível encontrar facilmente as coordenadas de um vetor, segundo uma base ortonormal, em um espaço vetorial com produto interno V.

Teorema 25.10.1.4: Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ é uma base ortonormal, então, para todo $v \in V$, podemos escrever:

$$\boxed{v = \langle v \ , v_1 \rangle v_1 + \langle v \ , v_2 \rangle v_2 + \ \ldots \langle v \ , v_n \rangle v_n}$$

Demonstração: Seja $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_1 . v_2 + \ \ldots \alpha_n . v_n$.

Tomemos um vetor arbitrário $v_k \in \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, com $i \leq k \leq n$. Então:

$$\langle v\,, v_k\,\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_1 . v_2 + \ldots \alpha_n . v_n\,, v_k\,\rangle =$$
$$\alpha_1 . \langle v_1, v_k\rangle + \alpha_2 . \langle v_2, v_k\rangle + \ldots + \alpha_k . \langle v_k, v_k\rangle + \ldots \alpha_n . \langle v_n, v_k\rangle .$$

Como $\langle v_n, v_k\rangle = 0$, para $n \neq k$ e $\langle v_k, v_k\rangle = |v_k|^2 = 1$, então:

$$\alpha_1 . \langle v_1, v_k\rangle + \alpha_2 . \langle v_2, v_k\rangle + \ldots + \alpha_k . \langle v_k, v_k\rangle + \ldots \alpha_n . \langle v_n, v_k\rangle = \alpha_k .$$

Observe ainda que, para a base ortogonal, basta dividir v_k por $|v_k|^2$ e assim obtemos: $\alpha_k = \frac{\langle v\,, v_k\rangle}{|v_k|^2}$. Esse coeficiente é denominado de **coeficiente de Fourier**[28] e está presente no próximo teorema.

Teorema 25.10.1.5: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$ um conjunto ortogonal de vetores não nulos. Se $u \in V$, então:

$$\alpha_k = \frac{\langle u\,, v_k\rangle}{|v_k|^2} \quad \text{com } i \leq k \leq n.$$

São os únicos números reais tais que o vetor: $v' = u - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_n v_n$ é ortogonal aos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Demonstração: Para $v' = u - \alpha_1 v_1$ ser ortogonal a v_1 é preciso que $\langle u - \alpha_1 v_1\,, v_1\,\rangle = 0$. Neste caso, temos

$$\langle u - \alpha_1 v_1\,, v_1\,\rangle = \langle u, v_1\,\rangle - \alpha_1 \langle v_1, v_1\,\rangle = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\langle u\,, v_1\rangle}{|v_1|^2}.$$

Reciprocamente, se $\alpha_1 = \frac{\langle u\,, v_1\rangle}{|v_1|^2}$, então

$$\langle -\alpha_1 v_1\,, v_1\,\rangle = \langle u, v_1\,\rangle - \alpha_1 \langle v_1, v_1\,\rangle = \langle u, v_1\,\rangle - \frac{\langle u\,, v_1\rangle}{|v_1|^2} . \langle v_1, v_1\,\rangle = 0.$$

O que prova que $u - \alpha_1 v_1$ é ortogonal a v_1.

Aplicando de forma recorrente o processo anterior de 1 à n, demonstra-se que o vetor: $v' = u - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \ldots - \alpha_n v_n$ é ortogonal aos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Teorema 25.10.1.6: Um espaço vetorial com produto interno possui uma base ortogonal.

Demonstração: Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Tomemos:

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle}{|u_1|^2} u_1$$
$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3\,, u_1\rangle}{|u_1|^2} u_1 - \frac{\langle v_3\,, u_2\rangle}{|u_2|^2} u_2$$
$$\vdots$$
$$u_n = v_n - \frac{\langle v_n\,, u_1\rangle}{|u_1|^2} u_1 - \ldots - \frac{\langle v_n\,, u_{n-1}\rangle}{|u_{n-1}|^2} u_{n-1}$$

O teorema 25.10.1.5 garante que o conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é ortogonal. Como o conjunto é linearmente independente (teorema 25.10.1.3) de vetores não nulos e $n = dim V$, então $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ é uma base ortogonal de V.

[28] Jean-Baptiste Fourier (1768-1830).

25.10.2. Ortogonalização de Gram-Shcmidt

A prova anterior não só demonstra o teorema 25.10.1.6 como também nos revela um processo interessante de ortogonalização, denominado de **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt**[29]. Siga os passos do exemplo a seguir.

Exemplo: Vamos aplicar processo de ortogonalização de Gram-Schmidt na base $\{(1,2),(-1,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ a fim de obtermos uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$.

Solução: $\{\underbrace{(1,2)}_{v_1},\underbrace{(-1,0)}_{v_2}\}$

$u_1 = (1,2)$

$u_2 = (-1,0) - \dfrac{\langle(-1,0),\ (1,2)\rangle}{|(1,2)|^2}(1,2) = (-1,0) - \left(\dfrac{-1}{5}\right)(1,2) = (\dfrac{-4}{5},\dfrac{2}{5})$

Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ é: $\left\{(1,2),(\frac{-4}{5},\frac{2}{5})\right\}$. Veja que os vetores são ortogonais:

$$\langle(1,2),\quad (\frac{-4}{5},\frac{2}{5})\rangle = \frac{-4}{5}.1 + 2.\frac{2}{5} = 0.$$

2º exemplo: Vamos aplicar processo de ortogonalização de Gram-Schmidt na base $\{(1,1,1),(1,0,2),(0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ a fim de obtermos uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Solução: $\{\underbrace{(1,1,1)}_{v_1},\underbrace{(1,0,2)}_{v_2},\underbrace{(0,1,0)}_{v_3}\}$

$u_1 = (1,1,1)$

$u_2 = (1,0,2) - \dfrac{\langle(1,0,2),\ (1,1,1)\rangle}{|(1,1,1)|^2}(1,1,1) = (1,0,2) - \dfrac{3}{3}(1,1,1) = (0,-1,1)$

$u_3 = (0,1,0) - \underbrace{\dfrac{\langle(0,1,0),(1,1,1)\rangle}{|(1,1,1)|^2}}_{\frac{1}{3}}(1,1,1) - \underbrace{\dfrac{\langle(0,1,0),(0,-1,1)\rangle}{|(0,-1,1)|^2}}_{\frac{-1}{2}}(0,-1,1)$

$u_3 = (0,1,0) - \dfrac{1}{3}(1,1,1) - \left(\dfrac{-1}{2}\right)(0,-1,1) =$

$u_3 = (0,1,0) - \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right) + \left(0,\dfrac{-1}{2},\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\right).$

Uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ é: $\left\{(1,1,1),(0,-1,1),\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)\right\}$. Verifique que os vetores são ortogonais entre si.

EXERCÍCIOS 25.9

1) Sejam os vetores $u = (x_1,x_2)$ e $v = (y_1,y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\langle u,v\rangle = 3x_1.y_1 + x_2.y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

2) Sejam os vetores $u = (x_1,x_2)$ e $v = (y_1,y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. Mostre que $\langle u,v\rangle = 3x_1.y_1 + 2x_2.y_2.x_1.y_1 - x_2.y_2$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

[29] Jorge Pedersen Gram (1850-1916) e Erhard Schimidt (1876-1959).

3) Sejam os vetores $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que $\langle u, v\rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2 - 5x_3.y_3$ é um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

4) Círculo unitário ou esfera unitária de V é definida como um conjunto de pontos de V em que $|u| = 1$. Mostre que sendo $u = (x_1, x_2)$ com o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$, o conjunto de pontos é o círculo unitário $\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} = 1$. Que aspecto geométrico seria o círculo (ou esfera) unitária de $\mathbb{R}^2$ se o produto interno fosse definido por $\langle u, v\rangle = 4x_1.y_1 + 25x_2.y_2$?

5) Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^n$ tal que $\langle u, v\rangle = 2$, $|v| = 1$ e $|u| = 2$, resultados do produto interno usual, calcule:

a) $\langle u + v, u - 3v\rangle$ b) $\langle u - v, 4u + 3v\rangle$ c) $|u - v|$

6) Sejam $u = (1,1)$, $v = (-2,0)$ e $k = 3$, calcule as expressões a seguir, utilizando o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

a) $\langle u, v\rangle$
b) $k.\langle u, v\rangle$
c) $d(u, v)$
d) $|u + v|$
e) $\langle u + 4v, 2u - 3v\rangle$

7) Sejam os vetores $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$. Calcule novamente $\langle u + 4v, 2u - 3v\rangle$ do item anterior, utilizando o seguinte produto interno $\langle u, v\rangle = 4x_1.y_1 + 5x_2.y_2$ de $\mathbb{R}^2$.

8) Calcule o produto interno $\langle U, V\rangle$ entre as seguintes matrizes, consoante a definição 25.10.3.

a) $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

9) Mostre que igualdade do teorema Cauchy-Schwarz ($|\langle u, v\rangle| \leq |u|.|v|$), ocorre se, e somente se, os vetores u e v são linearmente dependentes.

10) Demonstre o teorema de Pitágoras generalizado: "Se vetores u e v são vetores ortogonais em um espaço vetorial com produto interno, então: $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2$ ".

11) Calcule o ângulo α entre os elementos dos respectivos espaços vetoriais:

a) $u = (1,0)$ e $v = (2,1)$ em $\mathbb{R}^2$;
b) $u = (-6,4)$ e $v = (2,3)$ em $\mathbb{R}^2$;
c) $u = (1,1,-1)$ e $v = (0,1,1)$ em $\mathbb{R}^3$;

d) $u = (0,0,-1)$ e $v = (0,1,\sqrt{3})$ em $\mathbb{R}^3$;

e) $u = (2,0,2,0)$ e $v = (0,0,\sqrt{3},\sqrt{3})$ em $\mathbb{R}^4$;

f) $u = (1,0,1,0)$ e $v = (1,0,0,0)$ em $\mathbb{R}^4$;

g) $U = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e V= $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ em $M_{2\times 2}$. Use o produto interno da definição 25.10.3.

12) Verifique em quais itens da questão anterior os elementos são ortogonais.

13) Seja um subespaço S de $\mathbb{R}^2$ representado pelo reta $2x + y = 0$. Calcule um conjunto de vetores (a,b) de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais a cada vetor de S.

14) Seja um subespaço S de $\mathbb{R}^3$ representado pelo plano $x + y - z = 0$. Calcule um conjunto de vetores (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais a cada vetor de S.

15) Verifique qual o único conjunto a seguir, **não** é um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(0,1,0),(1,0,-2),\ (2,0,1)\}$

b) $\{(0,1,0),(1,0,0),\ (0,0,1)\}$

c) $\{(0,1,0),(7,0,-7),\ (1,0,1)\}$

d) $\{(1,2,-1),(1,0,-1),\ (1,1,0)\}$

e) $\{(0,0,-1),(-1,0,0),\ (0,2,0)\}$

16) Verifique qual o único conjunto a seguir, **não** é um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

a) $\{(0,1,0),(0,0,-1),\ (-1,0,0)\}$

b) $\{(0,1,0),(1,0,0),\ (0,0,1)\}$

c) $\{(1,0,0),(1,0,-1),\ (0,0,1)\}$

d) $\left\{(0,1,0),(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}),\ (\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3})\right\}$

e) $\{(0,0,-1),(1,0,0),\ (0,1,0)\}$

17) Sobre complemento ortogonal de um subespaço vetorial S e um conjunto ortogonal, ambos de um espaço vetorial com produto interno V. Assinale a alternativa incorreta.

a) O complemento ortogonal de um subespaço vetorial S é um subespaço vetorial de V.

b) Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos de V é linearmente independente.

c) A interseção de um subespaço S de V e seu complemento ortogonal é um vetor nulo.

d) O complemento ortogonal do complemento ortogonal de um subespaço vetorial S é o próprio subespaço vetorial S.

e) Toda base de um espaço vetorial V é um conjunto ortogonal ou ortonormal.

25.11. Programação linear (desigualdades lineares)

Antes de iniciar a aplicação de programação linear em si, vamos rever alguns conceitos matemáticos sobre vetor gradiente e desigualdades lineares.

25.11.1. Desigualdades lineares

Considerando a função $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x,y) = ax + by$. A linha de nível dessa função é dada por $ax + by = c$, cuja representação no espaço $\mathbb{R}^2$ é dado por uma reta que divide o plano cartesiano em duas regiões, superior e inferior, que denominamos de semiplanos (figura 25.11.1.1).

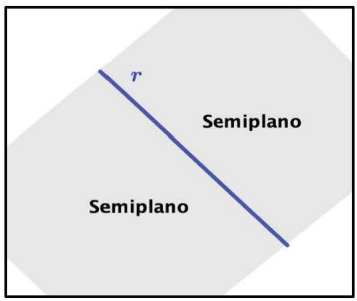


Figura 25.11.1.1

Para saber qual dos dois semiplanos (ou das duas regiões), representam os dois casos possíveis: $ax + by > c$ e $ax + by < c$, devemos nos reportar ao crescimento de funções (nesse caso, funções afins) a partir do vetor gradiente.

O vetor gradiente da função $\varphi(x,y)$ é dado por $\nabla\varphi(x,y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle a, b \rangle$ que é perpendicular à reta (à função nas linhas de nível). O semiplano localizado na direção e sentido desse vetor, representam o crescimento da função $(ax + by > c)$ e o semiplano localizado na direção e sentido oposto desse vetor, representam o decrescimento da função $(ax + by < c)$. Os quatros casos possíveis estão representados nas figuras 25.11.1.2, 25.11.1.3, 25.11.1.4 e 25.11.1.5.

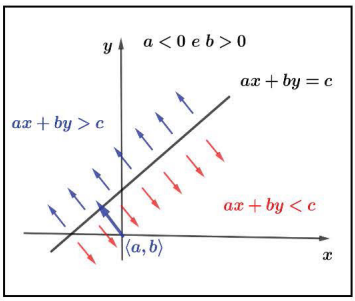


Figura 25.11.1.2

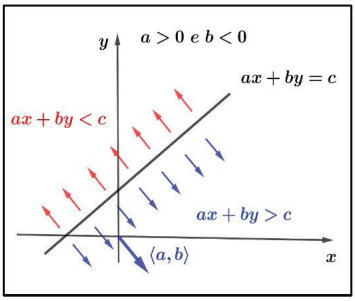


Figura 25.11.1.3

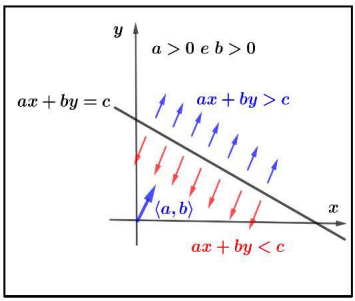


Figura 25.11.1.4

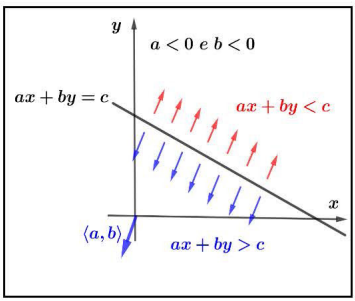


Figura 25.11.1.5

Como exemplo, veja nas figuras 25.11.1.6 e 25.11.1.7, os semiplanos em destaques que representam as inequações $-x+y \leq 1$ e $x-y<1$, respectivamente. Observação: utiliza-se uma reta pontilhada para representar a não igualdade na inequação, conforme está representada a inequação $x-y<1$.

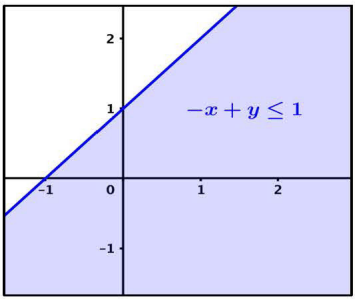


Figura 25.11.1.6

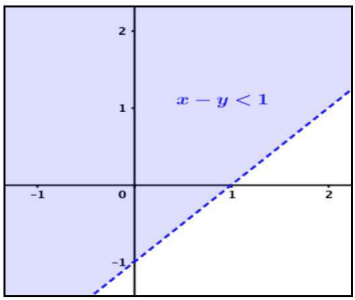


Figura 25.11.1.7

25.11.2. Sistema de desigualdades lineares

Aplicaremos os conhecimentos sobre inequações lineares anterior em um sistema composto por mais de uma inequação, denominado de sistema de desigualdades lineares ou sistema de inequações lineares. Nesse curso, esse sistema sempre terá n inequações e duas incógnitas. Quando necessário ou conveniente, podemos multiplicar qualquer inequação por -1, o que resume os sistemas em dois casos únicos:

$$1º\ caso: \begin{cases} a_1x + b_1y \geq c_1 \\ a_2x + b_2y \geq c_2 \\ a_3x + b_3y \geq c_3 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \geq c_n \end{cases} \qquad 2º\ caso: \begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ a_3x + b_3y \leq c_3 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}.$$

A solução desses sistemas é um conjunto de pontos que satisfazem todas as inequações do sistema, ou seja, a solução é uma região composta pela interseção dos semiplanos de cada inequação.

Exemplo: $\begin{cases} -2x + y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ -y \leq 0 \end{cases}$

Solução: Inicialmente devemos construir as retas que representam a igualdade de cada inequação no plano cartesiano.

Na primeira inequação, $-2x + y \leq 1$, fazendo: $\begin{cases} x = 0, \text{temos: } y = 1 \Rightarrow (0,1). \\ y = 0, \text{temos: } x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, 0\right). \end{cases}$

Colocamos os dois pontos no plano cartesiano e traçamos a reta.

Como o vetor gradiente é $\nabla\varphi(x, y) = \langle -2, 1\rangle$, a função tem crescimento nessa direção e sentido. Porém, queremos decrescimento ($\leq$) e, neste caso, o semiplano pretendido está na parte inferior da reta.

Na segunda inequação, fazendo: $\begin{cases} x = 0, \text{temos: } y = 2 \Rightarrow (0,2). \\ y = 0, \text{temos: } x = 2 \Rightarrow (2,0). \end{cases}$

Colocamos os dois pontos no plano cartesiano e traçamos a reta.

Como o vetor gradiente é $\nabla\varphi(x, y) = \langle 1, 1\rangle$, a função tem crescimento nessa direção e sentido. No entanto, queremos decrescimento ($\leq$) e nesse caso, o semiplano pretendido está também na parte inferior da reta.

A terceira inequação, basta multiplicar por -1, para termos $y \geq 0$ e ver que o semipleno em questão é a parte superior do eixo x.

A solução desse sistema é a região que representa a interseção dos três semiplanos, conforme a figura 25.11.2.1.

2º exemplo: $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ 2x - y \geq 2 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$

Solução: As duas primeiras inequações são imediatas.

Na terceira inequação, $2x - y \geq 2$, fazendo: $\begin{cases} x = 0, \text{temos: } y = -2 \Rightarrow (0,-2). \\ y = 0, \text{temos: } x = 1 \Rightarrow (1,0). \end{cases}$

Colocamos os dois pontos no plano cartesiano e traçamos a reta.

Como o vetor gradiente é $\nabla\varphi(x, y) = \langle 2, -1\rangle$, a função tem crescimento nessa direção e sentido, portanto, o semiplano pretendido está na parte superior da reta.

Na quarta inequação, fazendo: $\begin{cases} x = 0, \text{temos: } y = 2 \Rightarrow (0,2). \\ y = 0, \text{temos: } x = 2 \Rightarrow (2,0). \end{cases}$

Colocamos os dois pontos no plano cartesiano e traçamos a reta.

Como o vetor gradiente é $\nabla\varphi(x, y) = \langle 1, 1\rangle$, a função tem crescimento nessa direção e sentido, portanto, o semiplano pretendido está também na parte superior da reta.

A solução desse sistema é a região que representa a interseção dos três semiplanos (figura 25.11.2.2).

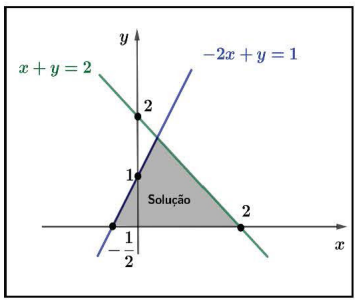


Figura 25.11.2.1

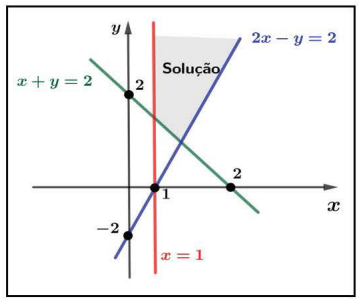


Figura 25.11.2.2

25.11.3. Programação linear

O termo "programação" refere-se à ação de planejar ou programar. A programação linear é, portanto, uma ferramenta utilizada na tomada de decisões com o objetivo de alcançar objetivos. Especificamente, esses objetivos estão focados na otimização do uso de recursos, ou seja, maximizar lucros ou minimizar custos, dentro de um conjunto de restrições impostas. Esse conjunto de restrições, que geralmente é um sistema de inequações lineares, é chamado de **conjunto de viabilidade** na programação linear e o ponto que maximiza (ou minimiza) uma determinada função é chamado de **ponto viável**.

Exemplo: Supondo que queremos maximizar a função $\varphi(x,y) = 3x - 2y$ sujeita às restrições do 1º exemplo anterior:

$$\begin{cases} -2x + y \leq 1 \\ x + y \leq 2 \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

Solução: Os pontos viáveis estão dentro do triângulo da figura 25.11.2.1. Como o vetor gradiente é $\nabla\varphi(x,y) = \langle 3, -2\rangle$ e a função tem crescimento nesse sentido (gerando retas na direção perpendicular), devemos então encontrar uma reta na forma $3x - 2y = c$, cujo valor c seja o maior possível. A figura 25.11.3.1 ilustra alguma retas (com alguns valores de c), mostrando que o ponto viável é $(2,0)$ e o valor máximo dessa função é $\varphi(2,0) = 3.2 - 2.0 = 6$.

2º exemplo: Supondo que queremos minimizar a função $\varphi(x,y) = -x + 3y$ sujeita às restrições do 2º exemplo anterior:

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 0 \\ 2x - y \geq 2 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

Solução: Os pontos viáveis devem estar dentro da região "solução" da figura 25.11.2.2. Como o vetor gradiente é $\nabla\varphi(x,y) = \langle -1, 3\rangle$ e a função tem crescimento nessa direção e sentido, devemos encontrar uma reta na direção e sentido contrário ao vetor

gradiente e na forma $-x+3y=c$, cujo valor c seja o menor possível. A figura 25.11.3.2 ilustra alguma retas (com alguns valores de c), mostrando que o ponto viável é o ponto de interseção das retas: $\begin{cases}2x-y=2\\x+y=2\end{cases}$ que é $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ e o valor mínimo dessa função é $\varphi\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}+3.\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

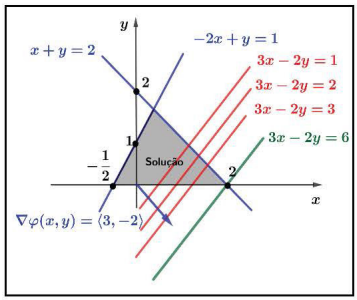


Figura 25.11.3.1

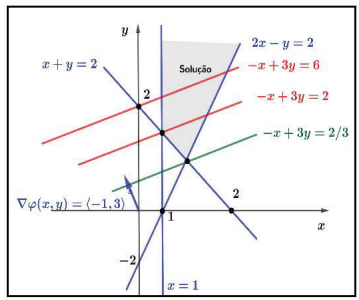


Figura 25.11.3.2

Diante dos dois exemplos anteriores, podemos extrair uma observação importante: o ponto viável está obrigatoriamente em algum dos vértices do polígono que forma a região solução. Dessa forma, para saber o máximo ou mínimo de uma função, é necessário encontrar os vértices do polígono que forma a região solução, substituí-los na função e verificar qual deles é o máximo ou qual deles é o mínimo, conforme o objetivo.

3º exemplo: Um sítio, por questões de armazenamento e espaço, tem produção máxima restrita a 1 tonelada e 7000m² de área cultivável. As informações sobre os cultivos a ser plantados, estão a seguir.

Cultivo	Lucro por kg de produção (R$)	Área máxima que pode ser plantada	Produtividade (kg/m²)
Tomate	1,20	5000 m²	0,1
Cebola	1,50	4000 m²	0,2

Com base nessas informações, qual a área que deve ser plantada por cada um desses cultivos, para que o sítio tenha lucro máximo?

Solução: Denominando de x a área a ser plantada (em m²) com tomate e de y a área a ser plantada (em m²) com cebola, o lucro é dado por:

$$L(x,y)=x.0{,}1.1{,}20+y.0{,}2.1{,}5=\ 0{,}12x+0{,}3y$$

E as restrições são: $\begin{cases}0{,}1x+0{,}2y\leq 1000\\x+y\leq 7000\\x\leq 5000\\y\leq 4000\\x\geq 0\\y\geq 0\end{cases}$

Resolvendo o sistema, temos a região de solução na figura 25.11.3.3 e como o vetor gradiente do lucro é $\nabla\varphi(x,y) = \langle 0{,}12; 0{,}3\rangle$, a função tem crescimento nessa direção e sentido.

Substituindo os vértices do polígono da região solução no lucro $L(x,y) = 0{,}12x + 0{,}3y$, encontramos:

$L(0{,}4000) = 1200$;

$L(2000{,}4000) = 1440$;

$L(4000{,}3000) = 1380$;

$L(5000{,}2000) = 1200$.

Portanto, o lucro máximo é de R$ 1440,00, obtido a partir do plantio de $2000m^2$ de tomate e $4000m^2$ de cebola.

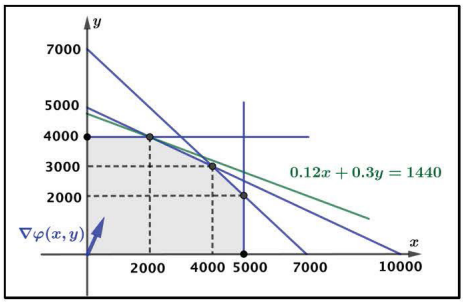
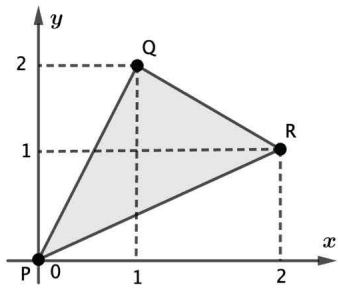


Figura 25.11.3.3

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 25.10

1) (ENADE 2008 - MATEMÁTICA) Assinale a opção que contém o sistema de inequações que determina a região triangular PQR desenhada abaixo.



a) $\begin{cases} y - 2x < 0 \\ 2y - x < 0 \\ y + x > 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - 2x > 0 \\ 2y - x > 0 \\ y + x > 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - 2x < 0 \\ 2y - x < 0 \\ y + x < 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y - 2x > 0 \\ 2y - x < 0 \\ y + x > 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y - 2x < 0 \\ 2y - x > 0 \\ y + x < 3 \end{cases}$

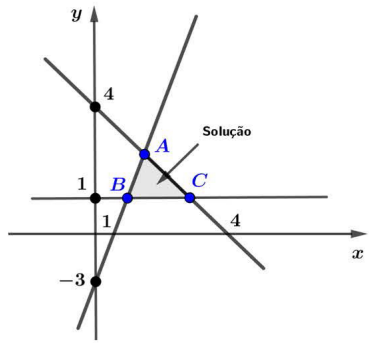
2) Maximize a função $\varphi(x,y) = 4x - y$ sujeita às restrições:

$$\begin{cases} -x + 5y \leq 3 \\ x - y \leq 1 \\ -y \leq 0 \\ -x \leq 0 \end{cases}$$

3) Minimize a função $\varphi(x,y) = -5x - 4y$ sujeita às restrições:

$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 1 \\ 3x + 2y \geq 1 \\ -y \geq 1 \end{cases}$$

4) Em qual dos pontos do gráfico da figura a seguir, a função $\varphi(x,y) = 7x - y$, tem seu valor máximo e qual dos pontos a função $\delta(x,y) = 5x + y$, tem seu valor mínimo?



5) Um produto A tem 15% de uma substância H, enquanto que um produto B tem 20% dessa mesma substância. Pretende-se obter no mínimo $z\%$ dessa substância, ao misturar os dois produtos. Denominando de x e y, as quantidades de cada produto, respectivamente, explique por que:

a) $z > 15\%$ após a mistura.

b) Após a mistura, o mínimo é garantido, independentemente de x e y, se $z > 20\%$.

6) Um avicultor pretende balancear uma ração para poedeiras com duas matérias primas, milho e farelo de soja e dois nutrientes apenas: proteína bruta e energia metabolizável. Cada quilograma de milho possui 30% de proteína bruta e 3400 kcal de energia metabolizável e cada quilograma de farelo de soja, possui 15% de proteína bruta e 1600 kcal de energia metabolizável. Sabendo que o preço do quilo do milho e do farelo de soja, são respectivamente R$ 0,70 e R$ 2,30, que as necessidades mínimas de nutrientes que devem compor a ração, são respectivamente: 25% de proteína bruta e 2800 kcal/kg de energia metabolizável, qual o custo mínimo para a produção dessa ração?

Fonte adaptada: (CRUZ, 2017)

7) Uma fazenda tem receita bruta de R$ 10.000,00 por hectare no plantio de milho e de R$ 12.000,00 por hectare no plantio de mandioca. O proprietário deseja contratar uma cooperativa de agricultores que cobram R$ 800,00 e R$ 1000,00 por hectares trabalhados no plantio do milho e da mandioca, respectivamente. Sabendo que o caixa disponível é de R$ 50.000,00 e que a fazenda dispõe de apenas 56 hectares cultiváveis, quantos hectares de milho e de mandioca devem ser plantados, para que o proprietário dessa fazenda tenha lucro máximo?

8) Um agricultor dispõe de 50ha de terra cultivável para arroz e feijão, sendo que 40ha no máximo devem ser destinados ao plantio do arroz e 30ha ao cultivo do feijão. Ele tem condições de pagar somente 1200 diárias de trabalho a agricultores e 1800 diárias de trabalho a ajudantes, por hectare. O quadro de lucro e necessidades de trabalho, por hectare, de cada cultura, estão no quadro a seguir.

	Lucro ha (R$)	Diárias de trabalho por ha de agricultor	Diárias de trabalho por ha de ajudante
Arroz	300	20	30
Feijão	400	30	40

Com base nessas informações, quantos hectares de arroz e quantos hectares de feijão devem ser plantados de forma a maximizar o lucro?

9) Para atender as exigências nutricionais de fêmeas em gestação, garantindo o bom desenvolvimento dos fetos, o animal necessita preencher alguns requisitos mínimos de consumo diário de diversos tipos de nutrientes. Suponha, que apenas dois tipos de nutrientes sejam necessários, como proteína bruta e energia. Além disso, imagine que a dieta consista em dois tipos de alimentos, milho grão e farelo de soja, cujo os preços e conteúdos nutritivos são mostradas na tabela a seguir:

	Milho grão	Farelo de soja	Necessidade mínima (suínas gestantes)
Proteína (%)	8	45	14
Energia (kcal/kg)	3900	4050	3210
Custo (R$/kg)	1,00	1,70	

Um suinocultor deseja obter uma ração balanceada com esses dois nutrientes. Respeitando as necessidades mínimas, quantos quilos de milho grão e quantos quilos de farelo de soja, devem ser utilizados para que o custo seja mínimo?

10) O dono de um caminhão que transporta produtos agrícolas cobra:
- R$ 1,20 por cada caixa de mangas de 25kg que mede 0,5mx1,0mx1,0m;
- R$ 1,00 por cada caixa de maçãs de 20kg que mede 0,20mx0,5mx1,0m.

Se a capacidade do caminhão é de 1000kg e tem 14m³, quantas caixas de mangas e maçãs devem ser transportadas, em uma única viagem, para que o dono do caminhão tenha lucro máximo?

11) Deseja-se adubar uma área utilizando apenas um ou a mistura de dois tipos de adubos: o adubo químico e o adubo orgânico. Os dados dos nutrientes de cada adubo e a necessidade de cada nutriente para a área, estão na tabela a seguir.

	Adubo químico (NPK 4-14-8)	Adubo orgânico (esterco bovino)	Necessidades mínimas para a área
Nitrogênio (N)	4%	1,7%	5kg
Fósforo (P)	14%	0,9%	8kg
Potássio (k)	8%	1,4%	7kg
Custo (R$)/kg	R$5,00	R$1,00	

Fonte adaptada: (AMARO, 2019)

a) Ao optar em utilizar os dois tipos de adubos nessa área, quantos quilos de cada adubo deve ser utilizado para que o custo seja mínimo?

b) Ao escolher apenas um tipo para essa área, qual tipo devemos utilizar visando o menor custo?

c) Visando o custo mínimo, devemos misturar ou não os dois tipos de adubos?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGROPÓS. Agropós. **Pragas Agrícolas que mais Afetam a Agricultura!**, 2018. Disponivel em: <https://agropos.com.br/pragas-agricolas/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

AGROREPORTER. **calibracao de pulverizador costal manual**, 2018. Disponivel em: <http://agroreporter.com.br/calibracao-de-pulverizador-costal-manual/>. Acesso em: 23 mar. 2019.

ALBUQUERQUE, F. D. S. et al. Revista brasileira de engenharia agrícola e ambiental. **Crescimento e rendimento de pimentão fertigado sob diferentes lâminas de irrigação e doses de potássio**, Campina Grande, v. 15, n. 07, jul. 2011.

ALVES, J. J. L. et al. Revista Brasileira de Plantas Medicinais. **Cinética de secagem das folhas de Hyptis suaveolens**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 168-176, 2017.

AMARO, G. B. Embrapa. **Adubos e fertilizantes**, 2019. Disponivel em: <http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/pimenta/arvore/CONT000gn08zc7m02wx5ok0liq1mqw825isw.html>. Acesso em: 02 abr. 2019.

AMARO, G. B. EMBRAPA. **EMBRAPA**, 2021. Disponivel em: <http://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/pimenta/arvore/CONT000gn08zc7m02wx5ok0liq1mqw825isw.html>. Acesso em: 15 dez. 2021.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. II, 2014.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, v. I, 2014.

ARAGUAIA, M. Brasil escola. **Escherichia coli**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/biologia/escherichia-coli.htm.>. Acesso em: 03 dez. 2020.

BATALHA, M. O. **Gestão agroindustrial - Gepai - grupo de estudos e pesquisas**. São Paulo: Atlas, 2017.

BEEFPOINT. www.beefpoint.com.br. **Preços de milho e soja em alta preocupam pecuaristas**, 2007. Disponivel em: <https://www.beefpoint.com.br/precos-de-milho-e-soja-em-alta-preocupam-pecuaristas-39461/>. Acesso em: 01 dez. 2021.

BEEFPOINT, E. Beefpoint educação. **O rendimento da carcaça bovina**, 2002. Disponivel em: <https://www.beefpoint.com.br/o-rendimento-da-carcaca-bovina-4992/>. Acesso em: 26 abr. 2019.

BELTRÃO, N. E. D. M.; FILHO, J. F.; OLIVEIRA, M. I. P. D. Estimativa da Respiração de uma Comunidade de Plantas, Via Valores Primários (Área Foliar e Fitomassa). **circular técnica**, Campina Grande, 2008.

BOSCO, L. C. et al. Revista brasileira de fruticultura. **Seleção de modelos de regressão para estimar a área foliar de macieiras 'royal gala' e 'fuji suprema' sob tela antigranizo e em céu aberto**, Jaboticabal, v. 34, p. 504-514, jun. 2012.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 1996.

BRITO, F. Agroceres. **Matéria Seca**, 2017. Disponivel em: <https://agroceresmultimix.com.br/blog/ajuste-materia-seca/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1990.

CARMO, M. P. D.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria, números complexos**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CEPEA/ESALQ. Agrolink. **Preço do café arábica sobe 8,7% em novembro**, 2010. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/noticias/preco-do-cafe-arabica-sobe-8-7--em-novembro_122759.html>. Acesso em: 05 abr. 2019.

CEPLAC. gov.br. **Quantos peixes coloco no viveiro?**, 2018. Disponivel em: <http://www.ceplac.gov.br/restrito/publicacoes/cartilhas/CT_03.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2019.

CHAVES, L. H. G. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento, distribuição e acúmulo de cobre e zinco em plantas de pinhão-manso**, Fortaleza, v. 41, n. 2, p. 167-176, jun. 2010.

COUTO, R. H. N. **Apicultura - manejo e produtos por Regina Helena Nogueira Couto e Leomam Almeida Couto.** Jaboticabal: FUNEP, 2006.

CRUZ, F. G. G. **Formulação e fabricação de racões**. Manaus: EDUA, 2017.

DALL'AGNOL, A. Agrolink. **A saga da soja no Brasil e no Mundo**, 2017. Disponivel em: <https://www.agrolink.com.br/colunistas/coluna/a-saga-da-soja-no-brasil-e-no-mundo_400724.html>. Acesso em: 29 jun. 2019.

DIAS, V. R. D. M. et al. Centro científica conhecer. **Relação entre a radiação fotossinteticamente ativa interceptada e a formação de matéria seca de frutos de manga**, 2011. Disponivel em: <http://www.conhecer.org.br/enciclop/2011a/agrarias/relacao%20entre%20radiacao.pdf>. Acesso em: 27 maio 2019.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometrial espacial, posição e métrica. São Paulo: Atual, v. 10, 1993.

DOLCE, O.; POMPEU, J. N. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria plana. São Paulo: Atual, v. 9, 1993.

EMBRAPA. Ageitec. **Origem da acidez**, 2018. Disponivel em: <https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/gestor/soja/arvore/CONTAG01_34_271020069132.html>. Acesso em: 21 jun. 2019.

EMBRAPA. **Nova cultivar de açaizeiro vai manter fornecimento do fruto o ano todo**, 2019. Disponivel em: <https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/48210103/nova-cultivar-de-acaizeiro-vai-manter-fornecimento-do-fruto-o-ano-todo>. Acesso em: 12 dez. 2019.

EMBRAPA. Manejo de pastagem. **Manejo de pastagem**, 2019. Disponivel em: <https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/CPAF-RO-2010/14520/1/folder-pastagem.pdf>. Acesso em: dez. 2021.

EXTRA. Globo. **Alcool ou gasolina qual a melhor opcao?**, 2012. Disponivel em: <https://extra.globo.com/economia/100-dias-de-economia/alcool-ou-gasolina-qual-a-melhor-opcao-5378674.html>. Acesso em: 07 abr. 2013.

FERREIRA, P. V. **Estatística experimental aplicada às ciências agrárias**. [S.l.]: UFV, 2018.

FERREIRA, R. S. **Matemática aplicada às ciências agrárias**. Viçosa : UFV, 1999.

FILHO, A. A. et al. Pubvet. **Ganho em peso médio diário de diferentes grupos genéticos de bovinos de corte**, v. 11, n. 1, p. 87-90, jan. 2017.

FILHO, A. F. D. O. et al. Revista verde de agroecologia e desenvolvimento sustentável. **crescimento de cultivares de mamoneira sob doses de torta de mamona**, Mossoró, v. 5, n. 5, p. 18-24, out. 2010.

FILHO, P. A. L. D. S. et al. PRODUÇÃO DE ETANOL NO BRASIL – UMA ANÁLISE DE CORRELAÇÃO E REGRESSÃO MÚLTIPLA. **ECAECO**, Ponta Porã - MS, set. 2013.

FILHO, P. D. S. E. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Parâmetros físicos do solo relacionados com o avanço da frente de molhamento**, Campina grande, v. 17, n. 2, p. 153-161, 2013.

FONTENELLI, J. V. **Métodos de manutenção de umidade do solo no cultivo do girassol e cártamo em condições controladas**. Rondonópolis: [s.n.], 2014.

FORMICONI, I. Farmnews. **Preços do milho e seu comportamento ano a ano**, 2016. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/comportamento-precos-milho/>. Acesso em: 19 abr. 2019.

FORMICONI, I. Farmnews. **Variação anual dos preços de soja**, 2018. Disponivel em: <http://www.farmnews.com.br/mercado/variacao-anual-dos-precos-da-soja/>. Acesso em: 20 maio 2019.

FRANCISCO, W. D. C. E. Brasil Escola. **Escala Richter**, 2019. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/escala-richter.htm>. Acesso em: 27 jun. 2019.

FREIRE, F. D. **Caderno de Matemática do ensino médio**. Macapá: [s.n.], v. 1, 2, 3 e 4, 2013.

FREIRE, F. D. **o uso de um livro-caderno de matemática alternativo em sala de aula:** praticidade e coerência didática voltadas para a realidade local e tecnológica. Macapá: Dissertação de mestrado, 2014.

GONCALVES, F. P. Universidade de São Paulo. **Progresso poliético e quantificação de danos da clorose Variegada dos citros em laranjeiras "natal" submetidas a deficit hídricos**, Piracicaba, 2010.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. São Paulo: Atual, v. 5, 1993.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à álgebra linear**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

HERRMANN, J. C.; KINETZ, S. R. R.; ELSNER, T. C. UNIJUÍ. **Modelagem matemática no cultivo do alface**, 2019. Disponivel em: <https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/modelagem/alface/index.html>. Acesso em: 23 jun. 2019.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. São Paulo: Atual, v. 6, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** geometria analítica. São Paulo: Atual, v. 7, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** limites, derivadas e noções de integral. São Paulo: Atual, v. 8, 1993.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** trigonometria. São Paulo: Atual, v. 3, 1993.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** logarítmos. São Paulo: Atual, v. 2, 1993.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. São Paulo: Atual, v. 4, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar:** conjuntos, funções. São Paulo: Atual, v. 1, 1993.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar:** limites, derivadas, noções de integral. São Paulo: Atual, v. 8, 1993.

INSTITUTOAGRO. **Curso de produção agrícola**, 2019. Disponivel em: <https://institutoagro.com.br/custo-de-producao-agricola/>. Acesso em: 14 abr. 2019.

JUNIOR, A. F. R. et al. Resposta produtiva do meloeiro sob diferentes lâminas de água e doses de nitrogênio. **Científica**, Jaboticabal, v. v.44, n. n.2, p. 217–225, abr. 2016. ISSN 1984-5529.

JUNIOR, E. B. P. **ADUBAÇÃO NITROGENADA E FOSFATADA NA CULURA DO FEIJÃO CAUPI NO MUNICÍPIO DE SOUSA–PB**. MOSSORÓ – RN: UFERSA, 2012.

KHAN ACADEMY. **Crescimento exponencial e logístico**. Disponivel em: <https://pt.khanacademy.org/science/biology/ecology/population-growth-and-regulation/a/exponential-logistic-growth>. Acesso em: 28 jun. 2019.

LACERDA, J. R. et al. XXXV congresso brasileiro de ciência do solo. **Fertilizante fosfatado revestido com polímero no crescimento e fisiologia do cafeeiro**, Natal, ago. 2015.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. Rio de janeiro: LTC, 1999.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: IMPA e fundação vitae, 1991.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2ª edição. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio - volume 1**. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2006.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 2**. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; EDUARDO WAGNER, A. C. M. **A matemática do ensino médio - volume 3**. Rio de Janeiro: SBM, v. 3, 2006.

LOBO, F. D. A. et al. EFEITO DA IRRIGAÇÃO E DA ONTOGENIA SOBRE A ESTIMATIVA DA ÁREA FOLIAR DE MANGABEIRA. **Revista Brasileira Frutic**, Jaboticabal - SP, v. 32, n. n.3, p. 754-762, set. 2010.

LUZ, M. J. D. S.; FERREIRA, G. B.; BEZERRA, J. R. C. Adubação e Correção do Solo: Procedimentos a Serem Adotados em Função dos Resultados da Análise do Solo. **EMBRAPA**, Campina Grande, out. 2002. ISSN 0100-6460.

MARCONDES, L. A.; BUENO, S. M. Revistas unilago. **Processo de lavagem a seco de cana de açúcar**, 2019. Disponivel em: <http://revistas.unilago.edu.br/index.php/revista-cientifica/article/view/220/196>. Acesso em: 25 jan. 2020.

MARTINS, G.; VASCONCELLOS, E. F. C.; LUCCHES, A. A.. Anais da escola superior de agricultura "Luiz de Queiroz". **Correlações entre parâmetros de análise de crescimento de cultivares tomateiro**, Piracicaba, v. XLII , 1985.

MARTINS, W. A. C. et al. Anais III SINPROVS. **Análise do feijão Caupi (vigna unguiculata) (l.) walp.) submetido a estresse hídrico e diferentes doses de biofertilizantes**, 2018. Disponivel em: <http://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/40282>. Acesso em: 03 dez. 2020.

MASCARENHAS, J. R. O. Brazil document. **Densidade de plantio**, 2018. Disponivel em: <https://document.onl/documents/densidade-de-plantio.html>. Acesso em: 03 15 2019.

MENDES, J. T. G.; JUNIOR, J. B. P. **Agronegócio - uma abordagem econômica**. São Paulo: Person Prentice Hall, 2007.

MENDES, L. G. Lavoura. **Cálculo de semadura da soja**, 2019. Disponivel em: <https://blog.aegro.com.br/calculo-de-semeadura-soja/>. Acesso em: 25 abr. 2019.

MENDES, L. G. O blog da aegro, 2019. Disponivel em: <https://blog.aegro.com.br/calculo-de-semeadura-soja/>. Acesso em: 2019.

MINISTÉRIO DA AGRICULTURA, P. E. A. **Projeções do agronegócio**. 7ª. ed. Brasília: SPA/mapa, 2016.

MORAIS, S. J. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Modelagem matemática das curvas de secagem e coeficiente de difusão de grãos de feijão-caupi (Vigna unguiculata (L.) Walp.)**, Fortaleza, v. 44, n. 3, p. 455-463, set. 2013.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Fertilidade do solo e estado nutricional da alfafa cultivada nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2007.

MOREIRA, A.; BERNARDI, A. C. D. C.; RASSINI, J. B. **Cultivo e utilização da alfafa nos trópicos**. São Carlos: Embrapa, 2008.

MOREIRA, B. R. D. A.; MIASAKI, C. T. **Uma nova fórmula matemática para estimar o coeficiente de eficacia da equação de Mitscherlich:** uma aplicação nas ciências agrárias. Gramado: CNMAC, 2016. Disponivel em: <https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/viewFile/1283/1297>.

MURTEIRA, B. et al. **Introdução à estatística**. Lisboa: Escolar editora, 2015.

NETO, A. C. M. **Combinatória**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** geometria euclidiana plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A. C. M. **Tópicos de Matemática Elementar:** polinômios. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NEVES, M. F.; ZYLBERSZTAJN, D.; NEVES, E. M. **Agronegócio do Brasil**. São Paulo: Saraiva, 2005.

OLIVEIRA, A. F. D. Estudo da viabilidade da produção de biofilmes de kefir e suas interações com extratos de açaí (Euterpe oleracea Martius) e de gérmen de soja (Glycine max (L.) Merrill), MACAPÁ, AP, 2016.

OLIVEIRA, R. L. L. D. et al. Agroenergia. **estimativa de área foliar de feijão caupi cultivar brs tumucumak através de modelos matemáticos**, 2014. Disponivel em: <http://www.infobibos.com/Agroenergia/CD_2014/Resumos/ResumoAgroenergia_2014_038.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2019.

PACHECO, E. P. EMBRAPA. **Seleção e custo operacional de máqinas agrícolas**, 2000. Disponivel em: <http://iquiri.cpafac.embrapa.br/pdf/doc58.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2019.

PANACHUKI, E. et al. Acta Sci., Agron. (Online). **Avaliação da infiltração de água no solo, em sistema de integração agricultura-pecuária, com uso de infiltrômetro de aspersão portátil**, Maringá, v. 28, n. 1, p. 129-137, jun. 2006.

PEIXOTO, C. P. et al. **Curso de fisiologia vegetal**. Cruz das almas: UFRB, 2020.

PIRES, A. V. **Bovinocultura de corte**. Piracicaba: FEALQ, 2010.

POPOV, D. Canal rural. **Confira 6 métodos de plantio para a soja e veja qual é melhor!**, 2017. Disponivel em: <https://www.canalrural.com.br/projeto-soja-brasil/noticia/saiba-qual-e-o-melhor-metodo-

de-plantio-para-soja/#:~:text=das%20seis%20t%C3%A9cnicas%3A-,Plantio%20Cruzado,e%20uma%20semente%20por%20cova.>. Acesso em: 24 mar. 2019.

PRATES, F. B. D. S. et al. Revista Ciência Agronômica. **Crescimento de mudas de pinhão-manso em resposta a adubação com superfosfato simples e pó-de-rocha**, Montes Claro, v. 43, n. 2, p. 207-213, jun. 2012.

PRATES, M. Exame. **Os números que mostram o poder do agronegócio brasileiro**, 2014. Disponivel em: <https://exame.com/economia/os-numeros-que-mostram-o-poder-do-agronegocio-brasileiro/>. Acesso em: 03 abr. 2019.

PREFEITURA MUNICIPAL DE PORTO GRANDE. Plano Diretor Participativo do Município de Porto Grande. **Diagnóstico das condicionantes, deficiências e potencialidades municipais, propostas e ações**, 2013. Disponivel em: <https://ferreiragomesenergia.com.br/wp-content/uploads/sites/3/2018/04/2013.06.03-Plano-Diretor-Porto-Grande.pdf>. Acesso em: 21 jun. 2019.

REIS, G. G. D. Embrapa. **Análise e crescimento das plantas - mensuração do crescimento**, 2018. Disponivel em: <https://www.alice.cnptia.embrapa.br/bitstream/doc/374936/1/FL00953.pdf>. Acesso em: 06 jun. 2019.

REIS, L. S. et al. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental. **Índice de área foliar e produtividade do tomate sob condições de ambiente protegido**, Campina Grande, v. 17, n. 4, p. 386-391, jan. 2013.

REUTERS. G1 AGRO. **IBGE vê safra de café 10,8% menor em 2019, a 53,4 milhões de sacas**, 2019. Disponivel em: <https://g1.globo.com/economia/agronegocios/noticia/2019/01/10/ibge-ve-safra-de-cafe-108-menor-em-2019-com-534-milhoes-de-sacas.ghtml>. Acesso em: 24 abr. 2019.

REZENDE, R. et al. Produção e qualidade comercial de alface fertirrigada com nitrogênio e potássio em ambiente protegido. **Revista ceres**, n. https://doi.org/10.1590/0034-737X201764020014, abr. 2004.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipcione, v. 1, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 2, 2010.

RIBEIRO, J. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia. São Paulo: Scipione, v. 3, 2010.

RIBEIRO, R. C. ufrrj. **Estabelecimento de Leguminosas em Pastagens de Brachiaria humidicola: Variações Sazonais de Atributos do Dossel Vegetativo** , Seropédica, p. 1, 27-32, set. 2006.

SANTOS, N. S. D. **Curva de absorção de nutrientes na mandioca em função das doses de nitrogênio**. Boa vista: [s.n.], 2013.

SEAGRI, A. Estado de Alagoas. **Agricultores do Sertão produzem mais de 45 sacos de milho por tarefa**, 2011. Disponivel em: <http://www.agricultura.al.gov.br/sala-de-imprensa/noticias/2011/dezembro/agricultores-do-sertao-produzem-mais-de-45-sacos-de-milho-por-tarefa>. Acesso em: 01 abr. 2019.

SILVA, É. D. B. D. Agronegócio em foco. **Estimando a produtividade na cultura da soja**, 2015. Disponivel em: <http://www.pioneersementes.com.br/blog/46/estimando-a-produtividade-na-cultura-da-soja>. Acesso em: 25 jun. 2019.

SILVA, G. J.; MAIA, J. C. D. S.; BIANCHINI, A. Revista brasileira de ciências do solo. **Crescimento da parte área de plantas cultivadas em vaso**, Cuiabá, p. 30;31-40, 2006.

SILVA, I. D.; SEGANTINE, P. L. **Exercícios de topografia:** teoria e prática de geomática. Rio de Janeiro: Elsevier, 2018.

SILVA, J. A. A. D.; NETO, F. D. P. **Princípios básicos de dendrometria**. Departamente de Ciência Florestal - Brasília: UNB, 1979.

SILVA, M. N. P. D. Brasil escola. **Medidas Agrárias**, 2018. Disponivel em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/medidas-agrarias.htm>. Acesso em: 15 mar. 2018.

SILVA, T. R. B. D. **Adubação nitrogenada e resíduos vegetais no desenvolvimento do feijoeiro em sistema de plantio direto**. Ilha solteira: [s.n.], 2002.

SORATTO, R. P. et al. Revista ciencia agronômica. **Fontes alternativas e doses de nitrogênio no milho safrinha em sucessão à soja**, Chapadão do Céu, v. v. 41, n. n.4, p. 511-518, out. 2010.

SOUZA, D. P. D. et al. XLV Congresso brasileiro de engenharia agrícola. **Caracterização do coeficiente de extinsão de cultivares de cana-de-açúcar**, Florianópolis, jul. 2016.

SOUZA, N. Estadão. **Milho ganha novo espaçamento**, São Paulo, 28 maio 2008. Disponivel em: <https://www.estadao.com.br/noticias/geral,milho-ganha-novo-espacamento,179169>. Acesso em: 22 mar. 2020.

STEWART, J. **Cálculo I**. São Paulo: Cengage, v. I, 2016.

TAVARES, G. D. S. et al. International Journal of Development Research. **Análise da produção e comercialização de açaí no estado do Pará - Brasil**, Belém, v. 10, n. 04, p. 35215-35221, abr. 2020. ISSN 2230-9926.

TECHTUDO. Eletrônicos. **Churrasqueira que funciona à luz solar começa a ser exportada**, 2011. Disponivel em: <https://www.techtudo.com.br/noticias/noticia/2011/10/churrasqueira-que-funciona-luz-solar-comeca-ser-exportada.html>. Acesso em: 01 jul. 2019.

THEODORO, G. D. F.; MARINGONI, A. C. Scielo Brasil. **Efeito de doses de potássio na severidade da murcha-de-curtobacterium em cultivares de feijoeiro comum**, 2006. Disponivel em: <https://www.scielo.br/j/sp/a/nkn7SPx9npXG3QC9GNFdSxG/?lang=pt>. Acesso em: jan. 2022.

THUM, A. B. et al. **Topografia para estudantes de Arquitetura, Engenharia e Geologia**. São Leopoldo: UNISINOS, 2003.

TIDESCHART. **Horários e tábuas de marés para Macapá**, 2019. Disponivel em: <https://pt.tideschart.com/Brazil/Amapa/Macapa/>. Acesso em: 01 ago. 2019.

TOEBE, M. et al. Modelos para a estimação da área foliar de feijão de porco por dimensões foliares. **scielo**, 2012. Disponivel em: <https://www.scielo.br/j/brag/a/rJxwgYRvZQjqq7NGmb83cWS/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 01 dez. 2021.

TONINI, H.; FINGER, C. A. G.; SCHNEIDER, P. R. Revista do Centro de Ciências Rurais. **O crescimento da Nectandra megapotamica Mez., em floresta nativa na depressão central do Estado do Rio Grande do Sul**, Santa Maria, v. 33, n. 1, p. 85-90, fev. 2003.

TSUNECHIRO, A.; MARTINS, V. A. Instituto de Economia Agrícola (IEA). **Produção recorde de sorgo no Estado de São Paulo**, 2003. Disponivel em: <http://www.iea.agricultura.sp.gov.br/out/LerTexto.php?codTexto=837>. Acesso em: 15 maio 2019.

VELOSO, C. A. C. et al. Embrapa. **Resposta diferencial de cultivares de milho em função da adição da adubação fosfatada em latossolo amarelo do oeste paraense**, Belém, dez. 2005.

WIKIPÉDIA. **jogo de memória**, 2019. Disponivel em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Jogo_de_mem%C3%B3ria>. Acesso em: 27 ago. 2019.

TABELAS

Tabela 1: Tabela sobre unidades de medidas

Unidades de comprimento:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida
Múltiplos:	Quilômetro	km	$1000\ m$
	Hectômetro	hm	$100\ m$
	Decâmetro	dam	$10\ m$
Unidade fundamental	Metro	m	$1\ m$
Submúltiplos:	Decímetro	dm	$0{,}1\ m$
	Centímetro	cm	$0{,}01\ m$
	Milímetro	mm	$0{,}001\ m$

×10 ÷10

Unidades de área:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro quadrado	km^2	$1.000.000\ m^2$
	Hectômetro quadrado	hm^2	$10.000\ m^2$
	Decâmetro quadrado	dam^2	$100\ m^2$
Unidade	Metro quadrado	m^2	$1\ m^2$
Submúltiplos:	Decímetro quadrado	dm^2	$0{,}01\ m^2$
	Centímetro quadrado	cm^2	$0{,}0001\ m^2$
	Milímetro quadrado	mm^2	$0{,}000001\ m^2$

×100 ÷100

Unidades de volume:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em
Múltiplos:	Quilômetro cúbico	km^3	$1.000.000.000\ m^3$
	Hectômetro cúbico	hm^3	$1.000.000\ m^3$
	Decâmetro cúbico	dam^3	$1000\ m^3$
Unidade	Metro cúbico	m^3	$1\ m^3$
Submúltiplos:	Decímetro cúbico	dm^3	$0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$0{,}000000001\ m^3$

×1000 ÷1000

Algumas unidades de volume são relacionadas com as medidas de capacidade:

Categoria	Volume	Capacidade
Múltiplos	$1\ m^3$	1000 litros ($1000l$)
Unidade fundamental	$1\ dm^3$	1 litro ($1l$)
Submúltiplos:	$1\ cm^3$	1 mililitro ($1ml$)

Medidas agrárias:

Categoria	Unidade	Símbolo	Medida em m²
Múltiplo:	Hectare	ha	$10.000\ m^2$
Unidade fundamental	Are	a	$100\ m^2$
Submúltiplo:	Centiare	ca	$1\ m^2$

Tabela 2: Tabela trigonométrica

(°)	Rad	sen	cos	tg
0	0,02	0	1	0
1	0,03	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,05	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,07	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,09	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,10	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,12	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,14	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,16	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,17	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,19	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,21	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,23	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,24	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,26	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,28	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,30	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,31	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,33	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,35	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,37	0,34202	0,939693	0,36397
21	0,38	0,358368	0,93358	0,383864
22	0,40	0,374607	0,927184	0,404026
23	0,42	0,390731	0,920505	0,424475
24	0,44	0,406737	0,913545	0,445229
25	0,45	0,422618	0,906308	0,466308
26	0,47	0,438371	0,898794	0,487733
27	0,49	0,45399	0,891007	0,509525
28	0,51	0,469472	0,882948	0,531709
29	0,52	0,48481	0,87462	0,554309
30	0,54	0,5	0,866025	0,57735
31	0,56	0,515038	0,857167	0,600861
32	0,58	0,529919	0,848048	0,624869
33	0,59	0,544639	0,838671	0,649408
34	0,61	0,559193	0,829038	0,674509
35	0,63	0,573576	0,819152	0,700208
36	0,65	0,587785	0,809017	0,726543
37	0,66	0,601815	0,798636	0,753554
38	0,68	0,615661	0,788011	0,781286
39	0,70	0,62932	0,777146	0,809784
40	0,72	0,642788	0,766044	0,8391
41	0,73	0,656059	0,75471	0,869287
42	0,75	0,669131	0,743145	0,900404
43	0,77	0,681998	0,731354	0,932515
44	0,79	0,694658	0,71934	0,965689
45	0,02	0,707107	0,707107	1,03553
46	0,80	0,71934	0,694658	1,072369
47	0,82	0,731354	0,681998	1,110613
48	0,84	0,743145	0,669131	1,150368
49	0,86	0,75471	0,656059	1,191754
50	0,87	0,766044	0,642788	1,03553

(°)	Rad	sen	cos	tg
51	0,89	0,777146	0,62932	1,234897
52	0,91	0,788011	0,615661	1,279942
53	0,93	0,798636	0,601815	1,327045
54	0,94	0,809017	0,587785	1,376382
55	0,96	0,819152	0,573576	1,428148
56	0,98	0,829038	0,559193	1,482561
57	0,99	0,838671	0,544639	1,539865
58	1,01	0,848048	0,529919	1,600335
59	1,03	0,857167	0,515038	1,664279
60	1,05	0,866025	0,5	1,732051
61	1,06	0,87462	0,48481	1,804048
62	1,08	0,882948	0,469472	1,880726
63	1,10	0,891007	0,45399	1,962611
64	1,12	0,898794	0,438371	2,050304
65	1,13	0,906308	0,422618	2,144507
66	1,15	0,913545	0,406737	2,246037
67	1,17	0,920505	0,390731	2,355852
68	1,19	0,927184	0,374607	2,475087
69	1,20	0,93358	0,358368	2,605089
70	1,22	0,939693	0,34202	2,747477
71	1,24	0,945519	0,325568	2,904211
72	1,26	0,951057	0,309017	3,077684
73	1,27	0,956305	0,292372	3,270853
74	1,29	0,961262	0,275637	3,487414
75	1,31	0,965926	0,258819	3,732051
76	1,33	0,970296	0,241922	4,010781
77	1,34	0,97437	0,224951	4,331476
78	1,36	0,978148	0,207912	4,70463
79	1,38	0,981627	0,190809	5,144554
80	1,40	0,984808	0,173648	5,671282
81	1,41	0,987688	0,156434	6,313752
82	1,43	0,990268	0,139173	7,11537
83	1,45	0,992546	0,121869	8,144346
84	1,47	0,994522	0,104528	9,514364
85	1,48	0,996195	0,087156	11,43005
86	1,50	0,997564	0,069756	14,30067
87	1,52	0,99863	0,052336	19,08114
88	1,54	0,999391	0,034899	28,63625
89	1,55	0,999848	0,017452	57,28996
90	1,57	1	0	∄
120	2,09	0,866025	-0,5	-1,732051
150	2,62	0,5	-0,866025	-0,57735
180	3,14	0	1	0
210	3,67	-0,5	-0,866025	0,57735
240	4,19	-0,866025	-0,5	1,732051
270	4,71	-1	0	∄
300	5,23	-0,866025	0,5	-1,732051
330	5,76	-0,5	0,866025	-0,57735
360	6,28	0	1	0

GABARITOS E SOLUÇÕES

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.1

1) a) 7 b) -1 c)∄ d)-1 e)6 f) ∄
2) A cargo do leitor

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.2

1)
a)-2
b)-8
c)0
d)900
e)0
f) -3
g)-2/3
h)-1
i) 5/2
j) 169
k)1331
l) 1
m) -2/9
n)1/2

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.3

1)
a)-2
b)2
c)-6
d)0
e)-9
f) ∄
g)∄
h)3
i) -3/2
j) 18
k)17
l) -75/4
m) 5
n)23/4
o)0
p)1
q)3/5
r) -3/4

---

2)
a)$2b$
b)$3a/2$
c)$2a^2$
$d)n$
$e)n/m$
$f)\frac{n}{m}a^{n-m}$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.4

1)
a) 1/2
b) 1/4
c) 1/12
d) 1/10
e) 1
f) $\sqrt{3}/2$
g) 187/14
h) -3/4
i) -1/4
j) -1/8
k) -15/2
l) 0
m) 0
n) 9/20
o) 3/2
p) 1/3
q) 2/3
r) -6
s) 1/2
t) 1/12
u) 9/2
v) -3
w) -1/8
x) -63/128
y) $1/n$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.5

1)
a) $+\infty$
b) $-\infty$
c) ∄
d) $+\infty$
e) $-\infty$
f) ∄

g) $-\infty$
h) $+\infty$
i) $\nexists$
j) $+\infty$
k) $-\infty$
l) $\nexists$
m) $-\infty$
n) $+\infty$
o) $\nexists$
p) $+\infty$
q) $+\infty$
r) $+\infty$
s) $-\infty$
t) $-\infty$
u) $-\infty$
v) $\nexists$
w) $\nexists$
x) $+\infty$

---

2)
a) $\nexists\ n \in \mathbb{R}$ b) n é $ímpar$ c) n é par d) n é $ímpar$

---

3)
a) F
b) F
c) V
d) F
e) F
f) F
g) V
h) V
i) F
j) F
k) V

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.6

1)
a) $-\infty$
b) $+\infty$
c) $+\infty$
d) $+\infty$
e) $-\infty$
f) -6/5
g) 1/2
h) 0
i) 0
j) 1
k) $+\infty$
l) -1
m) 1331
n) 1
o) -1
p) -1
q) 1
r) 4
s) 4
t) 1/2
u) -1/2
v) $-\infty$
w) $\nexists$
x) ½
y) 0
z) $+\infty$

---

2)
a) -1/2
b) 7/2
c) $m/2$
d) -3/4
e) 0
f) 0
g) 0
h) -1/4
i) 3/2
j) 2/135

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.7

1)
a) 9
b) 2
c) a/b
d) 1
e) 3/2
f) a/b
g) 0
h) 2
i) 2
j) 1/2
k) 1
l) $-\sqrt{2}/2$
m) 0
n) -1
o) 1
p) 1

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.8

1)

a) 2
b) e^2
c) 0
d) $+\infty$
e) $+\infty$
f) 0
g) 1
h) 5^{12}
i) $e^{3/2}$
j) 2^{32}
k) 3
l) $ln4$
m) $-\infty$
n) $+\infty$
o) $-\infty$
p) $+\infty$
q) 1
r) 2
s) $ln3$

---

2)
a) e^2
b) e^{15}
c) $1/e^2$
d) $1/e^6$
e) e^6
f) $1/e^{14}$
g) $1/e^4$
h) $e^{-7/12}$
i) $ln5$
j) 1
k) $ln16$
l) 2/5
m) $3^a.ln3$
n) e^a
o) 5

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.9

1) a) 3 b)-1 c) ∄
2) a) -1 b)-1 c) -1
3) a) 0 b)0 c) 0
4) a) -1 b)2 c) ∄
5) a) 0 b)0 c) 0
6) a) 1 b)1 c) 1
7)a) 0 b)0 c) 0
8)a) 1 b)-1 c) ∄
9)a) 2 b)-2 c) ∄
10)a) 5/6 b)-5/6 c) ∄
11)a) 2 b)1 c) 1
12)a) ∄ b)4 c) 1

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 18.10

1)
a) Contínua
b) Contínua
c) Descontínua
d) Descontínua
e) Descontínua
f) Descontínua
g) Descontínua
h) Contínua
i) Descontínua
j) Contínua
k) Contínua
l) Descontínua
m) Contínua
n) Contínua
o) Contínua
p) Contínua

---

2) a) a=10 b) a=1 c) a=9 d) ∄ $a \in \mathbb{R}$

---

3)
a) Descontínua
b) Contínua
c) Descontínua
d) Contínua
e) Contínua
f) Contínua

---

4) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 18.11

1) a) 0,468 b)0
2) 13,5 cm. Significa que a planta atingiu sua altura máxima.
3) O poder de germinação das sementes é dada em porcentagem, portanto G é no máximo 100%. A expressão $\lim_{G \to 100^-} N$ significa analisar o que acontece com N ao aproximar G de 100%.

4) a) k=30 b) 0

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 19.1

1)
a) -2
b) -1
c) 2
d) 1
e) 1
f) $2ln2$
g) $ln3$
h) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
i) $\frac{1}{3}$
j) Não é derivável
k) Não é derivável

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 19.2

1)
a) $y-2=-2(x+1)$
b) $y+1=3x$
c) $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{2})$
d) $y-7=7.ln7(x-1)$
e) $y-2=\frac{1}{4}(x-4)$
f) $y+1=2(x-1)$
g) $y-8=-3(x+1)$

---

2)
a) Diferenciável. As derivadas laterais "geram" uma única reta tangente não vertical.
b) Diferenciável. As derivadas laterais "geram" uma única reta tangente não vertical.
c) Não diferenciável. As derivadas laterais "geram" retas tangentes diferentes.
d) Diferenciável. As derivadas laterais "geram" uma única reta tangente não vertical.
e) Não diferenciável. Reta tangente vertical.
f) Não diferenciável. As derivadas laterais "geram" retas tangentes diferentes.
g) Não diferenciável. As derivadas laterais "geram" retas tangentes diferentes.
h) Não diferenciável. Descontínua no ponto.
i) Diferenciável. As derivadas laterais "geram" uma única reta tangente não vertical.

---

3) Letra c
4)
a) Não derivável
b) Não derivável
c) Derivável
d) Não derivável
e) Não derivável
f) Derivável
g) Derivável
h) Derivável

5) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 19.3

1)
a) 0
b) 0
c) 5
d) -12
e) -1
f) $5x^4$
g) $20x^9$
h) $-2x^{-3}$
i) $-12x^{-5}$
j) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
k) $-1{,}6x^{-0{,}2}$
l) $\pi x^{\pi-1}$
m) $9^x ln9$
n) $2.3^x ln3$
o) $-e^x$
p) $-5senx$
q) $-cosx$
r) $-\sqrt{2}senx$

---

2)
a) $y-1=4(x-1)$
b) $y-\frac{1}{8}=\frac{ln8}{8}(x+1)$
c) $y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{\pi}{2})$
d) $y-1=x$
e) $y-2=\frac{1}{4ln2}(x-4)$
f) $y-3=\frac{3}{5ln5}(x-5)$
g) $y-2=\frac{2}{e}(x-e)$

---

3) $5997.x^{1998}$ 4) Letra c. 5) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 19.4

1)

a) $11x$
b) $54x^2 - 2x$
c) $3x^2 + 16x - 2^x ln2$
d) $4x^3 - e^x + 1/x$
e) $6x^2 + 3.e^x + 1/x + 1/(x.ln2)$
f) $5n.x^{n-1} + n.e^x$
g) $4(1 - 3x^2)$
h) $84x^5 + 28x^3 - 4x$
i) $15x^{14} - 13x^{12} + 12x^{11} - 10x^9 - 6x^5 + 4x^3 - 3x^2 + 1$
j) $-3cos^2x.senx$
k) $20x^4(-2x^5 + 3)$
l) $-60x^{14}(1 - x^{15})^3$
m) $3.(e^x - 20x^3)(e^x - 60x^2)$
n) $e^x.lnx + \frac{e^x}{xln3} - 10$
o) $3.(e^x - lnx.x)^2.(e^x - 1 - lnx)$
p) $2.(2^x - cosx.senx + e^x).(2^x.lnx - cos(2x) + e^x)$
q) $2.(cosx + e^x).(senx + e^x) + 3.(senx - e^x).(cosx - e^x)(cosx + e^x)^2$
r) $\frac{-15}{x^{16}}$
s) $\frac{5(1-2x)}{e^x}$
t) $\frac{x^2+2x+11}{(x+1)^2}$
u) $\frac{x.(-x.senx+2.cosx-3xcosx)}{e^{3x}}$
v) $\frac{x.cosx-x.senx-senx}{5e^x x^2}$
w) $\frac{7-42x^2-12x-ln10.(-1+2x^2)(3-7x)}{10^x}$
x) $\frac{24x^{14}.(-x+3)^2.(15-9x+x^2)}{e^{3x}}$

---

2)

a) $2.sec^2x.tgx$
b) $2.sec^2x.tgx$
c) $-senx - cossecx + x.cotgx.cossecx$
g) $-3.cos^2x.senx.sen(4x) + 4.cos^3x.cos(4x)$
h) $-cotgx.cossecx + cossec^2x$
i) $secx.tgx - sec^2x$
j) $secx.tgx$
k) $\frac{-cos2x}{sen^2x.cos^2x}$
l) $\frac{1}{1+cos}$
d) 0
e) $2.sen2x$
f) $-cosx - cotgx.cossecx$
m) $\frac{sec^2x.senx-cosx-senx(1+tgx)}{1-sen2x}$
n) $\frac{1+2tg^2x}{(1-xtgx)^2}$
o) $\frac{4senx+cosx}{(senx-cosx)(1-sen2x)}$

---

3)

a) $\frac{3x^{1/2}.cosx+2.senx(x^{3/2}-1)}{2cos^2x}$
b) $\frac{2x^{3/2}-9-2x.tgx(9+x^{3/2})}{2x^{3/2}secx}$
c) $\frac{-4+25x+16ln2.x-20ln2.x^2}{2^{2+x}x^{3/4}}$
d) $\frac{tg^{1/2}.x(-3senx.cotgx - 4cotgxcossecx)}{8cos^{5/8}x}$

---

4)

a) $y = (e-1)^2$
b) $y - 1 = -8(x - \pi)$
c) $y - 1 = 3x$
d) $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 19.5

1)

a) $5cos5x$

b) $-18cos9x.sen9x$

c) $5^{7x^2-4x}ln5.(14x-4)$

d) $-4.e^{cos^2(4x)}sen(8x)$

e) $-3.cos^2x.senx-3.sen^2x.cosx$

f) e^x-e^{-x}

g) $-16.cos\big(sen(8x)\big).sen(sen8x).cos(8x)$

h) $-6.sen(6x).sen^2(2x^2)+4x.cos(2x^2).cos(6x)$

i) $5e^{sen(5x)}.\big(cos^2(5x)-sen(5x)\big)$

j) $2x^3.cossec^2(x^2)-2x.cotg(x^2)$

k) $\dfrac{-2sen(1+2x)}{5cos^{4/5}(1+2x)}$

l) $8x^7.tg^8(x)+8.tg^7(x).sec^2x.x^8$

m) $\dfrac{-2e^{-x}.x.cos(e^{-x})+sen(e^{-x})}{2\sqrt{3}.x.\sqrt{x}}$

n) $cos(-2x^2+x-1).(-4x+1).cotg(cosx)+cossec^2(cosx).sen(-2x^2+x-1)$

---

2)

a) $x^x.lnx+1$

b) $x^{x^2}.(2.lnx+x)$

c) $x^{3x^3-1}.\left(9x^2lnx+\dfrac{3x^3-1}{2x}\right)$

d) $(2x+1)^{2x+1}.(2.ln(2x+1)+2)$

e) $x^{e^x}.\left(e^xlnx+\dfrac{e^x}{x}\right)$

f) $x^{x.arctgx}.\left(arctgx+\dfrac{x}{x^2+1}\right)$

---

3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}.\dfrac{dz}{dt}.\dfrac{dt}{dw}.\dfrac{dw}{dx}$

4) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 19.6

1)

a) $\dfrac{-1}{(arcsenx)^2.\sqrt{1-x^2}}$

b) $\dfrac{1}{(arcosx)^2.\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{2arc\,tgx}{1+x^2}$

d) $\dfrac{1}{arcsenx.\sqrt{1-x^2}}$

e) $\dfrac{1}{x.\sqrt{1-ln^2x}}$

f) $\dfrac{e^x.x+e^x}{e^{2x}.x^2+1}$

g) $\dfrac{-arcsenx-arcosx}{arccosx.arsenx\sqrt{1-x^2}}$

h) $e^{x.arctgx}(arctx+\dfrac{x}{x^2+1})$

---

2)

a) $\dfrac{-1}{x^2}$

b) $ln^25.5^x$

c) $-cosx+senx$

d) $2.e^xcosx$

---

3)

a) $f'(x)=10x^4+4x^3-3x^2+2x-2$
$f''(x)=40x^3+12x^2-6x+2$
$f'''(x)=120x^2+24x-6$
$f^4(x)=240x+24$
$f^5(x)=240$
$f^6(x)=0$
$\vdots$
$f^n(x)=0$

b) $f'(x)=11^x.ln(11)$
$f''(x)=11^x.ln^2(11)$
$f'''(x)=11^x.ln^3(11)$
$\vdots$
$f^n(x)=11^x.ln^n(11)$

c) $f'(x) = e^x$
$f''(x) = e^x$
$f'''(x) = e^x$
$\vdots$
$f^n(x) = e^x$

d) $f'(x) = -senx$
$f''(x) = -cosx$
$f'''(x) = senx$
$f^4(x) = cosx$
$f^5(x) = -senx$
$f^6(x) = -cosx$
$\vdots$
$f^n(x) = cos(x + \frac{n\pi}{2})$

---

4) A cargo do leitor.

5)

a) $y' = \frac{-x}{y}$

b) $y' = \frac{-x}{y}$

c) $y' = \frac{-(x+2y)}{2x+y}$

d) $y' = \frac{-3x^2-2xy}{x^2+3y^2}$

e) $y' = \frac{e^{xy}.y-1}{1-e^{xy}.x}$

f) $y' = \frac{-cos(x+y)}{cos(x+y)+seny}$

g) $y' = \frac{sec^2(x+y)+senx}{cosy - sec^2(y+x)}$

h) $y' = \frac{e^{x/y}.y}{y^2seny+y^3.cosy+e^{x/y}.x}$

---

6)

a) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

b) $y = x + 2$

c) $y = -x + 4$

d) $y = \frac{9}{13}x + \frac{80}{13}$

---

7)

a) $y'' = \frac{-12xy^2-9x^4}{4y^3}$ b) $y'' = \frac{-sen^2y.senx-cos^2x.cosy}{sen^3y}$ c) $y'' = \frac{-6x^2}{y^7}$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 20.1

1)

a) Crescente $\forall x \in \mathbb{R}$. Não possui concavidade e nem pontos de inflexão.

b) Decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$. Não possui concavidade e nem pontos de inflexão.

c) Crescente para $x > \frac{5}{2}$ e decrescente para $x < \frac{5}{2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ concavidade para cima. Não possui pontos de inflexão.

d) Crescente para $x > 0$, decrescente para $x < 0$ e constante para $x = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$ concavidade para cima. Não possui pontos de inflexão.

e) Crescente para $x < 1$, decrescente para $x > 1$ e constante para $x = 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$ concavidade para baixo. Não possui pontos de inflexão.

f) Crescente para $x < 0$, decrescente para $x > 0$ e constante para $x = 0$. Concavidade para cima para $x < 0$, concavidade para baixo para $x > 0$ e $x = 0$ é ponto de inflexão.

g) Crescente para $x > 0$, decrescente para $0 < x < 1$ e constante para $x = 0$ *e* $x = 1$. Concavidade para cima para $x > 0{,}5$, concavidade para baixo para $x < 0{,}5$ e $x = 0{,}5$ é ponto de inflexão.

h) Crescente para $x \neq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ para decrescente e constante para $x = -1$. Concavidade para cima para $x > -1$, concavidade para baixo para $x < -1$ e $x = -1$ é ponto de inflexão.

i) Crescente para $x > -2$, decrescente para $x < -2$ e constante para $x = -2$. $\forall x \in \mathbb{R}$ concavidade para cima. Não possui pontos de inflexão.

j) Crescente para $x < 0$ *e* $x > 2$, decrescente para $0 < x < 2$ e constante para $x = 0$ *e* $x = 2$. Concavidade para cima para $x > \frac{3}{2}$, concavidade para baixo para $x < \frac{3}{2}$ e $x = \frac{3}{2}$ é ponto de inflexão.

k) Crescente para $x > 0$, decrescente para $x < 0$ e $0 < x < 2$ e constante para $x = 0$ e $x = 2$. Concavidade para cima para $x > \frac{8}{5}$ e $x < 0$, concavidade para baixo para $0 < x < \frac{8}{5}$ e $x = 0$ e $x = \frac{8}{5}$ são os pontos de inflexão.

l) Decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$. Concavidade para cima para $x > 0$, concavidade para baixo para $x < 0$ e não possui os pontos de inflexão.

m) Crescente para $x > 0$, decrescente para $x < 0$. Concavidade para cima para $x \neq 0$ e $x = 0$ é ponto de inflexão.

n) Decrescente para $x \neq \frac{1}{2}$. Concavidade para cima para $x > \frac{1}{2}$, concavidade para baixo para $x < \frac{1}{2}$ e não possui pontos de inflexão.

o) Decrescente para $x \neq -1$ e $x \neq 1$. Concavidade para cima para $-1 < x < 0$ e $x > 1$, concavidade para baixo para $0 < x < 1$ e $x < -1$ e $x = 0$ é ponto de inflexão.

p) Crescente para $x > 1$, decrescente para $0 < x < 1$ e constante para $x = 1$. Concavidade para cima para $x > 0$ e não possui pontos de inflexão.

q) Crescente para $x < -2$ e decrescente para $x > 2$. Concavidade para baixo para $x > 2$ e $x < -2$ e não possui pontos de inflexão.

r) Crescente para $\forall x \in \mathbb{R}$. Concavidade para cima para $x < 2$, concavidade para baixo para $x > 2$ e $x = 2$ é ponto de inflexão.

s) Decrescente para $\forall x \in \mathbb{R}$. Concavidade para cima para $x < 1$, concavidade para baixo para $x > 1$ e $x = 1$ é ponto de inflexão.

t) Crescente para $x < 0$, decrescente para $x > 0$ e constante para $x = 0$. Concavidade para cima para $\forall x \in \mathbb{R}$ e não possui pontos de inflexão.

u) Crescente para $x < 0$, decrescente para $x > 0$ e constante para $x = 0$. Concavidade para cima para $\forall x \in \mathbb{R}$ e não possui pontos de inflexão.

v) Crescente para $x < 1$, decrescente para $x > 1$ e constante para $x = 1$. Concavidade para cima para $x > 2$, concavidade para baixo para $x < 2$ e $x = 2$ é ponto de inflexão.

w) Crescente para $x > -1$, decrescente para $x < -1$ e constante para $x = 1$. Concavidade para cima para $x > -2$, concavidade para baixo para $x < -2$ e $x = -2$ é ponto de inflexão.

---

2)

a) Crescente para $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$, decrescente para $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ e constante para $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{5\pi}{4}$. Concavidade para cima para $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$, concavidade para baixo para $0 < x < \frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$ são pontos de inflexão.

b) Crescente para $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{4}$, decrescente para $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ e constante para $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$. Concavidade para cima para $0 < x < \frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8} < x < \frac{5\pi}{8}$ e $\frac{7\pi}{8} < x < \pi$, concavidade para baixo para $\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$ e $\frac{5\pi}{8} < x < \frac{7\pi}{8}$. Por fim, $x = \frac{\pi}{8}$, $x = \frac{3\pi}{8}$, $x = \frac{5\pi}{8}$ e $x = \frac{7\pi}{8}$ são pontos de inflexão.

c) Crescente para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, decrescente para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ e constante para $x = \frac{\pi}{2}$. Concavidade para cima para $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$, concavidade para baixo para $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Por fim, $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$ são pontos de inflexão.

d) Crescente para $0 < x < \frac{\pi}{4}$, decrescente para $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$. Concavidade para baixo para $0 < x < \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$. Não são pontos de inflexão.

e) Crescente para $0 < x < \frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$, decrescente para $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ e constante para $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$. Concavidade para cima para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, concavidade para baixo para $0 < x < \frac{\pi}{2}$. E $x = \frac{\pi}{2}$ é ponto de inflexão.

f) Crescente para $x > 0$, decrescente para $x < 0$. Concavidade para baixo para $x \neq 0$. Não possui ponto de inflexão.

g) Crescente para $x < -2$, decrescente para $x > 2$. Concavidade para baixo para $x < -2$ *e* $x > 2$. Não possui ponto de inflexão.

h) Crescente para $0 < x < 1$, decrescente para $-1 < x < 0$ e constante para $x = 0$. Concavidade para cima para $-1 < x < 1$. Não possui ponto de inflexão.

---

3) Letra e
4) É um ponto de inflexão. O teste não se aplica porque a função não é derivável no ponto.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 20.2

1)
a) Ponto crítico: $x = 2$ (mínimo absoluto).
b) Não possui pontos críticos.
c) Ponto crítico: $x = 2$ (não é extremo).
d) Ponto crítico: $x = 2$ (mínimo absoluto).
e) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 1 \text{ (mínimo absoluto)} \\ x = 2 \text{ (mínimo relativo)} \\ x = 3/2 \text{ (máximo relativo)} \end{cases}$
f) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 2 \text{ (não é extremo)} \\ x = 1/2 \text{ (mínimo absoluto)} \end{cases}$
g) Ponto crítico: $x = 1$ (mínimo absoluto).
h) Não existem pontos críticos e nem extremos.
i) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 1 \text{ (máximo absoluto)} \\ x = -1 \text{ (mínimo absoluto)} \end{cases}$
j) Ponto crítico: $x = 0$ (máximo relativo).
k) Ponto crítico: $x = 0$ (mínimo relativo).
l) Ponto crítico: $x = 0$ (mínimo absoluto).
m) Ponto crítico: $x = 0$ (máximo absoluto).
n) Ponto crítico: $x = -1$ (mínimo absoluto).
o) Ponto crítico: $x = 0$ (mínimo absoluto).
p) Ponto crítico: $x = 1/2$ (mínimo absoluto).
q) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 0 \text{ (mínimo absoluto)} \\ x = -2 \text{ (máximo relativo)} \end{cases}$
r) Não existem pontos críticos e nem extremos.

---

2)
a) Pontos críticos: $\begin{cases} x = \pi/4 \text{ (máximo relativo)} \\ x = 3\pi/4 \text{ (mínimo relativo)} \end{cases}$

b) Pontos críticos: $\begin{cases} x = \pi \ e \ x = 2\pi \ (máximos \ relativos) \\ x = \pi/2 \ e \ x = 3\pi/2 \ (mínimos \ relativos) \end{cases}$

c) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 3\pi/4 \ (máximo \ absoluto) \\ x = 7\pi/4 \ (mínimo \ absoluto) \end{cases}$

d) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 2\pi \ (máximo \ absoluto) \\ x = 0 (mínimo \ absoluto) \end{cases}$

e) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 5\pi/12 \ \ (máximo \ relativo) \ \ e \ x = 11\pi/12 \ (máximo \ absoluto) \\ x = 7\pi/12 \ \ (mínimo \ relativo) \ \ e \ x = \pi/12 \ (mínimo \ absoluto) \end{cases}$

f) Pontos críticos: $\begin{cases} x = \pi/3 \ (máximo \ absoluto) \\ x = 5\pi/3 \ (mínimo \ absoluto) \end{cases}$

g) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 0 \ (máximo \ relativo) \\ x = \pi \ (máximo \ absoluto) \end{cases}$

h) Não existem pontos críticos e nem extremos.

---

3)

a) Ponto crítico: $x = -1$ (máximo absoluto), $\begin{cases} x = -1 \text{ constante.} \\ x < -1 \text{ crescente.} \\ x > -1 \text{ decrescente} \end{cases}$ $e \ \forall x \in \mathbb{R}$ concavidade para baixo.

b) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 0 \ (mínimo \ relativo) \\ x = 64/125 \ (máximo \ relativo) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0 \ e \ x = 64/125 \text{ constante.} \\ 0 < x < 64/125 \text{ crescente.} \\ x < 0 \ e \ x > 64/125 \text{ decrescente} \end{cases}$ e

$\begin{cases} x < 0 \text{ concavidade para cima.} \\ x > 0 \text{ concavidade para baixo.} \\ não \ possui \ pontos \ de \ inflexão \end{cases}$

c) Ponto crítico: $x = 1$ (máximo absoluto), $\begin{cases} x = 1 \text{ constante.} \\ x < 1 \text{ crescente.} \\ x > 1 \text{ decrescente} \end{cases}$ $e \ \forall x \in \mathbb{R} | x > 1$ concavidade para baixo.

d) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 1 \ (mínimo \ relativo) \\ x = e^{-2} \ (máximo \ relativo) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \ e \ x = e^{-2} \text{ constante.} \\ 0 < x < e^{-2} \ e \ \ x > 1 \text{ crescente.} \\ e^{-2} < x < 1 \text{ decrescente} \end{cases}$ concavidade para baixo para $0 < x < 1/e$, concavidade para cima para $x > 1/e$ e $x = 1/e$ é ponto de inflexão.

e) Ponto crítico: $x = -3$ (mínimo absoluto), $\begin{cases} x = -3 \ e \ x = 0 \text{ constante.} \\ x < -3 \ \ decrescente. \\ x > -3 \text{ crescente.} \end{cases}$. Concavidade para cima para $\forall x \in \mathbb{R}$.

f) Pontos críticos: $\begin{cases} x = 1 \ (máximo \ absoluto) \\ x = -1 \ (mínimo \ absoluto) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 1 \ e \ x = -1 \text{ constante.} \\ -1 < x < 1 \text{ crescente.} \\ x < -1 \ e \ x > 1 \text{ decrescente} \end{cases}$ e

$\begin{cases} -\sqrt{3} < x < 0 \ \ e \ x > \sqrt{3} \text{ concavidade para cima.} \\ x > -\sqrt{3} \ e \ \ 0 < x < \sqrt{3} \text{ concavidade para baixo.} \\ x = 0, x = -\sqrt{3} \ e \ x = \sqrt{3} \ \ são \ pontos \ de \ inflexão \end{cases}$

g) Ponto crítico: $x = 0 \ (mínimo \ absoluto)$, $\begin{cases} x = 0 \text{ constante.} \\ x > 0 \text{ crescente.} \\ x < 0 \text{ decrescente} \end{cases}$ e

$\begin{cases} -1 < x < 1 \ \ \text{concavidade para cima.} \\ x < -1 \ e \ \ x > 1 \text{ concavidade para baixo.} \\ x = -1 \ e \ x = 1 \ \ são \ pontos \ de \ inflexão \end{cases}$

h) Ponto crítico: $x = 0$ $(mínimo\ absoluto)$, $\begin{cases} x = 0 \text{ constante.} \\ x > 0 \text{ crescente.} \\ x < 0 \text{ decrescente} \end{cases}$ e $-1 < x <$ 1 concavidade para cima.

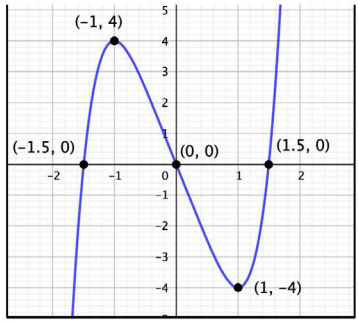
i) Pontos críticos: $\begin{cases} x = -1\ (máximo\ relativo) \\ x = 1\ (mínimo\ relativo) \end{cases}$, $x < -1\ e\ x > 1$ crescente. e $\begin{cases} x > 0 \text{ concavidade para cima.} \\ x < 0 \text{ concavidade para baixo.} \\ x = 0\ ponto\ de\ inflexão \end{cases}$

j) Pontos críticos: $\begin{cases} x = -1\ (máximo\ relativo) \\ x = 0\ (mínimo\ relativo) \end{cases}$, $\begin{cases} x = 0\ e\ x = -1 \text{ constante.} \\ x > 0\ e\ x < -1 \text{ crescente.} \\ -1 < x < 0 \text{ decrescente} \end{cases}$. e $\begin{cases} x > -1/2 \text{ concavidade para cima.} \\ x < -1/2 \text{ concavidade para baixo.} \\ x = -1/2\ ponto\ de\ inflexão \end{cases}$

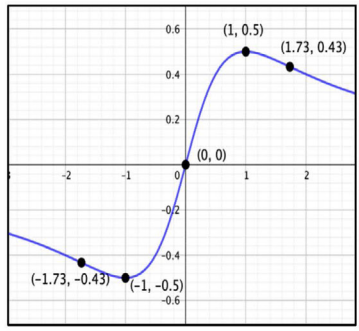
---

4) Letra e
5) Letra e
6) Letra a
7) (2, 0)
8)

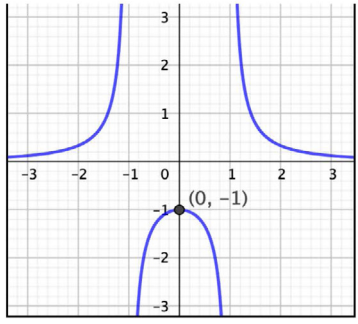
a)



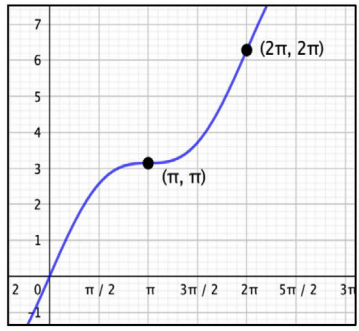
b)



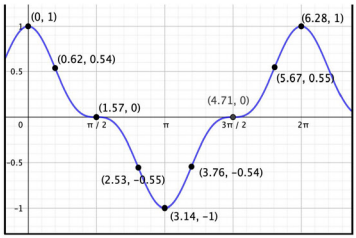
c)



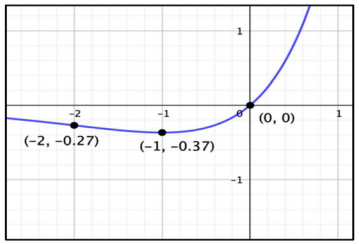
d)



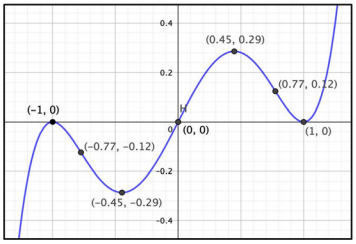
e)



f)



g)



GABARITO DOS EXERCÍCIOS 20.3

1) a) $a = S/2$ e $b = S/2$
2) (1, 1)
3) *Um quadrado de lado* r.
4) $P/2$ e $P/2$. *O perímetro é* $P = 4\sqrt{A}$
5) Lado da base: 60 cm e altura: 30 cm.
6) a) $x = \sqrt[3]{2V}$ e $h = \sqrt[3]{V/4}$
7) Lado da base: 30 cm e altura: 15 cm.
8) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi r^3$
9) $r = 8\ cm$ e $h = \frac{20}{3}\ cm$.
10) $50m\ x\ 100m$.
11) a) $\frac{5}{2}\ cm\ x\ 6cm$ b) $\frac{30}{13}\ cm\ x\ \frac{13}{2}\ cm$.
12) $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi R^3$
13) $r = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt[6]{\pi^2}}\ cm$ e $h = \frac{8}{\sqrt[3]{\pi}} cm$.
14) $x = 3$ e $x = -3$.
15) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 20.4

1)
a) $3x^2 - 3$
b) $cosx$
c) $a^x . lna$
d) $1/x$

2) a) $f(x) = -x^3$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5$
3) 360
4) 58m/s
5) $f(x) = 17 + \frac{(x-5)^3}{4}$. No mês de setembro o preço estimado é de R$ 33,00.
6) a) 1/400π cm/s. b)1/25π cm/s. c)10 cm/s
7) a) 160 cm/s. b)10 cm/s. c)3 cm/s

---

8) 7/2 cm/min
9) 1cm³/s
10) -24/5 m/s
11) $log_{(1+i)}\, e$
12) ≅0,8cm/s

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 20.5

1)
a) 2
b) 2
c) ∄
d) -23/4
e) n/m
f) 1
g) a/b
h) 1
i) 3
j) 1
k) 1
l) -∞
m) 0
n) +∞
o) 0
p) 0
q) 1
r) $1/e^4$
s) 1
t) e^2
u) ∄
v) 1
w) e^2
x) e

---

2)
a) 1/2
b) +∞
c) 0
d) 1/2
e) 1
f) a

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 20.6

1) a) R$ 51,30 b) Sim.

2) a) Máximo → (0,14;1,18)
b) Máximo → (0,29;1,13)
c) Decrescimento $0{,}14 < x < 0{,}29$
d) Ponto de inflexão → (0,22;1,15)

3) $r = \sqrt[3]{\frac{1}{20\pi}}$ e $h = 2.\sqrt[3]{\frac{1}{20\pi}}$

4) 200m x 400m.

5) a)$x = 50\sqrt{6}m\ e\ x = \frac{100\sqrt{6}}{3}$ b)$x = 100\ m\ e\ y = 100m$ c) A cargo do leitor
6) a) 40m x 40m. b)circular
7) 10.
8) a) $x = 15$ *b)* $\theta = \frac{\pi}{3}$

9) a) $y = -0{,}005x^3 + 0{,}095x^2 - 3{,}4x + 40$ b) Porque as abscissas estão em P.A

10)
a) $y = 0{,}00006x^3 - 0{,}0138x^2 + 0{,}73x + 50$
b) A média de grãos é aproximadamente 61, para uma dose de 34 kg/ha de Nitrogênio.

11) Mg ≅ 20 e k≅ 73,05
12)
a) $y = -0{,}000023x^3 + 0{,}014x^2 - 2{,}65x + 186$
b) $N = 39{,}23\ e\ DAE = 255{,}45$

13) $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{5\pi} m/min$

14) a) $\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4} m/mês$ b) 10m.

---

15) $\frac{4}{15} rad/s$

16) $\frac{3\pi}{2} m^3/min$

17) 5 m/min

18) $7{,}03.10^{0{,}9}$

19) $\frac{dP}{dt} \cong 7\ reais/ano$

20) $\frac{dP}{dt} \cong P_0.3^9.ln3$

---

21)

a) $\frac{dy}{dx} \cong 0{,}214$

b) A derivada é positiva para qualquer x, portanto, sempre crescente. Porém, $\lim_{x\to+\infty} y = 67{,}856$ o que significa que cresce mas não indefinidamente.

22) a) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{dw}{dt} = \frac{5}{4}$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.1

1)

a) 15

b) 0

c) $\frac{-39}{2}$

d) 6

e) $\frac{8}{3}$

f) $\frac{1}{3}$

g) 0

h) 0

i) $\frac{-26}{3}$

j) $\frac{16-4\sqrt{2}}{3}$

k) 0

l) 0

m) 1

n) $ln\ (3)$

o) $\frac{-10}{3}$

p) $\frac{\pi}{6}$

q) $arctg(2\pi)$

r) $-arctg(2\pi)$

s) $e^{\pi} - \pi^3 - 3$

t) $\frac{4}{3} - \frac{1}{e} - \frac{\pi}{4}$

u) $3\sqrt{2} - \frac{21}{8} - \left(\frac{5.2^{3/5}-5}{3}\right)$

---

2)

a) $2\ u.a$

b) $32\ u.a$

c) $25\ u.a$

d) $\pi\ u.a$

e) $\frac{\pi}{4} u.a$

f) $\frac{1}{ln2} u.a$

g) $\frac{3}{2} u.a$

---

3)

a) $\frac{1}{2} u.a$ b) $4\pi\ u.a$

4) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.2

1) $\frac{9}{2}$

2) $\frac{16\sqrt{2}}{15}$

3) $\frac{1}{3}$

4) $\frac{37}{12}$

5) a) $\frac{4}{3} u.a$ b) $\frac{37}{12} u.a$

6) Letra d.

7) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.3

1)

a) $\frac{(5+x)^4}{4}+c$

b) $\frac{-(1-x^2)^6}{12}+c$

c) $\frac{(1+2x^2)^{3/2}}{6}+c$

d) $\frac{2(1+3x)^{3/2}}{9}+c$

e) $\frac{2(1+x^3)^{3/2}}{9}+c$

f) $\sqrt{x^2+2}+c$

g) $\frac{(1+\sqrt{x})^4}{2}+c$

h) $\frac{sen(7x)}{7}+c$

i) $\frac{-cos\,(5x+1)}{5}+c$

j) $\frac{-cos\,(x^3-3)}{3}+c$

k) $\frac{sen^2\,(x)}{2}+c$

l) $\frac{-cos^4\,(x)}{4}+c$

m) $senx-\frac{sen^3\,(x)}{3}+c$

n) $-cosx+\frac{cos^3\,(x)}{3}+c$

o) $\frac{-cos^3\,(x)}{3}+c$

p) $\frac{tg^2\,(x)}{2}+c$

q) $\frac{-cotg^2\,(x)}{2}+c$

r) $\frac{-1}{4}\,ln\left|1+cos\,(4x)\right|+c$

s) $\frac{1}{2}\,arctg\left(\frac{x}{2}\right)+c$

t) $arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+c$

u) $arctg\left(\frac{x}{3}\right)+c$

v) $\frac{-1}{9}\sqrt{1-9x^2}+c$

w) $\frac{-\sqrt{3-2x^2}}{2}+c$

x) $\frac{arctg(x^2)}{2}+c$

y) $\frac{e^{5x-3}}{5}+c$

z) $\frac{e^{x^2-1}}{2}+c$

---

2)

a) $\frac{(1+x^2)^{7/2}}{7}-\frac{2(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5}+\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3}+c$

b) $\frac{ln^2x}{2}+c$

c) $\frac{ln^3x}{3}+c$

d) $arctg(x)+\frac{1}{2}ln|1+x^2|+c$

e) $ln|tg(x)|+c$

f) $-\frac{cos^5x}{5}+c$

g) $-tg(cosx)+c$

h) $ln|e^{cosx}-e^{-senx}|+c$

i) $e^{cosx}+c$

j) $ln|e^x-e^{-x}|+c$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.4

1)

a) $e^x(x-1)+c$

b) $\frac{e^{-2x}}{4}(-2x-1)+c$

c) $e^{-2x}(-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4})+c$

d) $\frac{e^x}{2}(senx+cosx)+c$

e) $\frac{x^2}{2}(lnx-\frac{1}{2})+c$

f) $-e^{-x}(x^2+2x+3)+c$

g) $x^2senx+2x.cosx-2.senx+c$

h) $\frac{-1}{3}x.\cos(3x)+\frac{1}{9}sen(3x)+c$

i) $x.tgx-\frac{x^2}{2}+ln|cosx|+c$

j) $-x^2cosx+2xsenx+cosx+c$

k) $\frac{-1}{2}x^2.\cos(2x)+\frac{x.sen(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+c$

l) $\frac{1}{2}x.lnx-\frac{1}{2}x+c$

m) $\frac{1}{3}x^3.lnx-\frac{x^3}{9}+c$

n) $x.ln(x^2+1)-2.(-arctgx+x)+c$

o) $xln^2x-2x.lnx+2x+c$

p) $x.arcsen(2x)+\frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+c$

q) $x.arctg(3x)-\frac{1}{6}ln|9x^2+1|+c$

r) $x.arcsen^2(x)-2(-arcsen(x).\sqrt{1-x^2}+x)+c$

s) $-ln(cosx).cosx+cosx+c$

t) $-2.e^{cosx}(cosx-1)+c$

u) $\frac{e^x}{2}\left(-xcosx+x.senx+cosx\right)+c$

v) $\frac{x^3}{6}-\frac{x^2 sen2x}{4}-\frac{xcos2x}{4}+\frac{sen2x}{8}+c$

2) A cargo do leitor.

3)

a) $-3.e^{-2}+1$

b) $\frac{8}{3}.ln^2 2-\frac{16}{9}ln2+\frac{14}{27}$

c) $\frac{-e^{\pi}-1}{2}$

d) π^2-4

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.5

1)

a) $\frac{cos^3 x}{3}-cosx+c$

b) $cos^3 x.senx+\frac{3}{8}.(x-\frac{1}{4}sen(4x))+c$

c) $\frac{1}{3}.tg^3 x+x-tgx+c$

d) $\frac{1}{3}.tg^3 x+tgx+c$

e) $\frac{sen^3 x}{3}+c$

f) $\frac{x}{8}-\frac{sen(4x)}{32}+c$

g) $\frac{-cos^3(x)}{3}+2.\frac{cos^5(x)}{5}-\frac{cos^7(x)}{7}+c$

h) $\frac{sen^7(x)}{7}-\frac{sen^9(x)}{9}+c$

i) $-cos^2(4x).cosx+2.\frac{\cos(9x)}{9}+\frac{2.cos(7x)}{7}+c$

j) $\frac{1}{2}.\left(\frac{-1}{5}cos5x+cosx\right)+c$

k) $\frac{1}{4}.\left(\frac{-1}{3}\cos(6x)-\cos(2x)\right)+c$

l) $\frac{sen^2(2x).sen(3x)}{3}-\frac{1}{21}.\left(-sen(7x)+7.senx\right)+c$

m) $\frac{cos^2(3x)}{12}-\frac{cos(4x)}{16}-\frac{cos(2x)}{8}+c$

n) $\frac{tg^7(x)}{7}+c$

o) $\frac{tg^5(x)}{5}+2.\frac{tg^7(x)}{7}+\frac{tg^9(x)}{9}+c$

p) $\frac{sec^7(x)}{7}-2.\frac{sec^5(x)}{5}+\frac{sec^3(x)}{3}+c$

2) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.6

1)

a) $\frac{1}{2}(arcsenx+x\sqrt{1-x^2})+c$

b) $\frac{x\sqrt{9+x^2}}{2}+\frac{9}{2}.ln\left|\frac{x+\sqrt{9+x^2}}{3}\right|+c$

c) $\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2}+2.ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+c$

d) $ln\left|\frac{\sqrt{x^2-9}+x}{3}\right|+c$

e) $arcsen\left(\frac{x}{2}\right)+c$

f) $ln\left|\frac{x+\sqrt{25+x^2}}{5}\right|+c$

g) $\sqrt{x^2+1}+c$

h) $\frac{1}{2}(arcsenx-x\sqrt{1-x^2})+c$

i) $\sqrt{x^2-1}+c$

j) $-4arcsec\left(\frac{x}{4}\right)+\sqrt{x^2-16}+c$

k) $\frac{-\sqrt{4x^2-9}}{x}+2.ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2-9}}{3}\right|+c$

l) $\frac{1}{2}.\ln|x^2-6x+10|+3.arctg(x-3)+c$

m) $\frac{1}{2}.arctg(\frac{x-1}{2})+c$

n) $\frac{1}{2}.(x-2).\sqrt{x^2-4x+5}+\frac{1}{2}\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+c$

o) $-ln|\sqrt{x^2+2x}+x+1|+\frac{1}{2}\ (x+1).\sqrt{x^2+2x}+\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+2x}+x+1|+c$

p) $-\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}+c$

---

2)

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\sqrt{29}-2$

e) $2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3})$

f) $\frac{\pi+2}{8}$

---

3) $ln(1+\sqrt{2})\,u.a$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.7

1)

a) $\frac{3}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}.\ln|x+1|-\frac{1}{2}.\ln|x-1|+c$

b) $\frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x}{2}+1\right|-\ln\left|\frac{x}{2}-1\right|\right]+c$

c) $\frac{1}{2}\ln|4x^2-12x+8|-\frac{7}{2}.\ln|2x-2|+\frac{7}{2}.\ln|2x-4|+c$

d) $\frac{3}{2}\ln|36x^2+36x+36|-\frac{5\sqrt{3}}{3}.arct\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

e) $\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}.\ln|x+1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-2}+c$

f) $\ln|x+2|+\frac{4}{x+2}-\frac{2}{(x+2)^2}+c$

g) $-2\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}+3.\ln|x+2|+c$

h) $5.\ln|x+1|-2.\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

i) $\ln|x^2+4x+13|+2.arctg\left(\frac{1}{3}.(x+2)\right)+c$

j) $\frac{x^2}{2}+x+\frac{2\sqrt{3}}{3}.arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.8

1)

a) $3\sqrt{5}$

b) $\cong 1{,}48$

c) $\cong 4{,}65$

d) $ln\,(2+\sqrt{3})$

e) $ln\,(1+\sqrt{2})$

f) $\frac{\pi}{2}$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.9

1)

a) $\frac{64\pi}{3}\ u.v$

b) $27\pi\ u.v$

c) $2\pi\ u.v$

d) $\frac{68\pi}{3}\ u.v$

e) $\frac{256\pi}{3}\ u.v$

f) $\pi(3-e)\ u.v$

2)

a) $\frac{5\pi}{2}\ u.v$

b) $\frac{9\pi}{4}\ u.v$

c) $\frac{20\pi}{3}\ u.v$

d) $\pi(2-\sqrt{2})\ u.v$

e) $\pi(\sqrt{2}-ln\,(1+\sqrt{2})\ u.v$

3)

a) $\frac{192\pi}{5}\ u.v$

b) $\frac{\pi}{2}(e^2-1)\,u.v$

c) $\frac{\pi}{3}\ u.v$

d) $\frac{38\pi}{15}\ u.v$

e) $\frac{(\pi-2)}{4}\ u.v$

4)

a) $\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$

b) $\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2)$

c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

d) $\frac{\pi h^2}{3}(3R-h)$

5)

a) $\pi a^2 b - \int_0^b \pi[f(x)]^2 dx$

b) $\pi ab^2 - \int_0^a \pi[g(y)]^2 dy$

c) $\int_0^b \pi[g(x)]^2 dx$

d) $\int_0^a \pi\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx$

6) $\frac{14\pi}{15}\ u.v$

7) $\frac{97-40\sqrt{5}}{6}\ u.v$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.10

1)

a) $8\pi\ u.v$

b) $\frac{27\pi}{16}\ u.v$

c) $\frac{45\pi}{2}\ u.v$

d) $\frac{\pi(\sqrt{2}-4)}{2}\ u.v$

2)

a) $\frac{\pi}{10}\ u.v$

b) $\pi(e-2)\,u.v$

c) $\frac{9\pi}{8}\ u.v$

d) $\frac{\pi}{6}\ u.v$

3) Para utilizar o método dos discos teríamos que isolar x em função de y, o que não é fácil para $y = x(x-1)^4$. O método das camadas cilíndricas não precisa desse passo.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.11

1)
a) 1
b) diverge
c) diverge
d) $2\sqrt{2}$
e) $\frac{\pi}{2}$
f) diverge
g) π
h) diverge
i) diverge
j) 1
k) $\frac{1}{ln5}$
l) $\sqrt[4]{8}$
m) diverge
n) diverge
o) diverge
p) 1

2)
a) $-1/2$
b) $1/2$
c) 0
d) diverge
e) diverge
f) diverge

3) Nos itens a) e b) as áreas são finitas, enquanto nos itens d) e e) não são.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 21.12

1)
$M_3 \cong 1{,}022$
$T_3 \cong 1{,}028$
$S_3 \cong 0{,}93065$
$\int_0^3 e^{-x}dx = 0{,}95021$
O método de Simpson foi o que mais se aproximou.

2) $f(x) = \frac{-x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - x + 1 \Rightarrow e^{-1} \cong \frac{1}{3}$
3) $S_{10} \cong 0{,}626$
4) $T_5 \cong 0{,}3139$
5) $T_7 \cong 17 \Rightarrow 1{,}7\ ha$
6) $\int_0^{24} f(x)dx = 200m^3$
7) $\int_0^2 ydx \cong 2{,}96$
8) $S_6 \cong 8{,}67\ toneladas\ de\ grãos.$
9) $S_4 \cong 816\ m$
10) A função não possui primitiva elementar.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 21.13

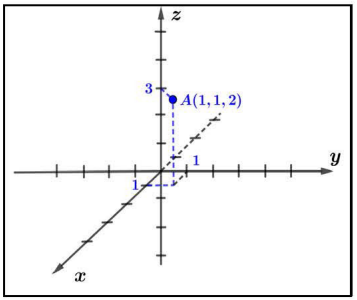
1)
a) $C(2,2)$
b) $C(0,\frac{8}{3\pi})$
c) $C(\frac{27}{24},\frac{21}{24})$
d) $C(\frac{(\pi\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}+2)}{4},\frac{\sqrt{2}+1}{4})$

2) 10 *joules*
3) 750 *joules*
4) $t \cong 14{,}65\ min$
5) $T_a \cong 80°C$
6) $\cong 34{,}77\ min$
7) 138,38 *mil reais*
8) 50,38 *toneladas*
9) 50 *melões*
10) a) $M = R\$\ 14641{,}00$. *b)* $M = R\$\ 14900{,}00$
11) $R\$\ 5063{,}00$
12) $R\$\ 2432{,}80$
13) $R\$\ 140{,}00$
14)a) $R\$\ 276{,}00$. *b)* $2000kg/mês$
15) Letra d.
16) 390 ha
17) $\frac{32\pi}{3} + 4\sqrt{3}\ u.v$
18) $\frac{14}{3} km.$
19) $(1 - e^{-3})\ litros.$
20) *a)* $5m^3$ *b)* $18{,}13m^3$

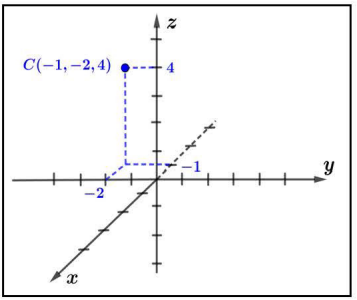
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 22.1

1)

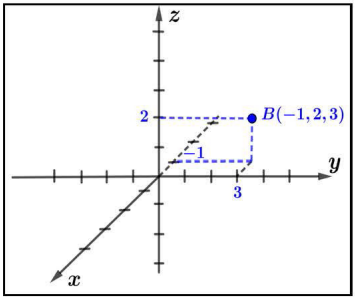
a)



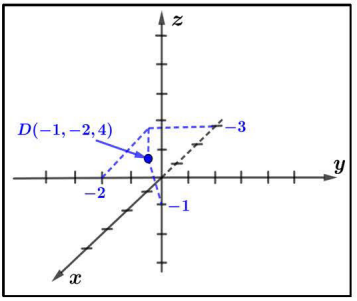
c)



b)



d)



2) a) $5\,u.c$ b) $\sqrt{14}\,u.c$

3) $x = 2$

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

5) $(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$

6) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

7) a) $M\,(-3,0,3)$ b) $M\,(-1,-2,\frac{-3}{2})$

8) a) $G\,(1,1,1)$ b) $G\,(3,3,2)$

9) $13\,u.c$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 22.2

1)

a) $2\sqrt{5}$

b) 5

c) $(0,\frac{3}{5},\frac{-4}{5})$

d) $(4,0,-8)$

e) $(-2,-3,8)$

f) -16

g) $arcos(\frac{-8\sqrt{5}}{25})$

2)

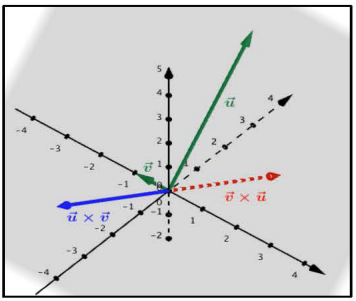
a) $-4j + 3k$

b) $4j - 3k$

c) $(0,\frac{-4}{5},\frac{3}{5})$

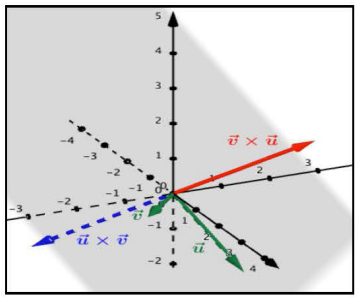
d) 5

e)



3)
a) $-2i-2j-2k$
b) $2i+2j+2k$
c) $(\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{-\sqrt{3}}{3})$
d) $(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{-2\sqrt{3}}{3})$
e) $2\sqrt{3}$

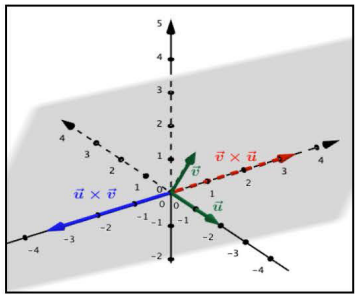
f)



---

4)
a) $-2\sqrt{3}i$
b) $2\sqrt{3}i$
c) i
d) $-5i$
e) $2\sqrt{3}$
f) $60°$

g)



---

5)

a) b) c) d) e) f)

---

6) A cargo do leitor.
7) a) $-j$ b) k c) i
8) $(-275, 150, 50)$
9) a) $\frac{5\sqrt{29}}{2}\,u.a$ b) $\sqrt{29}\,u.c$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 22.3

1) a) 305. b) -40. c)3. d)1.
2) A cargo do leitor.
3) a)16 u.v. b) 14 u.v. c)1 u.v.
4) a) $\frac{17}{6}$ u.v. b) $\frac{1}{6}$ u.v.
5) a) Não são coplanares. b) São coplanares.
6) a) $k=-26$. b) $k=31$ ou $k=-21$
7) $k=10$ ou $k=-2$
8) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 22.4

1)

a) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{x = -1, y = \frac{2-z}{3}}$

b) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{x = y = z}$

c) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 - t \\ z = -2 - t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{y = 0,\ x - 2 = \frac{-z+2}{2}}$

d) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{y = 0, z = 1, x = t}$

2)

a) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{y = 1, x - 2 = \frac{2-z}{2}}$

b) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 1 - 2t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{\frac{x+2}{5} = \frac{1-y}{2} = \frac{5-z}{3}}$

c) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = 5 - 10t \\ y = 15 - 30t \\ z = 20 - 40t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{-x + 5 = \frac{15-y}{3} = \frac{20-z}{4}}$

d) *Equação paramétrica:* $\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}$ e *equação simétrica:* $\boxed{x = 1, y = 1 - z}$

3) a) $\sqrt{\frac{35}{6}}u.c$ b) $\sqrt{\frac{25}{3}}u.c$

4) a) Reversas. b) Paralelas. c) Coincidentes. d) Concorrentes.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 22.5

1) $x - y + 2z + 2 = 0$

2) $(x, y, z) = (1, 0, 0) + t.(2, 1, -2) + h.(1, 0, 1)$

3)

a) $\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 0) + t.(2, 1, -2) + h.(1, 0, 1)}$ e $\boxed{x + 2y + 2z - 7 = 0}$

b) $\boxed{(x, y, z) = (0, 1, 0) + t.(0, -1, 1) + h.(-1, -1, 1)}$ e $\boxed{-2y - z + 1 = 0}$

c) $\boxed{(x, y, z) = (5, 7, 9) + t.(-6, -5, -12) + h.(-7, -6, -7)}$ e $\boxed{37x - 42y - z + 118 = 0}$

d) $\boxed{(x, y, z) = (1, 1, -1) + t.(-8, 0, -6) + h.(2, 2, 4)}$ e $\boxed{3x + 5y - 4z - 12 = 0}$

4) a) $\begin{cases} x = t \\ y = -3 - 2t \\ z = -\frac{14}{5} - t \end{cases}$ b) $\theta = arcos\left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)$

5) a) $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3} - \frac{5}{3}t \\ z = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}t \end{cases}$ b) $\theta = arcos(\cong 0{,}98)$

6) a) $\sqrt{3}$ b) $1\ u.c$

7) a) $\frac{\sqrt{3}}{3}u.c$ b) $\frac{\sqrt{14}}{2}1\ u.c$ c) $\frac{15}{2}1\ u.c$

8)

a) $\boxed{(x,y,z) = (1,0,1) + t.(2,3,-5) + h.(-4,-2,1)}$ e $\boxed{-7x + 18y + 8z - 7 = 0}$

b) $\boxed{(x,y,z) = (0,2,3) + t.(-4,-1,-2) + h.(4,-1,-3)}$ e $\boxed{x - 20y + 8z + 16 = 0}$

9) $-x + 2y - 7z + 36 = 0$

10) $\boxed{(x,y,z) = (1,5,3) + t.(-3,-7,4) + h.(7,-3,0)}$

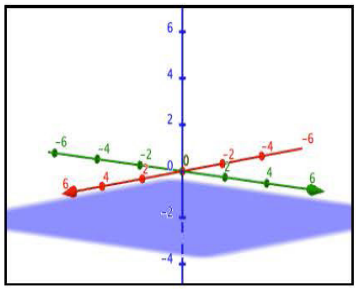
$\boxed{(x,y,z) = (1,5,3) + t.(-3,-7,4) + h.(0,4,7)}$

11) $x + y + 3z - 23 = 0$

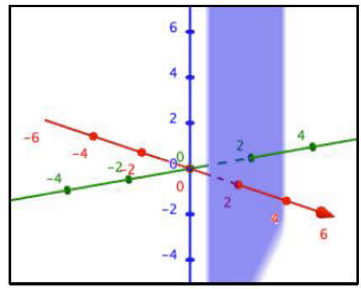
GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.1

1)

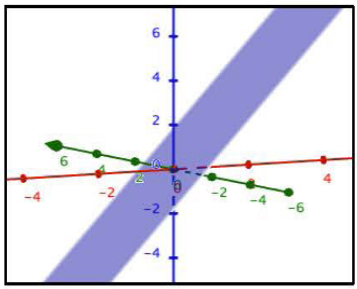
a)



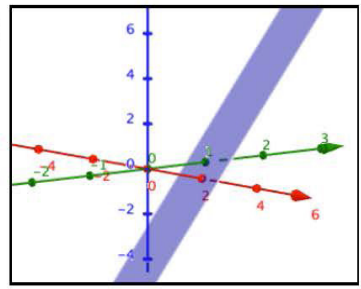
b)



c)



d)



2)

a) Parábolas
b) Hipérboles
c) Elipses
d) Hipérboles
e) Elipses
f) Parábolas

3)

a) Plana
b) Plana
c) Cilíndrica
d) Quádrica
e) Geral
f) Plana
g) Cilíndrica
h) geral

4) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.2

1)
b) $B^2-4AC= -3<0 \rightarrow$ Elipse
c) $B^2-4AC= 16>0 \rightarrow$ Hipérbole
d) $B^2-4AC= 0 \rightarrow$ Parábola

2)
a) 0
b) $\nexists$
c) $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq -y^2\}$

3)
a) 6/13
b) -3
c) $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq -y\}$

4)
a) 0
b) $2\sqrt{3}$
c) $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 \geq y^2 + z^2\}$

5)
a) $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > y^2 + 1\}$
b) $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > |y|\}$
c) $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y < z^2\}$
d) $D=\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^2 \geq y^2 + x^2\}$
e) $D=\mathbb{R}^3$

---

6)
a) 0
b) 45
c) 4
d) 0
e) 0
f) -1/3
g) $\nexists$
h) $\nexists$
i) $\nexists$
j) $2.e^3$
k) 2
l) $\nexists$
m) -1
n) 1

---

7)
a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > y^2 + 1$
b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy \leq 1$
c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > x + 1$
d) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1$
e) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1$
f) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y$

---

8) a)Sim b) Não
9) Letra c.
10) a)$\nexists$ b) 0. c)0. d)1.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.3

1)
a) $f_x(x,y) = 2y^2x + 2yx + y^2 + y$ e $f_y(x,y) = 2yx^2 + x^2 + 2xy + x$
b) $f_x(x,y) = 8xy^2(2y^2x^2 - y^3) + y^2$ e $f_y(x,y) = 2(2y^2x^2 - y^3)(4x^2y - 3y^2) + 2xy$
c) $f_x(x,y) = y.x^{y-1}$ e $f_y(x,y) = x^y.lnx$
d) $f_x(x,y) = y^2(ln(xy) + 1)$ e $f_y(x,y) = xy(2.ln(xy) + 1)$
e) $f_x(x,y) = y.e^{xy}$ e $f_y(x,y) = x.e^{xy}$

f) $f_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ e $f_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

g) $f_x(x,y) = 2x.\cos(y^2 - x) + sen(y^2 - x).x^2$ e $f_y(x,y) = -2x^2y.sen(y^2 - x)$

h) $f_x(x,y,z) = y^2z$, $f_y(x,y,z) = 2yzx$ e $f_z(x,y,z) = xy^2$

i) $f_x(x,y,z) = ln(x + y + z) + 1$, $f_y(x,y,z) = ln(x + y + z) + 1$ e $f_z(x,y,z) = ln(x + y + z) + 1$

---

2)

a) $f_x(x,y) = 2y^2 - 6yx - y$
b) $f_x(1,1) = -6$
c) $f_y(x,y) = 4xy - 3x^2 - x$
d) $f_y(0,0) = 0$
e) $f_{xx}(x,y) = -6y$
f) $f_{yy}(x,y) = 4x$
g) $f_{xy}(x,y) = 4y - 6x - 1$
h) $f_{yx}(x,y) = 4y - 6x - 1$

---

3)

a) $f_x(x,y) = -sen(y^2 + x)$
b) $f_y(x,y) = -2ysen(y^2 + x)$
c) $f_{xx}(x,y) = -cos\,(y^2 + x)$
d) $f_{yy}(x,y) = -4y^2\,cos(y^2 + x) - 2sen(y^2 + x)$
e) $f_{xy}(x,y) = -2ycos\,(y^2 + x)$
f) $f_{yx}(x,y) = -2ycos\,(y^2 + x)$

---

4)

a) $f_{xx}(x,y) = 4y^3 + \frac{1}{x^2}$
b) $f_{yy}(x,y) = 12x^2y + \frac{1}{y^2}$
c) $f_{xy}(x,y) = 12xy^2$
d) $f_{yx}(x,y) = 12xy^2$

---

5)

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\sqrt{xy}}\left(1 + \frac{\sqrt{xy}}{2}\right)$
b) $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{\sqrt{xy}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{y}}\right)$
c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{\sqrt{xy}}\left(\frac{3\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\right)$
d) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\sqrt{xy}}\left(\frac{3x^{\frac{3}{2}}+2y^{\frac{3}{2}}}{4y\sqrt{x}}\right)$

---

6)

a) $f_x(x,y,z) = 2.cos(2x + 2y - z)$
b) $f_y(x,y,z) = 2.cos(2x + 2y - z)$
c) $f_z(x,y,z) = -cos(2x + 2y - z)$
d) $f_{xyz}(x,y,z) = 4.cos(2x + 2y - z)$

---

7)

a) $f_x(x,y,z) = \frac{-yz}{1+x^2y^2z^2}$
b) $f_y(x,y,z) = \frac{-xz}{1+x^2y^2z^2}$
c) $f_z(x,y,z) = \frac{-xy}{1+x^2y^2z^2}$
d) $f_{yx}(x,y,z) = \frac{-z+3x^2y^2z^3}{(1+x^2y^2z^2)^2}$

---

8)

a) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{x}$
b) $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{y}$
c) $\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{z}$
d) $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = 0$

---

9)

$f_{xxx}(x,y,z) = ye^{xy}$
$f_{xxy}(x,y,z) = (2y + xy^2)e^{xy}$
$f_{yyy}(x,y,z) = x^3e^{xy}$
$f_{yyx}(x,y,z) = (2x + yx)^2e^{xy}$

---

10)

a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-xy^3}{z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-3y^2x^2+2y}{2z}$

b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yx - 2z^{23}}{2zx}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy}{zz}$

c) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yx^2 + y^3 + z^2 - 2x}{2z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3 + xy^2 + xz^2 - 2y}{2z}$

d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{9z}$ e $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{4z}$

---

11)

a) $f_x(1,1) = 2$

b) $f_y(0,0) = 0$

c) $f_x\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -1$

d) $f_y\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = -1$

---

12)

a) $r: (1,1,3) + t(0,1,-2)$

b) $r: (0,1,4) + t(1,0,0)$

c) $r: (1,1,5) + t(0,1,4)$

d) $r: (0,0,0) + t(1,0,1)$

e) $r: (1,1,e^2) + t(1,0,2e^2)$

f) $r: (1,1,e^2) + t(0,1,2e^2)$

---

13)

a) $r: (1,1,4) + t(0,1,\frac{-1}{4})$ e $s: (1,1,4) + t(1,0,\frac{-1}{4})$

b) As derivadas parciais não existem no ponto, porque as retas tangentes na direção do eixo x e y são verticais ao plano xy.

---

14) $r: \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t(0,1,\frac{-\sqrt{2}}{2})$ e $s: \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + t(1,0,\frac{-\sqrt{2}}{4})$

15) $f(x,y) = x^3y^2 - 2x^2 + y + c$

16) a) $f_x(x,y) = y.e^{x^2y^2}$ e $f_y(x,y) = x.e^{x^2y^2}$ b) $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = cosy^2$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.4

1)

a) $f(x,y) = 0$

b) $f(x,y) = 4x - 2y - 3$

c) $f(x,y) = 3x - 2$

d) $f(x,y) = \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5}$

e) $f(x,y) = 4x - y - 5$

f) $f(x,y) = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{4}$

---

2) $f(1{,}1; 0{,}9) = 1 + 0{,}1\pi$

3) $df(x,y) = (3x^2 - y^2)dx + (-2xy)dy$

4) $df(x,y,z) = (2xy + 3y)dx + (x^2 + zx + 2yz)dy + (xy + y^2)dz$

5)

a) $df(x,y) = (2x - 3y)dx + (-3x + 2y)dy$

b) $\Delta f = 0{,}011$ e $df = 0{,}01$

6) $df(x,y) = \left(e^{x^2y}.2xy\right)dx + \left(e^{x^2y}.x^2\right)dy$; $df = 0{,}02$ e $\Delta f = 0{,}0254$

7) $dw(x,y,z) = (e^{xyz}.yz + e^{-xyz}yz)dx + (e^{xyz}.xz + e^{-xyz}xz)dy + (e^{xyz}.xy + e^{-xyz}xy)dz$
$dw = 0{,}02$

8) 16,12%

9) De 7 para 6,8255

---

10)

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{12x-y}{x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-2(3x+y)}{x}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y(x+2)}{x+1}$

---

11)

a) As derivadas parciais não são contínuas no ponto (1, 4) e portanto, a função não é diferenciável nesse ponto, conforme o teorema 23.6.7.1.

b) A função não é contínua no ponto (1, 2), portanto, não é diferenciável também nesse ponto, conforme a contrapositiva do teorema 23.6.7.2.

---

12)

a) $\frac{df}{dt} = 2.(cos2t - sen2t)$

b) $\frac{df}{dt} = -2.(e^{-2t} + e^{2t})$

c) $\frac{df}{dt} = e^{t^2(1+2t)}.(1 + t.(2t + 6t^2))$

d) $\frac{df}{dt} = \frac{2t.e^{t^2}}{e^{2t^2}+1}$

---

13)

a) $\frac{df}{ds} = 4s^3 cos^2 t.sent$

$\frac{df}{dt} = s^4(-2.sen^2 t.cost + cos^3 t)$

b) $\frac{df}{ds} = 2(s+t) + t^4(3s^2 + 2st)$

$\frac{df}{dt} = 2(s+t) + t^2(4st^3 + 5t^4)$

c) $\frac{df}{ds} = e^{s.e^t+2} + s.e^{-t}(e^t + e^{-t})$

$\frac{df}{dt} = e^{s.e^t+2} + s.e^{-t}(s.e^t - s.e^{-t})$

d) $\frac{df}{ds} = tg(5-t).\cos(2+st)$

$\frac{df}{dt} = -sen(2+st).sec^2(5-t) + s.\cos(2+st).tg(5-t)$

14) A cargo do leitor

15) $\frac{dz}{dx} = -\frac{2x+3y+z^2}{2zx+1}$ e $\frac{dw}{dy} = -\frac{zx}{2zx+1}$

16) $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x(2zx-1)}$ e $\frac{dw}{dy} = -\frac{1+z^2y}{y(2yz-1)}$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.5

1)

a) $D_u f = 0$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle 0,0 \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = 0$.

b) $D_u f = -\frac{1}{5}$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle -1,1 \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \sqrt{2}$.

c) $D_u f = -1$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle 1,1 \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \sqrt{2}$.

d) $D_u f = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle -\frac{\pi}{2}, -1 \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}$.

e) $D_u f = \frac{e\sqrt{2}}{2}(\pi + 1)$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle -e\pi, -e \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = e\sqrt{\pi^2 + 1}$.

f) $D_u f = \frac{2}{3}$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle 2,0,0 \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = 2$.

g) $D_u f = 0$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

h) $D_u f = \sqrt{3}$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle 1,1,1 \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \sqrt{3}$.

i) $D_u f = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\overrightarrow{\Delta f} = \langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$. A taxa máxima fica na direção e sentido de $\overrightarrow{\Delta f}$ e seu valor é $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = 1$.

2)

a) $r: t(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}, 0)$ e $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = 0$.

b) $r: \left(0, \frac{\pi}{2}, 0\right) + t(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ e $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \sqrt{5}$

c) $r: \left(6, 8, \frac{3}{50}\right) + t(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{500})$ e $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \frac{1}{100}$

d) $r: (1,1,13) + t(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}, \frac{29}{2})$ e $\left|\overrightarrow{\Delta f}\right| = \frac{13\sqrt{5}}{2}$

3)

a) $\vec{n} = \langle 0,0,4 \rangle$ e a equação da reta tangente é $z - 2 = 0$.

b) $\vec{n} = \langle 2,4,2 \rangle$ e a equação da reta tangente é $x + 2y + z - 6 = 0$.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.6

1)

a) Mínimo absoluto: $(0,0,0)$

b) Mínimo absoluto: $(0,0,0)$

c) Máximo absoluto: $(2,4,21)$

d) Ponto de sela: $(-2,-3,1)$

e) Máximo absoluto: $(-1,1,4)$

f) Mínimos relativos: $(1,1,-6)$ *e* $(-1,-1,6)$ e ponto de sela: $(0,0,-4)$

g) Não possui extremos e nem ponto de sela.

h) Não possui extremos e nem ponto de sela.

i) Máximo absoluto: $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}\right)$ e mínimo absoluto: $\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-1/2}\right)$

j) Ponto de sela: $(2,2,-12)$

k) Mínimos relativos: $(2,2,16)$ *e* $(-2,-2,1\,6)$

l) Máximo relativo: $(-1,0,2\,)$, mínimo relativo: $(1,0,-2)$ e pontos de sela: $(0,1,0)$ *e* $(0,-1,0)$

m) Máximo absoluto: $(1,1,-1)$ e $(-1,-1,-1)$

2) Infinitos pontos críticos.
3) Ponto de mínimo relativo: $(1,1,\frac{3}{2})$, ponto de máximo relativo: $(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{73}{27})$ e pontos de sela são: $\left(\frac{2}{3},1,\frac{41}{27}\right)$ e $\left(1,-\frac{1}{3},\frac{145}{54}\right)$

---

4) $\frac{4}{9}\ u.c$
5) $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{10}{3}\right)$
6) $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
7) $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$
8) $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$
9) 20, 20 e 20.
10) Um cubo de 2 metros de aresta.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 23.7

1)
a) Pontos mínimos: $(\sqrt{2},\sqrt{2},4)$ e $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},4)$
b) Ponto mínimo: $(-1,-1,2)$ e ponto máximo: $(1,1,2)$
c) Ponto máximo: $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},e^{1/4}\right)$.
d) Ponto mínimo: $(-1,-1,-2)$ e ponto máximo: $(1,1,2)$
e) Pontos máximos: $(1,1,1),(-1,-1,1),(1,-1,-1)$ e $(-1,1,-1)$
Pontos mínimos: $(-1,-1,-1),(-1,1,1),(1,-1,1)$ e $(1,1,-1)$
f) Pontos máximos: $(-3,-3,3),(-3,3,-3),(3,-3,-3)$ e $(3,3,3)$
Pontos mínimos: $(-3,-3,-3),(-3,3,3),(3,-3,3)$ e $(3,3,-3)$

2) $(2,2,8)$
3) Ponto mais próximo: $(\sqrt{2},0,2\sqrt{2})$ e mais distante: $(-\sqrt{2},0,-2\sqrt{2})$
4) A cargo do leitor
5) A cargo do leitor

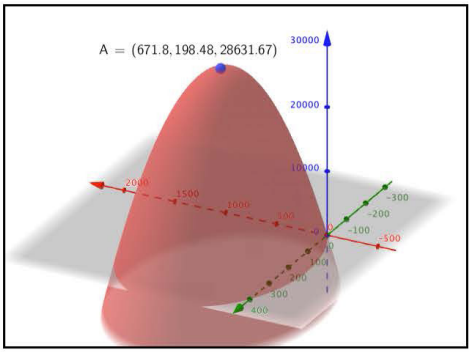
GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 23.8

1) $C = 0{,}6N + 1{,}2P$
2) $h = \sqrt[3]{\frac{12}{5}}$
3) a) $y = 2340{,}85\ mm^2$ b) $\langle 0{,}82; 38{,}47\rangle$
4)
a) Superfície plana
b) 4.631.923 carros vendidos
c) Direção em que a função z possui taxa de variação máxima.

5) $1m$
6) a) Não.
b) Não existem pontos de máximo, pois o ponto onde as derivadas parciais são nulas é um ponto de sela.

7)
a) $Y = 15.700{,}6\ kg\ ha^{-1}$
b) $L = 671{,}8\ m$ e $N = 198{,}48\ kg\ ha^{-1}$
c) $28.631{,}67\ kg\ ha^{-1}$

d)

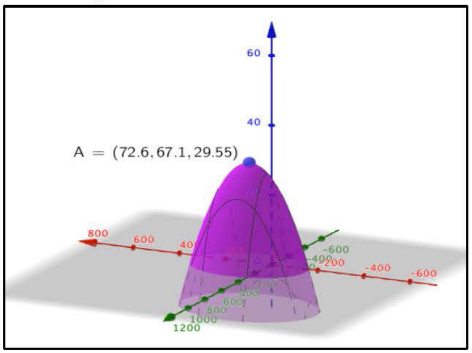


8)

a) $N = 72{,}6\ g\ ha^{-1}$ e $P = 67{,}1\ g\ ha^{-1}$

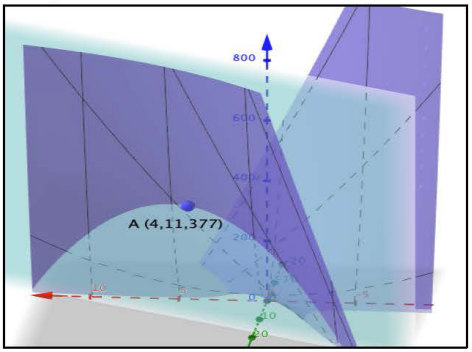
b) $Y = 29{,}55\ g$

c)



9) a) $x = 4$ e $y = 11$

b)



GABARITO DOS EXERCÍCIOS 24.1

1)

a) $\frac{3}{2}$ b) 3 c) $\frac{e}{2}$

d) $\frac{20}{3}$
e) 1
f) $\frac{1}{2}$
g) $e^2 - 1 - e + \frac{1}{e}$
h) $e - 1$
i) 1
j) -2
k) $2.ln2$
l) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{2} + 1$

---

2)
a) $2e - 2$
b) e^2
c) -2
d) $\frac{4\sqrt{2}-2}{15}$

---

3)
a) $\frac{11}{2}u.v$
b) $\frac{20}{3}u.v$
c) $\frac{92}{3}u.v$
d) $\frac{\pi^2}{9}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1\right)u.v$
e) $2\,u.v$
f) $72\,u.v$

---

4) Há partes do sólido abaixo e acima do plano xy nas limitações da região R do retângulo.

5)

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\, dy = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx\, dy = \frac{1}{2}$$

A função $\frac{x-y}{(x+y)^3}$ é descontínua na região de integração.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 24.2

1)
a) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{1}{60}$
c) 16
d) $\frac{\sqrt{2}}{8}(4 - \pi)$
e) $\frac{ln2}{3}$
f) $\frac{e^2+1}{4}$
g) $\frac{e-1}{2}$
h) 1
i) $\frac{e-1}{2}$

---

2)
a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{24}$
c) 0
d) $\frac{4}{35}$

---

3)
a) $\frac{8}{3}\,u.v$
b) $\frac{128}{15}\,u.v$
c) $\frac{1}{6}\,u.v$
d) $\frac{8}{3}\,u.v$

4) $\frac{7}{40}\ u.v$ 5) $6\ u.v$ 6) $\frac{1}{3}\ u.v$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 24.3

1)

a) $\frac{\pi}{24}$ c) $\frac{\pi}{6}$ e) $\frac{\pi}{4}(1-cos25)$

b) 0 d) $\pi(e^9-1)$ f) $\frac{\pi}{2}a^4$

---

2)

a) $-\frac{a^5}{15}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

---

3)

$a)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_{\frac{1}{sen\theta}}^{2sen\theta} r^2(cos\theta+sen\theta)dr\,d\theta \quad (não\ prático)$

$\int_0^{\pi}\int_0^{1}[r^2(cos\theta+sen\theta)+r\,]dr\,d\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3} \Leftarrow Resposta$

$b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{sen\theta} r^2cos\theta dr\,d\theta \quad (não\ prático)$

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}} r^2cos\theta dr dr\,d\theta=\frac{1}{12} \Leftarrow Resposta$

$c)\ \int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta} rcos\theta dr\,d\theta=0 \Leftarrow Resposta$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\frac{r^2cos\theta}{\sqrt{r^2cos^2\theta+(1+rsen\theta)^2}}drd\theta \quad (não\ prático)$

$d)\ \int_0^{\pi/2}\int_{sen\theta+cos\theta-\sqrt{sen2\theta}}^{sen\theta+cos\theta+\sqrt{sen2\theta}} r^2sen\theta dr\,d\theta \quad (não\ prático)$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1+rsen\theta)r\,drd\theta=\pi \quad \Leftarrow Resposta$

4)

a) $\frac{81\pi}{8}$ d) $\frac{\pi}{4}\ (sen1-cos1)$ h) 0

i) 18

b) $\frac{27\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{2}ln2$ j) 2π

c) $\frac{\pi}{4}sen9$ f) 7π

g) 0

---

5) $\frac{8\pi(2-\sqrt{2})}{3}u.v$

6) $8\pi\ u.v$

7) $2\pi - \frac{32}{9}\ u.v$

8) $\int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\,drd\theta = 2\pi\ u.a$

9) $24\pi\ u.v$

10) $\frac{\pi(e-2)}{e}u.v$

11) $\frac{64\pi(5\sqrt{5}-8)}{3}u.v$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 24.4

1)

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}u.a$

b) $\pi\sqrt{3}\ u.a$

c) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)u.a$

d) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-5\sqrt{5})u.a$

e) $10\pi\ u.a$

---

2) a) $\frac{\pi}{6}\ u.a$ b) $9\pi(4-\sqrt{2})\ u.a$

3) A cargo do leitor

4) Letra c.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 24.5

1)

a) $\frac{1}{2}$

b) 0

c) 4

d) $\frac{3}{2}$

---

2)

a) $\frac{1}{10}$

b) $\frac{-8}{3}$

c) $\frac{-4}{3}$

d) 1

---

3)

a) $\int_0^1\int_z^1\int_z^x (x^2)dzdydx$

b) $\int_0^4\int_{z/2}^2\int_{z-x}^x (z-x)dydxdz$

c) $\int_0^{\pi}\int_z^{\pi}\int_x^{\pi} sen(x+y+z)dydxdz$

d) $\int_0^{ln2}\int_{e^z}^2\int_0^2 e^z dydxdz$

---

4) a) $\frac{2e-5}{2}$ b) $\frac{-4}{3}$

---

5) 2π 6) 0 7) $\frac{1}{18}u.v$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 24.6

1)

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $-\frac{56}{15}$

c) $\frac{162\pi}{5}$

d) $\frac{4\sqrt{2}-5}{15}$

---

2) $\frac{4}{15}$

3) 0

---

4) a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{128\sqrt{2}-160}{15}$

5) $\frac{8\pi(2-\sqrt{2})}{3}$

---

6)

$a) \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{r}(r)dzdrd\theta$

$b) \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{cos\phi}{sen^2\phi}}\rho^2 sen\phi d\rho d\theta d\phi$

$c) V = \frac{\pi}{6}u.v$

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 24.7

1) 25π m³ de água

2) Letra e.

3)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r} e^{-2x}\underbrace{x}_{jac}.dxd\theta = \frac{-3\pi r.e^{-2r}+\pi}{2}$$

4) $\frac{x^2}{15^2}+\frac{y^2}{15^2}+\frac{z^2}{10^2}=1$ e $V = 3000\pi\ cm^3$

5) $\frac{10}{3}$ °C

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.1

1) No conjunto $\mathbb{Z}$, falha a propriedade MU4 e no conjunto $\mathbb{I}$, falham as propriedade AD3 e MU3.

2)

a) Não

b) Não

c) Não

d) Sim

---

3) Sim.

4) Não.

5) Não.

6) Sim.

7) A cargo do leitor.

8) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.2

1)

a) Sim

b) Não

c) Não

d) Sim e) Sim f) Sim

2)
a) Sim
b) Não
c) Não
d) Sim

3) Não. É preciso verificar ainda se operações de soma e multiplicação por escalar pertencem ao conjunto candidato a subespaço vetorial.

4) Sim.

5)
a) Sim b) Sim c) Sim

6)
a) F
b) V
c) F
d) F

7)
a) $u = 4u_1 - 7u_2$
b) $u = 6u_1 + 2u_2$F
c) $u = -4u_1 + 7u_2 - 5u_3$
d) Não existe.

8) Letra e.

9) Letra c.

10) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y = -3x\}$. Interpretação geométrica: trata-se de uma reta que passa pela origem.

11) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | - x + y + 2z = 0\}$. Interpretação geométrica: trata-se de um plano que passa pela origem do sistema tridimensional.

12) $S = \{(1, 1, 0), (0, -2, 1)\}$.

13) Sim

14) Sim

15) Porque o valor determinante dos coeficientes do sistema linear é nulo, ou basta ver que $w = 4u - 2v$.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.3

1)
a) L.I
b) L.D
c) L.D
d) L.I
e) L.I
f) L.D
g) L.I
h) L.D
i) L.I
j) L.D
k) L.I

2) $S = \{1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$

3)
a) F
b) V
c) V
d) V
e) V
f) F
g) F
h) V

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.4

1)
a) Sim
b) Não
c) Não
d) Não
e) Sim
f) Não
g) Não
h) Não
i) Não
j) Não
k) Sim
l) Não

2)Não

3)Uma base das matrizes 2x2 deve ter exatamente 4 matrizes. Como são 5 matrizes, o teorema 25.7.1, nos garante que são linearmente dependentes, e assim, não formam uma base das matrizes 2x2.

4)Não.

5)Sim.

6)

a) $S = \{(1,1)\} \Rightarrow Dim\ = 1.$

b) $S = \{(0,0)\} \Rightarrow Dim\ = 0.$

c) $S = \{(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1)\} \Rightarrow Dim\ = 1.$

d) $S = \{(1,0,1,0), (0,-1,0,1\} \Rightarrow Dim\ = 2.$

e) $S = \{(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 1, 0), (\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 0, 1)\} \Rightarrow Dim\ = 2.$

---

7)

a) $S = \{(1,2)\}$

b) $S = \{(2,1,3)\}$

c) $S = \{(1, \frac{2}{3}, 0)\}$

d) $S = \{(1, \frac{1}{2},\ 0), (0, -\ 2, 1)\}$

e) $S = \{(1, 0,\ 0), (0,1,0)\}$

f) $S = \{(1,1,1,1)\}$

g) $S = \{(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

---

8)

a) F
b) F
c) V
d) F
e) V
f) F
g) V
h) F
i) V
j) F

9) A cargo do leitor.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.5

1)

a) $[u]_\alpha = (-1,2)$

b) $[u]_\alpha = (2, \frac{-4}{5})$

c) $[u]_\alpha = (-x, x+y)$

---

2)

a) $[u]_\alpha = (0,1,0)$

b) $[u]_\alpha = (5,4,-4)$

c) $[u]_\alpha = (\frac{-x+4y+z}{4}, y, \frac{x-2y+z}{2})$

---

3)

a) $[u]_\alpha = (1,-10,20,-13)$

b) $[u]_\alpha = (\frac{4}{3}, \frac{-1}{3})$

c) $[u]_\alpha = (1,1,-1)$

---

4) $[u]_\alpha = (0,1,3,2)$

5)A cargo do leitor.

---

6)

a) $[u]_\alpha = (-3,2)$

b) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

d) $[u]_\beta = (1,1)$

7)
a) $[u]_\alpha = (3,2)$
b) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
c) $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
d) $[u]_\beta = (-3,-1)$

8)
a) $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$
b) Demonstração a cargo do leitor.
c) $\beta = \{(-1,\frac{-1}{3}),(1,\frac{2}{3})\}$

9)
a) $[u]_\alpha = (\frac{4}{3},0,\frac{1}{3})$
b) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$
c) $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} -2/3 & 7/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$
d) $[u]_\beta = (-4,-3,5)$

10) $5\vec{u} - 17\vec{v} - 5\vec{w}$
11)
a) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
b) $\beta = \{(\frac{1}{2},1,\frac{-3}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{-1}{2},2,\frac{-5}{2})\}$

12) Letra d.
13)Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.6

1)
a) Sim
b) Sim
c) Não
d) Não
e) Não
f) Não
g) Sim
h) Sim
i) Não
j) Sim
k) Não
l) Sim

2)
a) $3u + 5v$
b) $3u - 10v$

3) A cargo do leitor.

4)
a) $T(x) = \frac{-5}{2}x$
b) $T(x,y) = 3x - 2y$
c) $T(x,y) = (x + y, x - 3y)$
d) $T(x,y) = (x, x - y, x + 2y)$
e) $T(x,y,z) = (3x + 3y - z, 5x - 2y + z)$
f) $T(x,y,z) = (x, y + z, z)$

5)
a) $Nuc(T) = \{0\} \Rightarrow Dim = 0, Im(T) = \{\frac{-5}{2}\} \Rightarrow Dim = 1 \Rightarrow bijetiva.$
b) $Nuc(T) = \{(\frac{2}{3},1)\} \Rightarrow Dim = 1, Im(T) = \{\frac{3}{2}\} \Rightarrow Dim = 1 \Rightarrow sobrejetiva.$

c) $Nuc(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow Dim = 0, Im(T) = \{(1,1),(1,-3)\} \Rightarrow Dim = 2 \Rightarrow bijetiva.$
d) $Nuc(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow Dim = 0, Im(T) = \{(1,1,1),(1,-1,2)\} \Rightarrow Dim = 2 \Rightarrow injetiva.$
e) $Nuc(T) = \{(1,-8,-21)\} \Rightarrow Dim = 1, Im(T) = \{(1,5),(3,-2)\} \Rightarrow Dim = 2 \Rightarrow$ *sobrejetiva.*
f) $Nuc(T) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow Dim = 0, Im(T) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\} \Rightarrow Dim = 3 \Rightarrow$ *bijetiva.*

---

6)
a) $Nuc(T) = \{(0,0)\} \Rightarrow$ É o ponto (0,0) de $\mathbb{R}^2$.
$Im(T) = \{(1,5),(2,-1)\} \Rightarrow$ É o próprio $\mathbb{R}^2$.
b) $Nuc(T) = \{(1,-1)\} \Rightarrow$ É uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^2$.
$Im(T) = \{(1,4)\} \Rightarrow$ É uma reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^2$.
c) $Nuc(T) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow$ É o ponto (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$.
$Im(T) = \{(1,2,-3),(-2,1,2),(-1,2,-1)\} \Rightarrow$ É o próprio $\mathbb{R}^3$.
d) $Nuc(T) = \{(0,0,0)\} \Rightarrow$ É o ponto (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$.
$Im(T) = \{(1,1,-1),(0,1,2),(0,0,-1)\} \Rightarrow$ É o próprio $\mathbb{R}^3$.

---

7)Ocorre isomorfismo em a), c) e d).

8) $T(x,y) = (-5x + y, -10x + 2y)$
9) $T(x,y,z) = (-6x + 3y - 2z, -2x + y - \frac{2}{3}z)$
10) $T(x,y,z) = (3x - y, 2x + 2y + z, x + 5y + 4z)$. *Sim, é um automorfismo.*

11)A cargo do leitor.

12)

a) V	f) F	k) F
b) V	g) V	l) V
c) F	h) F	m) V
d) F	i) V	n) V
e) V	j) V	

---

13)A cargo do leitor.
14)Letra b.
15)Letra b.
16)Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.7

1) $[T]_\beta^\alpha = [1 \quad -1 \quad -4]$
2) $T(x,y) = (\frac{3x+9y}{8}, \frac{7x+y}{6})$ **e** $T^{-1}(x,y) = (\frac{-4x+27y}{30}, \frac{28x-9y}{30})$
3) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$
4) $T(x,y,z) = (-x + y, x + y + z)$
5) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
6) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
7) $T(x,y) = (-8x + 3y, -5x + 3y, -3x + 2y)$
8) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$, $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/14 \\ -1/7 & -5/14 \end{bmatrix}$ **e** $T^{-1}(x,y) = (\frac{x+3y}{14}, \frac{2x-y}{7})$
9) $[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$, $[T]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 17/24 & 3/8 & 1/12 \\ -5/8 & -1/8 & -1/4 \\ 7/24 & 1/8 & -1/12 \end{bmatrix}$ e $T^{-1}(x,y,z) = (\frac{x+y}{2}, \frac{-x-y}{4}, \frac{z}{2})$

10) $\beta = \{(2,1),(1,3)\}$
11) $\alpha = \{(2,0,1),(-1,-1,-3),(1,0,0)\}$
12) 4×2
13) Letra b.
14) Letra b.
15) Letra b.
16) Letra a.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.8

1)
a) $\lambda = 1$ $(multiplicidade\ 2)$ $e\ \vec{u} = (1,-2)$
b) $\lambda = 2 \Rightarrow (1,0)$ e $\lambda = 1 \Rightarrow (-2,1)$
c) $Não\ existe.$
d) $\lambda = 0 \Rightarrow (-1,1,1), \lambda = \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{3}+2, \sqrt{3}+1, 1)$ e $\lambda = -\sqrt{3} \Rightarrow (-\sqrt{3}+2, -\sqrt{3}+1, 1)$
e) $\lambda = 1$ $(mult.2) \Rightarrow (0,2,1)$ e $\lambda = -2 \Rightarrow (0,-1,1)$
f) $\lambda = 1$ $(mult.2) \Rightarrow (0,0,0,1)$
g) $\lambda = 1$ $(mult.2) \Rightarrow (1,0,0,0), \lambda = 2 \Rightarrow (-4,3,-3,1)$ e $\lambda = -1 \Rightarrow (-1,0,0,1)$,

---

2)
a) $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

---

3) A cargo do leitor
4) Os autovalores são: $\lambda = 1$ e $\lambda = 2\ (\text{mult. } 2)$. $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e matriz diagonalizada é $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
5) $T(x,y) = (5x, 3y)$
6) $T(x,y,z) = (-x+2y+6z, \frac{-x+6y+21z}{4}, x-2y+4z)$

7) A cargo do leitor

8) A cargo do leitor

9) $A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
10) Letra b.
11) Letra c.
12) Letra c.
13) Letra d.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS 25.9

1) A cargo do leitor
2) A cargo do leitor
3) A cargo do leitor
4) Uma elipse de equação: $\frac{{x_1}^2}{\frac{1}{4}} + \frac{{x_2}^2}{\frac{1}{25}} = 1.$

---

5)
a) -3 b) 11 c) 1

6)
a) -2
b) -6
c) 3
d) $\sqrt{2}$
e) -54

7) -214
8) a) 8 b) -7
9) A cargo do leitor
10) A cargo do leitor

11)
a) $\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
b) $\frac{\pi}{2}$ rad
c) $\frac{\pi}{2}$ rad
d) $\frac{2\pi}{3}$ rad
e) $\frac{\pi}{3}$ rad
f) $\frac{\pi}{4}$ rad
g) $\frac{\pi}{2}$ rad

12) Itens b), c) e g).
13) $S^{\perp} = \{b \in \mathbb{R} | \ (a,b) = (2b,b)\}$.
14) $S^{\perp} = \{c \in \mathbb{R} | \ (a,b,c) = (-c,-c,c)\}$.
15) Letra d.
16) Letra c.
17) Letra e.

GABARITO DOS EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO 25.10

1) Letra e.
2) O ponto viável é $(2,1)$ e $\varphi(2,1) = 7$.
3) O ponto viável é $(1,-1)$ e $\varphi(1,-1) = -1$.
4) φ tem valor máximo no ponto C e δ tem valor mínimo no ponto B.
5)
a) É o percentual mínimo entre as misturas.
b) Como o vetor gradiente de $(z-15)x + (z-20)y \geq 0$ precisa ter componentes positivos, uma vez que $x > 0$ e $y > 0$, então: $z > 15$ ou $z > 20$, prevalecendo: $z > 20$.
6) Aproximadamente R$ 1,25.
7) 30ha de milho e 26 há de mandioca. Lucro máximo de R$ 562.000,00.
8) 30ha de arroz e 20ha de feijão.
9) Aproximadamente 690g de grão e 130g de farelo de soja.
10) 24 caixas de manga e 20 caixa de maçãs.
11)
a) Aproximadamente 62kg de adubo químico e 150kg de esterco bovino, com um custo de R$ 460,00.
b) O adubo químico, pois apresenta custo mínimo de R$ 625,00, enquanto o esterco bovino apresenta custo de R$ 889,00.
c) De acordo com as informações de a) e b), devemos misturar os dois tipos de adubos.

SOBRE O AUTOR

Francielck Domingos Freire: Mestre em Matemática pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM-UNIFAP-PROFMAT), graduado em licenciatura plena em Matemática e Física pela Universidade Federal do Amapá (Unifap) e professor do Instituto federal do Amapá.

SOBRE A OBRA

Matemática Aplicada às Ciências Agrárias é uma coleção com quatro livros (didáticos) voltados para os cursos de ciências agrárias.

Os volumes 1, 2 e 3 são destinados ao nível médio técnico da área de ciências agrárias, como agroecologia, agropecuária e agronegócio, e também para os componentes de conhecimentos matemáticos básicos de nível superior, ministrados em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

O volume 4 foi elaborado para os componentes de Matemática de nível superior em qualquer área, porém aplicações em engenharia agronômica e engenharia agrícola.

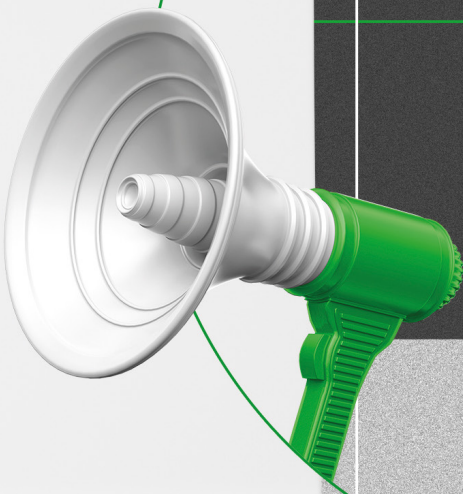
Em todos os volumes, os conteúdos são abordados com Matemática pura, exatamente como se ensina no ensino médio e no nível superior, porém acompanhados de contextualização, modelagem, uso de tecnologias e aplicação às ciências agrárias.

Todos os exercícios possuem questões elaboradas pelo autor visando uma melhor assimilação do conteúdo, além de questões selecionadas criteriosamente do ENEM, ENADE, vestibulares e outras instituições.

É uma coleção de livros (didáticos) elaborada com intuito de assessorar professores e profissionais da área, e de dar um embasamento teórico mais contundente aos alunos e acadêmicos de cursos afins.

COMUNICADO IMPORTANTE

Visite nossas outras obras de Ensino, Pesquisa e Extensão



EDIFAP

ISBN: 978-65-89513-36-0

EDIFAP